29/7.97 Jh

12-

Phys. sp. 316 f

Januschke

DAS PRINCIP

DER

ERHALTUNG DER ENERGIE

UND

SEINE ANWENDUNG IN DER

NATURLEHRE.

EIN HILFSBUCH FÜR DEN HÖHEREN UNTERRICHT

VON

HANS JANUSCHKE,

K. K. DIRECTOR DER STAATS-OBERREALSCHULE IN TESCHEN.

MIT 95 FIGUREN IM TEXT.

„Wohl fühlen wir, dass wir mit den eingewurzeltsten, durch grosse Autoritäten canonisierten Hypothesen in den Kampf gehen, dass wir mit den Imponderabilien die letzten Reste der Götter Griechenlands aus der Naturlehre verbannen wollen; aber wir wissen auch, dass die Natur in ihrer einfachen Wahrheit grösser und herrlicher ist, als jedes Gebilde von Menschenhand und als alle Illusionen des erschaffenen Geistes." *R. Mayer.*

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1897.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Im vorliegenden Buche sollen Geltung und Anwendung des Energieprincipes in allen Gebieten der Naturlehre dargethan werden. Es geht aus vieljährigen Studien über die Verwendung des genannten Principes für den höheren Unterricht hervor, nämlich aus dem Bestreben, mit Hilfe des Principes nach einem einheitlichen Plane sowohl die einzelnen Erscheinungen eindringlicher zu behandeln, als auch den Zusammenhang derselben möglichst innig zu gestalten. Je mehr ich mich mit diesbezüglichen Studien beschäftigte, desto mehr kam ich zur Überzeugung, dass das Energieprincip gut geeignet ist, der Öconomie des Denkens in diesem Sinne auch in der Schule zu dienen, und dass mit dessen Verwendung zugleich eine Reihe didaktischer Vortheile verbunden ist. Das Ergebnis der Studien ist in der vorliegenden Arbeit niedergelegt.

Es könnte vielleicht als unzeitgemäss bezeichnet werden, für eine umfassende Verwendung des Energieprincipes in der gegenwärtigen Zeit einzutreten, da Führer der Wissenschaft, wie Hertz, Boltzmann, Planck, sich gegen dasselbe als Grundprincip ausgesprochen haben. Indessen hat J. Schütz (Wiener Akad.-Ber. 1896. S. 162) gezeigt, dass das Hertz'sche Princip der geradesten Bahnen nichts anderes enthält, als das Hamilton'sche Princip, und dieses ist auf das Energieprincip zurückführbar; und die von Boltzmann angefochtene Verwendung des Principes kommt in den vorgeführten Lehrgebieten nicht in Betracht. Die bezüglichen Einwendungen berühren daher die Arbeit nicht.

Die Behandlungsweise des Energieprincipes ist durchgehends nach der historischen Entwickelung der Naturlehre eingerichtet. Eine historische Einleitung, die theilweise auch für Unterrichtszwecke geeignet sein dürfte, gibt gewissermassen den Bauplan des zu errichtenden Gebäudes und zeigt die Entwickelung und die Rolle des Energieprincipes in der Physik. Den einzelnen Capiteln liegen durchaus möglichst einfache Anschauungen zugrunde, und die Begriffsentwickelungen erfolgen stets im Geiste der Geschichte der Wissenschaft. Bei der quantitativen Behandlung der Erscheinungen mittelst des Energieprincipes wird dieses nur in den experimentell begründeten

Formen gebraucht. In der Mechanik liegt demselben der Satz der lebendigen Kräfte zugrunde. Zur Bestimmung der Energie der Kraftfelder wird die hydrostatische Grundgleichung als Ausdruck für einen Arbeitswert in Anwendung gebracht; damit werden der Arbeitswert eines Flüssigkeitsgewichtes, das Elasticitätsgesetz, die Cohäsionsarbeit, die Zustandsgleichung (gewonnen aus Elasticitätsversuchen und aus dem ersten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie), das Gesetz des osmotischen Druckes, ferner die Energie der elektrischen und magnetischen Felder als Volumsenergien (pv) dargestellt. Diesen von Ostwald sogenannten Volum- oder Raumenergien werden auch die Distanz- und Oberflächenenergien als potentielle Energien beigeordnet. Das Helm'sche Intensitätsgesetz, nach welchem jede Energie in einen Intensitätsfactor und einen Extensitätsfactor zerlegbar ist, ermöglicht eine analoge Behandlung mehrerer sehr verschiedenartiger Erscheinungsgebiete. Die Lehre vom Lichte wird nach der elektromagnetischen Lichttheorie in einer leicht auch elementar wiederzugebenden Weise behandelt. Die modernen Lehren stützen sich durchaus auf die Arbeiten von Faraday, Maxwell, Helmholtz und Hertz.

Von der Ostwald'schen Anschauung, dass die Energie ein reelles Agens sei, wird kein Gebrauch gemacht.

In besonderen, als hypothetisch bezeichneten Paragraphen wird in der Lehre von der Wärme, der Elektricität und des Magnetismus eine anschauliche mechanische Deutung der betreffenden Kräfte angegeben; auch dabei wird die geschichtliche Entwickelung der Theorien berücksichtigt. Insbesondere gestützt auf die Anschauungen Faradays, Maxwells und W. Thomsons (Lord Kelvin), werden die Kräfte im Felde mittelst molecularer Wirbel erklärt, und in selbständiger Weise werden die Wirkungen der Wärme, die elektrische und magnetische Polarisation durch die den Niveauflächen im Körper entsprechenden Formen der Molecüle zu erklären versucht. Die Maxwell-Hertz'schen Grundgleichungen des elektrischen Feldes gewinne ich aus den Grundgleichungen der Elasticität, indem ich die Kraft anstatt der relativen Verschiebung $d\xi$ der absoluten Verschiebung ξ der Raumelemente proportional setze (§ 52b), und darauf gestützt deute ich die elektrischen Kräfte — gegenüber der Cohäsion und Elasticität, welche Kräfte des Wechselwirkungspotentials der Molecüle sind — als solche, die aus der Änderung des Selbstpotentiales der Körper oder deren Theilchen entspringen (§ 100e). Eine mechanische Deutung der elektromagnetischen Kräfte wird in § 125 gegeben. Eine Beziehung zwischen optischen Brechungsexponenten, Dielektricitätsconstanten und Cohäsionsconstanten als Grund dafür, dass der Äther der einheitliche Träger der verschiedenen physikalischen Energien sei, ist in § 143 dargestellt.

Mehreren Lehrbüchern gegenüber wird bei Behandlung der Zusammenhangsformen der Körper ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die leichte Verschiebbarkeit der Flüssigkeitstheilchen den Schluss auf eine geringe Cohäsion nicht begründet, und nach Stefan wird aus der Verdampfungswärme und auf andere Weise berechnet, dass die Cohäsion der Flüssigkeiten als Druck auf 1 cm^2 zumeist mehrere tausend Atmosphären beträgt.

Der behandelte Stoff fällt im allgemeinen mit dem Lehrstoff für den höheren Unterricht zusammen; doch gehen auch mehrere Paragraphen, die mir noch vom wissenschaftlichen Standpunkte für die Bedeutung des Energieprincipes von besonderer Bedeutung zu sein schienen, über diesen Rahmen hinaus. Die Rechnungen werden vielfach mit den Zeichen der Differential- und Integralrechnung durchgeführt; dieselben sind aber zumeist so einfach, dass sie leicht in elementar mathematischer Form dargestellt werden können. An einigen Stellen findet sich hierzu eine kurze Anweisung. Den einzelnen Lehren folgen Andeutungen über die Anwendungen und in der Regel eine Anzahl von Aufgaben, von denen allerdings die meisten anderen Aufgabensammlungen entlehnt sind. Die Aufnahme solcher Aufgaben erschien mir wesentlich, da eben die Förderung der rechnungsmässigen Verarbeitung des physikalischen Lehrstoffes im Unterrichte ein Hauptmotiv zur Abfassung des Buches war.

Die Ansicht mancher Schulmänner, das Energieprincip sei nicht im Anfange, sondern am Schlusse des physikalischen Unterrichtes zu behandeln, bekämpfe ich nicht; denn diese Ansicht bezieht sich offenbar auf ein experimentelles Lehrverfahren in einem ersten Unterrichtskreise. Bei ausschliesslich qualitativer Behandlung der Naturerscheinungen, wobei nur die ersten Begriffe gewonnen werden sollen, kann das alle Erscheinungen harmonisch zusammenfassende Energieprincip, in populärer Weise angewendet, einen recht gefälligen und die Schüler befriedigenden Abschluss bilden.

In einem zweiten, höheren Unterrichtscursus aber, in dem die mathematische Begründung in Anwendung zu bringen ist, gehört das Gesetz der Rechnung vor dieselbe. Der Platz des Energieprincipes ist neben dem Newton'schen Kraftmasse, aus dem es für die Mechanik leicht zu gewinnen ist. Ebenso wie dieses hätte auch jenes am Ende der mathematischen Entwickelungen keinen Wert. Als Grundlage der Rechnung jedoch gestattet das Energieprincip die Gesetze der verschiedenen Naturerscheinungen nach einem einheitlichen Plane und zumeist in einfacher Weise zu ermitteln. Viele diesbezügliche Entwickelungen werden — nach einiger Übung der Schüler — von diesen als Aufgaben selbständig durchgeführt werden können. So muss das genannte Princip zu einer Vereinfachung und Erleichterung des Unterrichtes führen, und durch seine Anwendung bei der Lösung zahlreicher

Übungsbeispiele sowohl in der Mechanik, als auch in der Lehre von der Wärme, der Elektricität und des Magnetismus muss ein gründliches Verständnis des physikalischen Lehrstoffes und ein sicheres Wissen seitens der Schüler erzielt werden.

Möge es dem Buche gegönnt sein, bei Erstrebung dieses Zieles mitzuwirken!

Teschen, im September 1896.

Hans Januschke.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Seite

A. Gegenstand und Methode der Naturlehre 1
B. Das Princip der Erhaltung der Energie 9

I. Bewegung fester Körper.

§ 1. Gleichförmige Bewegung . 20
§ 2. Freier Fall. Galileis Gesetze 20
§ 3. Mass der Kräfte . 22
§ 4. Gleichwertigkeit der Arbeit und Energie 25
§ 5. Arbeit bei unfreier Bewegung 28
§ 6. Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen und Kräfte . . . 31
§ 7. Fortsetzung . 33
§ 8. Zusammensetzung der Kräfte an starren Körpern 37
§ 9. Kinetische und potentielle Energie 38
§ 10. Das Princip der Erhaltung der Energie 39
§ 11. Bewegung auf der schiefen Ebene 42
§ 12. Pendelbewegung . 44
§ 13. Wurfbewegung . 48
§ 14. Fliehkraft . 53
§ 15. Centralbewegung . 55
§ 16. Centralbewegung. Fortsetzung 59
§ 17. Bewegungsenergie der Sonne und der Planeten. Massenmittelpunkt. 65
§ 18. Potential eines Massensystems. Satz von Gauss 69
§ 19. Kraftfeld. Niveauflächen. Kraftlinien 73
§ 20. Gestalt der Erde . 77
§ 21. Achsendrehung der Erde . 79
§ 22. Ebbe und Flut . 82
§ 23. Dichte der Erde. Lebendige Kraft der Erde 85
§ 24. Schwerpunkt . 88
§ 25. Energie eines rotierenden Körpers 94
§ 26. Physisches Pendel . 97
§ 27. Kräftepaare . 101
§ 28. Gleichgewichtslagen. Helms Intensitätsgesetz 103
§ 29. Standfestigkeit . 105
§ 30. Einfache Maschinen Der Hebel; die Decimalwage; die Rolle; das Wellrad; die schiefe Ebene; der Keil; die Schraube 107
§ 31. Stoss unelastischer Körper 118
§ 32. Stoss elastischer Körper . 121

II. Von dem Gleichgewichte und der Bewegung der Flüssigkeiten.

Seite
§ 33. Eigenschaften der Flüssigkeiten 124
§ 34. Niveauflächen . 127
§ 35. Das hydrostatische Paradoxon 128
§ 36. Arbeitswert eines Flüssigkeitsgewichtes. Communicierende Gefässe . 129
§ 37. Das archimedische Gesetz . 131
§ 38. Torricellis Theorem. 134
§ 39. Der hydraulische Druck. 137
§ 40. Bewegung der Flüssigkeiten in engen Röhren 140

III. Von dem Gleichgewichte und der Bewegung der Gase.

§ 41. Eigenschaften der Gase . 144
§ 42. Das Spannungsgesetz als Arbeitsgleichung 150
§ 43. Barometrische Höhenmessung 152
§ 44. Ausfluss der Gase . 153
§ 45. Winde. Niveauflächen der Luft. Meeresströmungen 155

IV. Molecularkräfte.

§ 46. Zusammenhangsformen der Körper. Cohäsion. Adhäsion 164
§ 47. Allgemeine Eigenschaften der Körper. Molecüle 165
§ 48. Elasticität. Das Elasticitätsgesetz als Arbeitsgleichung 166
§ 49. Elastische Kräfte eines deformierten Parallelepipedes 173
§ 50. Biegungselasticität . 177
§ 51. Torsionselasticität . 179
§ 52. Kräfte im elastischen Felde. Ähnlichkeit mit elektrischen Kräften . 181
§ 53. Potentielle Energie im Kraftfelde. Fernwirkungsgesetz. 183
§ 54. Longitudinale Schwingungen von Stäben 189
§ 55. Transversale Schwingungen gespannter Saiten. 194
§ 56. Wellen in elastischen Raummedien 197
§ 57. Reflexion und Brechung der Wellen 199
§ 58. Molecularkräfte der Flüssigkeiten 201
§ 59. Die Arbeit und das Kraftfeld der Cohäsion 203
§ 60. Capillaritätsgesetze . 207
§ 61. Doppelschichte zweier sich berührender Flüssigkeiten 212
§ 62. F. Neumanns Gesetz der Randwinkel 214
§ 63. Gestalt der freien Oberfläche einer Flüssigkeit 217
§ 64. Anziehung und Abstossung durch die Oberflächenspannung 221
§ 65. Adhäsionsplatten . 223
§ 66. Diffusion der Flüssigkeiten 224
§ 67. Mischungs- und Lösungsarbeit 225
§ 68. Der osmotische Druck . 228
§ 69. Mischung und Lösung der Gase 229

V. Wärme.

§ 70. Wärmeerscheinungen . 233
§ 71 α. Ausdehnung. Temperatur 234
§ 71 β. Wärmemessung. Calorie 239
§ 72. Hypothesen über das Wesen der Wärme 242
§ 73. Mechanische Zusammenstellung, deren Zustand dem Wärmezustand der Körper ähnlich ist . 249
§ 74. Erster Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie 251
§ 75. Zustandsgleichung für homogene Körper 255
§ 76. Isothermische und adiabatische Zustandsänderungen 257

Seite
§ 77. Gasmaschine. Kreisprocess . 258
§ 78. Zweiter Hauptsatz . 262
§ 79. Die Grössen der Zustandsgleichung 265
§ 80. Latente Ausdehnungswärme . 274
§ 81. Gleichung von Thomson . 274
§ 82. Schmelzen . 275
§ 83. Verdampfung und Sublimation 280
§ 84. Gesetze verdünnter Salzlösungen 284
§ 85. Einfluss der Oberflächenspannung auf die Dampfspannung 286
§ 86. Discussion der van der Waals'schen Zustandsgleichung. Kritischer Punkt . 288

VI. Elektricität. Elektrostatik.

§ 87. Grunderscheinungen. Elektrischer Zustand 296
§ 88. Gute und schlechte Elektricitätsleiter 297
§ 89. Positive und negative Elektricität 297
§ 90. Sitz der Elektricität . 298
§ 91. Elektrische Vertheilung. Influenzelektricität 298
§ 92. Gesetz von der Erhaltung der Elektricität 298
§ 93. Hypothesen von Symmer und Franklin 299
§ 94. Coulombs Gesetze. Elektricitätsmenge 300
§ 95. Elektricitätsgrad . 302
§ 96. Elektrische Energie . 303
§ 97. Elektricitätsgrad als Arbeitswert. Potential 305
§ 98. Sitz der Elektricität. Dichte. Spannung 308
§ 99. Ladungsarbeit . 312
§ 100. Elektrisches Feld. Potentielle Energie. Theorie der elektrischen und der Äther-Verschiebung . 314
§ 101. Condensatoren . 322
§ 102. Ebene Condensatoren . 329
§ 103. Elektrische Batterien . 331
§ 104. Elektrische Vertheilung auf einer Kugel. Elektrisierungsarbeit . . 334
§ 105. Elektrische Bilder. Schirm . 336

VII. Magnetismus.

§ 106. Grunderscheinungen . 338
§ 107. Hypothesen . 340
§ 108. Coulombs Gesetz . 341
§ 109. Magnetisches Moment. Intensität des Erdmagnetismus 342
§ 110. Potential eines kleinen Magnetes 344
§ 111. Blattmagnete . 345
§ 112. Magnetische Induction . 348
§ 113. Magnetisierungsarbeit . 354

VIII. Elektrische Ströme.

§ 114. Grundversuche . 356
§ 115. Elektrische Energie. Elektromotorische Kraft 357
§ 116. Elektrolyse. Stromstärke . 362
§ 117. Polarisation der Elektroden. Accumulatoren 366
§ 118. Ohms Gesetz . 368
§ 119. Wärmewirkungen. Joules Gesetz 374
§ 120. Arbeitsmaximum einer Batterie 378
§ 121. Thermoelektrische Ströme . 379
§ 122. Peltier'scher und Thomson'scher Effect 383

IX. Elektromagnetismus.

Seite
§ 123. Magnetisches Feld eines Stromes 385
§ 124. Biot-Savarts Gesetz . 388
§ 125. Mechanische Deutung der elektromagnetischen Kräfte 389
§ 126. Potential eines elektrischen Stromes 391
§ 127. Elektromagnetische Einheiten 394
§ 128. Tangenten- und Sinusbussole 396
§ 129. Energie und Arbeit eines Stromes im magnetischen Felde. Elektromagnetische Rotation . 399
§ 130. Magnetische Kraft der Spulen. Elektromagnete 401
§ 131. Elektrodynamik. Potential zweier Ströme 404
§ 132. Energie im Felde zweier Ströme. Elektrodynamisches Grundgesetz 407
§ 133. Webers Elektrodynamometer 412

X. Volta- und Magneto-Induction.

§ 134. Grundversuche . 414
§ 135. Inductionsgesetze. Transformator 415
§ 136. Magnet- und dynamoelektrische Maschinen 421
§ 137. Elektrische Schwingungen . 423
§ 138. Maxwell-Hertz'sche Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes 425

XI. Licht.

§ 139. Elasticitätstheorie . 429
§ 140. Elektromagnetische Lichttheorie 430
§ 141. Fortpflanzung des Lichtes 433
§ 142. Grenzbedingungen. Reflexion und Brechung 434
§ 143. Brechungsexponent. Dielektricitätsconstante. Cohäsionsconstante . 437
§ 144. Ähnliche Erscheinungen in verschiedenen Gebieten der Physik . . 439
§ 145. Theorie der Doppelbrechung 441
§ 146. Die äussere conische Refraction 447
§ 147. Die innere conische Refraction 449
Register . 451

Einleitung.

A. Gegenstand und Methode der Naturlehre.

Die Gesammtheit der Dinge rings um uns her, die wir mit unseren Sinnen wahrnehmen, nennen wir Sinnenwelt oder Natur. Mit diesen Dingen steht der Mensch im innigsten Zusammenhange. Wenn auch wir bei den heutigen Lebensverhältnissen unsere Nahrungsmittel einkaufen und andere Lebensbedürfnisse auf künstliche Weise decken, so ist doch nicht zu verkennen, dass die Quellen des Lebens uns nur aus der Natur fliessen. Aus dem Thier-, Pflanzen- und Mineralreiche werden die Nahrungsmittel gewonnen, und viele Menschen vollziehen dabei gleichzeitig mancherlei nothwendige Lebensthätigkeit; auf uns alle üben Licht und Wärme der Sonne, die Farbenpracht der Blumen, das Treiben der munteren Thiere, der Duft des Waldes und der Wiesen, der Gesang der Vögel, das Rauschen des Wassers und des Windes mächtig belebende Wirkungen aus.

Als Mittel der Wahrnehmung dienen unsere Sinne, und die geweckte Empfindung vermag oft unmittelbar über die Befriedigung unserer Bedürfnisse zu entscheiden: der Geruch über die Güte der Luft, die wir athmen, der Geschmack über die Zuträglichkeit der Speisen, wenn dieselben nicht künstlich verändert sind, und das Gefühl über entsprechende Wärme und mechanische Thätigkeit.

Der Verkehr mit der Natur ist für den Menschen nothwendig, und er fand auch zu allen Zeiten statt. Nur die dabei obwaltenden Verhältnisse haben sich im Laufe der Zeit wesentlich geändert. Auf der niedrigsten Culturstufe fand nur ein unmittelbarer Verkehr statt. Mit demselben war ein roher Kampf des Menschen ums Dasein gegen Thiere und Pflanzen, gegen Wetter und Wasserwogen verbunden. Die Natur und ihre Gewalten erschienen dem Menschen als Feinde, und sie, sowie die ausserhalb des unmittelbaren Gesichtskreises liegenden Quellen zu den Erscheinungen flössten ihm Furcht und Schrecken ein.

Späterhin, als die Völker feste Wohnsitze einnahmen, vermochte die Natur an jedem einzelnen Orte der Erde nicht von selbst alle Bedürfnisse der Menschen zu decken; es musste die Lebensfürsorge ein Anstoss für die Begründung der Cultur werden, und deren Weiter-

erstreckung in räumlicher und zeitlicher Beziehung musste die Culturentwickelung mächtig fördern. Heute wird die Menge und die Auswahl der Nahrungsmittel durch Viehzucht und Ackerbau geregelt, und fehlende Lebensmittel an einem Orte werden durch Zufuhr von einem anderen herbeigeschafft; Kleidung und Wohnung bieten Schutz gegen gefährliche Thiere und gegen rauhes Wetter; die Beheizung gewährt in kalten Gegenden die Annehmlichkeiten der Wärme, das künstliche Eis ersetzt in heissen Zonen die Vortheile der natürlichen Kälte, und die Beleuchtungen nach verschiedenen Systemen erhellen die dunklen Wohnräume und die finsteren Strassen zur Nachtzeit; bei schwerer Arbeit wird die Kraft durch Maschinen und Waffen beliebig verstärkt. Die Culturentwickelung hat daher einen Ausgleich der Gegensätze in der Natur erzielt; sie hat die Natur dem Menschen dienstbar gemacht, gewissermassen ein freundschaftliches Verhältnis zwischen ihr und ihm hergestellt. Der Lebensfürsorge wird dadurch unter den heutigen complicierten Lebensbedingungen in hohem Masse genügt. — Wodurch war es nun möglich diese Entwickelungsstufe zu erreichen, auf der die erforderlichen Bedingungen für die menschliche Wohlfahrt fast zu jeder Zeit und an jedem Orte der Natur abgewonnen werden können? Dieses hohe Ziel wurde auf einem langen Weg und unter grossen Schwierigkeiten durch Erwerbung der Kenntnis der Natur erreicht.

Von den uns umgebenden Dingen nennen wir das Bleibende, das auf unsere Sinne einwirkt, Stoff, Materie oder Substanz; räumlich begrenzter Stoff heisst Körper. Von besonderer Wichtigkeit sind die Veränderungen, denen die Körper unterworfen sind: der Himmel wird trübe, es entstehen Wolken, es fällt Regen nieder und befruchtet die Erde; das Wasser läuft vom Berg ins Thal und treibt in seinem Laufe Mühlen; bei Tag werden die Körper von der Sonne erhellt, bei Nacht sind sie dunkel; Erschütterungen der Luft bringen einen Schall hervor, u. s. w. Solche Veränderungen, die wir an den Körpern wahrnehmen, heissen Erscheinungen. Mit ihnen beschäftigt sich die Naturwissenschaft im allgemeinen. Die specielle Naturlehre oder Physik beschäftigt sich nur mit jenen Erscheinungen der unorganischen Körper, bei welchen der Körper nicht dauernd oder wesentlich geändert wird; sie behandelt mechanische, Schall-, Licht-, Wärme-, magnetische und elektrische Erscheinungen. — Zur Naturwissenschaft gehören noch die Naturgeschichte, welche die Naturgegenstände ihrer Form und ihrem Inhalte nach beschreibt, die Physiologie d. i. die Naturlehre der organischen Körper und die Chemie, welche die Erscheinungen behandelt, bei denen der Körper seine innere Zusammensetzung dauernd verändert.

Viele Erscheinungen bieten sich dem Menschen in der Natur unmittelbar dar; die Kenntnis derselben wird instinctiv gewonnen.

Diese Kenntnis ist bereits von grossem Nutzen. Ein schwimmendes Holzstück, die Schale einer Frucht, eine Muschel und der Stab in der Hand führten bereits frühzeitig zur Schifffahrt und zur Anfertigung von Geräthen und Werkzeugen. Die Funde in Gräbern zeigen, dass die betreffenden Formen sehr unvollkommen und schwerfällig waren. Desungeachtet liegt in den ersten Nachahmungen der Erscheinungen der Keim für das Studium durch Versuche, durch die wir freiwillig und planmässig die Erscheinungen hervorrufen und die Bedingungen nachweisen, unter welchen sie zustande kommen. — Man nennt die wesentlichen Bedingungen die Ursache der Erscheinung und die Erscheinung selbst die Wirkung. Die Angabe der Ursache heisst die Erklärung. Da die unmittelbare Wahrnehmung und die Nachahmung einander so nahe liegen, so sollte man glauben, dass das Studium mittelst Versuchen oder Experimenten zu den ältesten Methoden gehöre. Die Entwickelungsgeschichte der Naturwissenschaft bestätigt aber die Vermuthung nicht; sie zeigt vielmehr, dass die experimentelle Methode erst in den letzten Jahrhunderten erfolgreich verwendet wurde. —

Die ältesten Naturanschauungen stehen auf mythologischem Standpunkte, indem besondere Gottheiten als Beherrscher des Lichtes, des Blitzes und Donners, des Windes, der Flüsse, des Meeres u. s. w. angesehen werden. Damit werden jene Ursachen, die nicht mehr in den Gesichtskreis des Menschen fallen, übernatürlichen Mächten zugeschrieben, und diese werden personificiert. Die Erklärung entspricht einer tiefen Betrachtung, welche — insofern sie als Grund der Erscheinungen eine jenseits des Gebietes unserer Sinneswahrnehmungen gelegene unerforschliche Ursache, eine göttliche Macht postuliert — die Grundlage der Religion in sich schliesst, in dieser wie in philosophischer Beziehung für den Menschengeist ein Bedürfnis ist und zu allen Zeiten sich als eine Notwendigkeit erwiesen hat.

Die Unvollkommenheit der mythologischen Lehren, Grenzüberschreitungen auf sinnlichem Gebiete, willkürliche und falsche Anwendungen bringen es aber mit sich, dass darnach das Verhältnis des Menschen zur Natur nicht immer vortheilhaft geregelt wird. So erzählt Seneca von den Bewohnern von Argolis, dass sie zur Beruhigung eines Hagelwetters ein Lamm oder Huhn opferten oder sich in die Finger schnitten, um Blut zu vergiessen. Nach einer Herkulessage liess der ägyptische König Busiris zur Verhütung grosser Dürre im Lande jährlich einen Fremden dem Jupiter zum Opfer schlachten. Nach der Bibel wurde noch Jonas ins Meer geworfen, um die hochgehenden Wogen zu beruhigen. Kelten, Indianer, Neger und andere Stämme brachten Menschenopfer, um herrschende Krankheiten zu beseitigen und sich vor anderen Übeln zu schützen. Die Opfer sollten die erzürnten Götter und Geister besänftigen. Auch die sogenannten

Gottesurtheile im Mittelalter (Feuer- und Wasserprobe, das Bahrrecht etc.) hatten mit der Wahrheit nichts zu thun, und es wurde damit viel Unrecht und Grausamkeit verübt. Im Gegensatze hiezu hat der Cult aber auch Naturerscheinungen dem Menschen dienstbar gemacht, wie z. B. das Feuer, das vermuthlich als Blitzstrahl vom Himmel niederfuhr und in den Tempeln (von den Vestalinen) bewahrt und erhalten wurde; es war eine Quelle reichen Segens, solange die Feuererzeugung mit grossen Schwierigkeiten verbunden war. Der Fetischbaum der Schiffe mit seinem Gottesbilde führte zur Kenntnis des Winddruckes und zur Anwendung der Segel. —

Vom Standpunkte der Sinneswahrnehmung suchten griechische Philosophen die Abhängigkeit und den Zusammenhang der Naturerscheinungen darzustellen. Thales von Milet (um 640—550 v. Chr.) erklärte — gestützt auf die Wechselbeziehungen zwischen Pflanzen- und Thierreich und auf die Wahrnehmung, dass Ägypten den Nilüberschwemmungen seine Fruchtbarkeit verdanke, — das Wasser sei das Princip aller Dinge, d. h. die Materie, aus der alles entstanden sei, und das Agens, das alle Veränderungen bewirke. Anaximenes setzte an Stelle des Wassers die Luft und Anaximander einen qualitativ unbestimmten, unendlichen Urstoff. Leukipp und Demokrit (um 380 v. Chr.) sind die Begründer der noch heute anerkannten Atomtheorie, nach welcher die Erscheinungen aus der Bewegung kleinster, im Weltraume verbreiteter Stofftheilchen erklärt werden; durch Verbinden und Trennen derselben entstehen und vergehen die Körper. Die angeführten Lehren, insbesondere die Atomtheorie sind auf dem Postulate der anschaulichen Ursächlichkeit aufgebaut.

Von dem gegensätzlichen Postulate, nämlich dem der Zweckmässigkeit gieng Aristoteles (384—322 v. Chr.) aus; er sah Feuer, Luft, Wasser und Erde als einfache Stoffe an, aus denen die Körper zusammengesetzt seien, und erklärte die Bewegungserscheinungen damit, dass jeder Körper seinen Ort suche.

Von einer aus praktischen Rücksichten geforderten, genauer bestimmten Annahme gieng nur Archimedes (287—212 v. Chr.) aus, indem er sein Hebelgesetz mittelst des Satzes ableitete: Gleich schwere Grössen, in gleicher Entfernung vom Unterstützungspunkte wirkend, sind im Gleichgewichte, und gleich schwere Grössen, in ungleichen Entfernungen wirkend, sind nicht im Gleichgewichte, sondern die in grösserer Entfernung wirkende sinkt. Das daraus gefolgerte Gesetz gibt eine unveränderliche Beziehung zwischen den Bestimmungsstücken, nämlich zwischen Belastung und Länge der Hebelarme. Die Bemühungen, die Echtheit des Metalles der Krone des Königs Hieron zu prüfen, führten Archimedes noch zu dem nach ihm benannten Gesetze über den Gewichtsverlust der Körper, die in eine Flüssigkeit getaucht werden, und Euklid (um 300 v. Chr.) ermittelte aus der Lage eines

Gegenstandes und des Auges vor einem Spiegel das Reflexionsgesetz der Lichtstrahlen.

Mit Ausschluss der letzteren richtig ermittelten Gesetze, die aus praktischen Bestrebungen hervorgiengen, waren die Lehren der griechischen Philosophen auf Annahmen oder Hypothesen gestützt, aus denen die Erscheinungen abgeleitet oder deduciert wurden. Da die Hypothesen nicht genug geprüft und die benutzten Daten nicht genau bestimmt waren, so konnten darnach auch die Erscheinungen nur unvollkommen abgeleitet und nur mangelhaft in Gedanken nachgebildet werden. Die betreffenden Lehren enthalten aber wohl die Keime, aus denen sich manche unserer heutigen Theorien, die den inneren Zusammenhang der Erscheinungen darstellen, entwickelten.

Die Grundlage zu einem exacten Studium der Naturerscheinungen legte Galilei. Seine Untersuchungen über den Fall der Körper, die er in seinem Werke „Discorsi e dimostrazioni matematiche“ (1638) mittheilte, erfolgten nach einer mustergiltigen Methode: Er gieng von einer Annahme über die Geschwindigkeit der fallenden Körper aus, zog daraus Schlussfolgerungen und prüfte diese durch Versuche; die Übereinstimmung der Schlüsse mit den Thatsachen war für die Zulässigkeit der Annahme entscheidend. Auf diese Weise stellte er das Gesetz des Falles der Körper auf. Von den mechanischen Principien gab er das Beharrungsvermögen und die Zusammensetzung gleichzeitiger Bewegungen mittelst des Parallelogrammes an.

Kepler (1571—1630) leitete aus Tycho Brahe's und aus seinen eigenen Beobachtungen die nach ihm benannten drei Gesetze der Planetenbewegungen ab; er wandte die inductive Methode an.

Newton (1643—1727) berechnete aus dem dritten Kepler'schen Gesetze über die Umlaufszeiten der Planeten und aus dem Fliehkraftgesetz sein berühmtes Gravitationsgesetz, nach welchem zwischen je zwei Körpern im Himmelsraume Kräfte wirken, die im umgekehrt quadratischen Verhältnisse mit der Entfernung abnehmen. Als Kräftemass bestimmte er, auf Galilei's Leistungen gestützt, die Beschleunigung und lehrte die Resultierende mehrerer Kräfte durch die Diagonale des Kräfteparallelogrammes auffinden.

Damit waren nun die erforderlichen Bestimmungselemente und die Grundprincipien ihrer Verbindung im Gebiete der Mechanik gegeben, und es konnte nun an eine deductive Behandlung der Mechanik, an eine mathematische Ableitung der einzelnen Erscheinungen, mit den besten Aussichten auf Erfolg geschritten werden. Eingehenderes hierüber soll im nächsten Capitel folgen. Hier soll nur noch auf die Vortheile hingewiesen werden, welche sich bei dieser Methode geltend machen. Es lassen sich die Erscheinungen rechnungsmässig genauer bestimmen, als es durch Beobachtung möglich ist, und alle jene, die

aus einem gemeinsamen Gesetze gefolgert werden können, treten in unserer Erkenntnis in innigen Zusammenhang; mit einigen wenigen Grundgesetzen beherrschen wir das weite Geltungsgebiet derselben. Die Deduction vermag auch zu völlig neuen, unbekannten Erscheinungen zu führen, die darnach durch Beobachtung aufzufinden sind. Einen solchen Triumph hat die physikalische Wissenschaft thatsächlich gefeiert, indem Leverrier (1846) aus den Störungen des Planeten Uranus mit Hilfe des Newton'schen Gravitationsgesetzes die Stellung eines unbekannten Planeten berechnete, der darnach sofort von Galle gefunden und Neptun genannt wurde. Auch in der Lehre vom Lichte und von der Elektricität sind ähnliche Erfolge zu verzeichnen./

Dasselbe hohe Ziel der wissenschaftlichen Ausbildung wie in der Mechanik wurde nicht gleichzeitig auch in den übrigen physikalischen Gebieten erreicht. Solange daselbst keine sicheren Grundlagen für die Deduction gefunden sind, hat die Forschung nur den Weg der Induction mit Hilfe der Beobachtung und der Versuche. Seit Beginn des 17. Jahrhundertes wird dieser Weg auch allgemein eingehalten und zur Auffindung sicherer Gesetze verwendet. Galilei und die Florentiner Akademie benützten eine Art Luftthermometer zur Messung der Wärmegrade; Torricelli wurde aus Anlass des Baues einer Wasserpumpe zur Kenntnis des Luftdruckes geführt und mass denselben mittelst eines Barometers (1643); Snellius fand (1620) durch Versuche das Brechungsgesetz der Lichtstrahlen; Papin liess (1690) in einem Hohlcylinder Dampf auf einen Kolben wirken, verrichtete mit diesem eine Arbeit und gab damit das Princip der Dampfmaschine; Galvani entdeckte (1789) gelegentlich seiner Versuche die Berührungselektricität, deren wissenschaftliche und technische Bedeutung Volta alsbald erkannte und durch den elektrischen Strom und seine Wirkungen zur Geltung brachte; Seebeck entdeckte (um 1820) den Elektromagnetismus (Anwendung bei Elektromotoren, beim Telegraph etc.); und Faraday wurde durch seine zielbewusste und planmässige Forschung über die Analogien der elektrischen Stromwirkungen mit der elektrostatischen Influenz zur Erzeugung der elektrischen Inductionsströme geführt (1831). Die hohe Bedeutung der letzteren Entdeckungen für die Cultur der Menschheit wird damit charakterisiert, dass man von einem Zeitalter des Dampfes und von einem Zeitalter der Elektricität spricht.

Von ausserordentlicher Wichtigkeit für die Praxis und für die Wissenschaft ist auch das Studium der Farbenzerstreuung des Lichtes. Newton hatte durch eine experimentelle analytische Methode, nämlich durch Zerlegung des weissen Lichtes mittelst eines dreiseitigen Glasprismas, und durch synthetische Versuche mittelst mehrerer Glasprismen, Linsen und Farbenkreisel die Zusammensetzung des weissen

Lichtes aus den einfachen Regenbogenfarben nachgewiesen. Die Fortsetzung der bezüglichen Forschungen, die sich auf die Zerlegung des Lichtes der verschiedenartigsten Körper bezogen, führten Bunsen und Kirchhoff (1860) zur Entdeckung der Spectralanalyse, die gestattet, durch Zerlegung des Lichtes mittelst Glasprismen die Zusammensetzung irdischer und kosmischer Körper zu erkennen.

So haben Beobachtung und Versuch in rascher Folge zu reichen Naturkenntnissen geführt. Mit der Vermehrung der Kenntnisse macht sich immer mehr das Bedürfnis geltend, die Kenntnisse nach ihrem inneren Zusammenhange zu ordnen, und es ist, wie in der Mechanik auch in vielen anderen Theilen der Naturlehre gelungen, Grundprincipien aufzustellen, nach welchen die Bestimmungselemente der Erscheinungen verbunden sind; so entwickeln Theorien des Schalles, des Lichtes, der Wärme und der Elektricität zahlreiche Erscheinungen aus Grundgesetzen deductiv. Zur Erreichung dieses Zieles haben vergleichende Untersuchungen, wie z. B. über die Wellenbewegung, über die Fortpflanzung des Schalles, des Lichtes, der strahlenden Wärme, der Elektricität u. s. w. wesentlich beigetragen.

Die vorstehende Skizze dürfte die Nothwendigkeit der Naturkenntnis darthun und die Erwerbungsweise derselben erkennen lassen. Es ist daraus auch ersichtlich, dass nicht alle Menschen jene Kenntnis, die sie brauchen, unmittelbar erwerben können, sondern dass es nothwendig ist, die Naturkenntnis in möglichst einfacher Weise mittelbar unter den Menschen zu verbreiten und sie auch den Nachkommen zu sichern. Diese Aufgabe löst die Naturlehre oder Physik nach den Mustern ihrer Begründer und Förderer. Die Naturlehre entspricht damit einer Lebensfürsorge in zeitlicher und räumlicher Beziehung, einer Forderung der Humanität im ausgedehnten Masse. Bei der heutigen fortgeschrittenen Culturentwickelung beschäftigt sich die Physik allerdings weniger mit den grossen Anwendungen ihrer Lehren, weil dieses Gebiet eine Specialwissenschaft der Technik geworden ist; ihr Studium ist aber dennoch vermöge der ihr zukommenden Gegenstände und ihrer Methode von grösster Bedeutung. Denn jede Thür, Klinke, Schlüssel, Messer, Gabel, Scheere, Wage, Uhr, alle Werkzeuge, Geräthschaften, Musikinstrumente und die menschlichen Glieder sind physikalische Apparate; die Bewegungserscheinungen auf der Erde und am Himmel, die Licht- und Wärmeerscheinungen in und ausser dem Hause, die jedem Menschen begegnen und zum Denken anregen, werden in der Physik behandelt; sie lehrt uns Schutz suchen gegen den Blitz und zwar beim Aufenthalt im Walde unter niedrigen Buchen oder Nadelbäumen und im Hause unter Blitzableitern und Blechdächern, die mit dem Erdboden in leitender Verbindung stehen; sie lehrt die Wogen des Meeres mit kleinen Mengen von Öl zu glätten und die Anpassung an die Natur in noch vielen anderen

Fällen; sie gibt die Grundlehren der Technik und somit das Verständnis für eine Hauptstütze unserer heutigen Cultur, für eine reiche Quelle von Mitteln zur Ausübung der Humanität.

Ihre Gegenstände sind aber nicht nur von praktischer Art, sondern sie sind auch zur Veredlung des inneren Menschen geeignet; hierher gehören z. B. die Astronomie, die Schall- und Gesichtswahrnehmungen; durch die Behandlung der letzteren werden die unmittelbaren Beziehungen der Natur zum Menschen und damit auch die Grundlehren der Musik und der darstellenden Kunst dargethan; es wird uns in die Grossartigkeit und Schönheit der Natur ein Einblick eröffnet.

Die Dinge der Natur sind an sich selbst gewiss geeignet, auf Herz und Geist der Menschen zu wirken; die Behandlungsweise, welche dieselben in der Physik erfahren, vermag diese Eindrücke noch sehr zu vertiefen. Durch die Beobachtung werden die Sinne geübt und geschärft; zur analytischen oder synthetischen Untersuchung der Erscheinungen, zur Auffindung der Bestimmungsstücke und deren Beziehungen zu einander sind rege Phantasie und logisches Denken mit mathematischer Strenge erforderlich. Es werden demnach sämmtliche geistigen Fähigkeiten in Anspruch genommen und entwickelt. Es wird eine sinnige Naturanschauung geweckt und die Überzeugung gefestigt, dass die Gesetze gelten müssen, dass nur diese die Ordnung erhalten. —

Wenn wir einerseits durch Fernrohre und Spectrometer sichere Kenntnis erhalten von den in unmessbarer Ferne stattfindenden Himmelserscheinungen, und andererseits bei Berührung und beim Stoss zweier in unmittelbarer Nähe befindlichen Körper vor tiefe Geheimnisse gestellt sind; wenn die ganze unermessliche Natur vor unser Auge geführt wird, und wir erkennen die Einflussnahme des Ganzen auf das Einzelne: dann empfinden wir die unendliche Grösse und Macht der Natur gegenüber unserer Kleinheit und unserem Unvermögen; wir sehen aber auch, dass uns die Natur selbst ihre Hilfe dazu bietet, in der Erkenntnis der Wahrheit immer weiter vorzudringen. Endlich legt die Physik den Grund zu einer Weltanschauung, die die Philosophie nur noch weiter führt; denn die Naturgesetze stimmen mit den Gesetzen des menschlichen Individuums und der menschlichen Gesellschaft überein. Es ist nicht bloss ein zufällig passendes Bild, wenn ein Wasserlauf auf der Erde mit dem Lebenslauf des Menschen verglichen wird; die Übereinstimmung der Erscheinungen ist in der Übereinstimmung der Gesetze begründet; es ist dasselbe Gesetz, das den Process der Bildung, des Bestehens und Vergehens eines Sonnensystemes regelt, und von dem Spencer in seinen Grundlagen der Philosophie nachgewiesen hat, dass es allen Erscheinungsformen der Natur und des menschlichen Lebens zugrunde liegt. Solche tiefgreifende Kenntnisse und Anschauungen müssen unbedingt auf das gesammte

Denken und Handeln des betreffenden Menschen von bestimmendem Einfluss sein.

Nach all dem Angeführten dürfte der Schluss berechtigt sein: das Studium der Physik gewährt sehr viele praktische Vortheile; es vermag aber auch in hohem Grade Herz und Geist zu bilden und auf die Charakterbildung massgebend mitzuwirken.

B. Das Princip der Erhaltung der Energie.

Die Naturlehre hat die Aufgabe, die Kenntnis der Naturerscheinungen zu vermitteln, und zwar durch unmittelbare Beobachtung oder auch ohne dieselbe durch Versuche oder Beschreibung, wenn räumliche und zeitliche Hindernisse eine genaue Beobachtung nicht gestatten. Es gehört zum Wesen dieser Aufgabe, in möglichst einfacher und leichter Weise das Ziel zu erreichen. Der Forderung wird nach dem Stande der Wissenschaft mehr oder minder vollkommen entsprochen, der wissenschaftliche Fortschritt führt die Lösung immer mehr der Vollkommenheit zu.

Die Art und Weise, wie die Naturlehre ihre Aufgabe zu lösen sucht, zeigt ihre historische Entwickelung. Galilei sucht z. B. beim Fall der Körper die räumlichen und zeitlichen Grössen auf, ermittelt ihre Beziehungen und findet die Gesetze des freien Falles, der Bewegung auf der schiefen Ebene und der Pendelbewegung. Die gefundenen Gesetze können nun in allen Fällen, in welchen die entsprechenden Bestimmungsstücke ebenfalls vorhanden sind, unmittelbar angewendet werden und zur genauen Kenntnis der Erscheinungen dienen; so kann das Schwingungsgesetz des Pendels zur rechnungsmässigen Behandlung aller Erscheinungen (der Elasticität, des Schalles, des Lichtes u. s. w.) benützt werden, die sich auf eine schwingende Bewegung zurückführen lassen. Über die Anwendbarkeit des Gesetzes entscheidet der Versuch, eventuell die unmittelbare Beobachtung in der Natur; zu diesem Zwecke werden manchmal die Bedingungen und immer die Resultate der Rechnung strenge geprüft.

Die Naturlehre sucht also Naturgesetze und stellt deren Anwendungen dar. Je grösser das Geltungsgebiet eines solchen Gesetzes ist, desto grösser ist seine Bedeutung für die Naturlehre. Nach dem heutigen Stande der Wissenschaft ist das bedeutungsvollste Gesetz „das Princip der Erhaltung der Energie“; es hat sich in allen Erscheinungsgebieten als anwendbar erwiesen, und keine der genau bekannten Erscheinungen widerspricht demselben. Es verdient deshalb auch in der Naturlehre besondere Berücksichtigung. Folgende Skizze soll eine Übersicht über die Entwickelung desselben geben[1]).

1) Vgl. hiezu die Schriften über das Energieprincip von E. Mach, Weyrauch, Planck, Helm.

Die grundlegenden Betrachtungen beziehen sich auf bestehende Verhältnisse bei einfachen Maschinen. Diesbezüglich hat bereits Aristoteles die Beobachtung gemacht, dass bei der Drehung eines Hebels im Gleichgewichtszustande das grössere Gewicht an dem kürzeren Hebelarme den kleineren Weg und das kleinere Gewicht an dem längeren Hebelarme den grösseren Weg beschreibt. Die allgemeine Bedeutung dieser Wahrnehmung wurde aber weder von ihm selbst, noch von seinen Nachfolgern erkannt, und die Beobachtung hat somit zur Begründung des genannten Principes nichts beigetragen. Erst nachdem Stevin (1548—1620) bei einem Rollensysteme und Galilei bei der Untersuchung des Gleichgewichtes auf der schiefen Ebene durch Messung gefunden hatten, dass die im Gleichgewichte befindlichen Gewichte bei einer Verschiebung Fallhöhen zurücklegen, die im umgekehrten Verhältnis der betreffenden Gewichte stehen, oder dass die algebraische Summe der Producte aus Gewicht und Fallhöhe gleich Null ist, erkannte Joh. Bernoulli die allgemeine Giltigkeit dieses Gesetzes und sprach es (1717) in einem Briefe an Varignon als „das Princip der virtuellen (möglichen) Bewegungen“ aus. Das Product aus Gewicht (Druck oder Zug) in den entsprechenden Weg wurde virtuelles Moment genannt. Nach Coriolis und Poncelet gebraucht man heute dafür den Namen Arbeit. Mit Benützung dieses Ausdruckes heisst das Princip: Im Gleichgewichtszustand ist die Summe der bei einer virtuellen (möglichen) Bewegung geleisteten Arbeiten gleich Null. Der Satz drückt bereits das Princip der Erhaltung der Energie in seiner Anwendung auf Gleichgewichtszustände aus. Lagrange (1736—1813) hat das Princip der virtuellen Bewegung in seiner analytischen Mechanik der gesammten Lehre vom Gleichgewichte der Körper zugrunde gelegt und daraus die hierher gehörigen Erscheinungen abgeleitet.

Wenn eine Arbeitsleistung einen Körper in Bewegung setzt, wenn z. B. ein Körper infolge der Schwere auf einer schiefen Ebene sich herabbewegt oder frei fällt, so wird er leistungsfähig; er vermag dann infolge seines Bewegungszustandes ein Hindernis zu überwinden, selbst Arbeit zu verrichten. Ebenso vermag ein nach aufwärts in Bewegung befindlicher Körper sein eigenes Gewicht empor zu heben. Diese Leistungsfähigkeit eines bewegten Körpers heisst nach Leibnitz (1686) lebendige Kraft, nach Thomson kinetische Energie oder auch Energie der Bewegung. Mit Hilfe der Bewegungsgesetze von Galilei und des Newton'schen Masses der „Kraft“ durch die Beschleunigung lässt sich nachweisen, dass die zur Bewegung eines Körpers aufgewandte Arbeit stets gleich ist der Zunahme seiner lebendigen Kraft, und dass umgekehrt jeder Verlust an lebendiger Kraft gleich ist der vom Körper geleisteten Arbeit. Dieser Satz von der Äquivalenz der Arbeit und lebendigen Kraft heisst kurz der Satz

der lebendigen Kräfte. Derselbe wurde zuerst von Huygens (1629—1695) zur Ableitung des Gesetzes des physischen Pendels verwendet, ohne aber die eben angegebenen Ausdrücke zu gebrauchen. Joh. Bernoulli entwickelte daraus die Stossgesetze elastischer Kugeln und Daniel Bernoulli (1700—1782) die Bewegungsgesetze der Flüssigkeiten. In etwas geänderter Form hat es Lagrange als D'Alembert'sches Princip der Dynamik fester, flüssiger und gasförmiger Körper zugrunde gelegt.

Der Satz der lebendigen Kräfte führt leicht zum Principe der Erhaltung der Energie in der Mechanik. Es braucht nur bemerkt zu werden, dass nicht bloss bewegte Körper infolge ihrer Geschwindigkeit, sondern auch ruhende Körper, z. B. gehobene Gewichte leistungsfähig sind; denn entzieht man diesen ihre Unterlage, so fallen sie zu Boden und leisten gleichzeitig eine Arbeit. Diese Arbeitsfähigkeit ruhender Körper nennt Helmholtz Spannkraft (1847) und Rankine (1853) potentielle Energie; sie heisst auch Energie der Lage. Je tiefer der Körper fällt, desto mehr nimmt die potentielle Energie ab, aber desto mehr wächst die kinetische Energie. Wenn nun die erstere durch die Arbeit gemessen wird, so ist mathematisch leicht zu zeigen, dass die Summe der potentiellen und kinetischen Energien stets constant ist; und dieses Gesetz ist das Princip von der Erhaltung der Energie.

Dasselbe gestattet nun, alle Bewegungserscheinungen der festen, flüssigen und gasförmigen Körper als Umwandlungen der potentiellen Energie in kinetische oder umgekehrt zu betrachten: Beim Fallen und Steigen des Pendels wechseln diese Verwandlungen ab; wenn Wasser von den Bergen abläuft, wird potentielle Energie in kinetische verwandelt, vermöge welcher die Wassermasse Wasserräder und Turbinen zu treiben imstande ist; die Spannkraft oder potentielle Energie der Pulvergase wird in die lebendige Kraft oder kinetische Energie des Geschosses und diese wieder in die Energie, welche der Demolierungsarbeit entspricht, verwandelt u. s. w. Bei allen Erscheinungen bleibt jedoch die gesammte Energie constant, es geht weder Energie verloren, noch wird neue erzeugt.

Das Princip schliesst den Satz der lebendigen Kräfte und im Gleichgewichtsfalle auch das Princip der virtuellen Bewegungen in sich ein.

Das Energieprincip fasst nach seiner Ableitung aus den Galilei'schen Bewegungsgesetzen und dem Newton'schen Kraftmasse auch nur diese Gesetze passend und leicht anwendbar zusammen, und sein Geltungsgebiet reicht nur so weit als das dieser Grundgesetze. Ausser diesen Gesetzen bedarf die Mechanik auch noch das von den genannten Begründern herrührende Princip der Zusammensetzung und Zerlegung gleichzeitiger Bewegungen und der Kräfte. Erst damit lässt sich der Verlauf der Erscheinungen bestimmen,

wenn die vorhandenen Bewegungsbedingungen bekannt sind. Die letzteren Principien müssen auch dem Energiegesetze hinzugefügt werden, wenn dasselbe zum allgemeinen Gebrauche geeignet sein soll. Eine genauere Betrachtung zeigt nun, dass die betreffenden Principien mit einander in inniger Beziehung stehen, dass man nur, um der Forderung der Vereinigung zu entsprechen, das Energieprincip in der angegebenen Fassung ebenso wie auf einzelne Kräfte und Richtungen auch auf Massen- und Kräftesysteme anzuwenden und die Gesammtarbeit oder -Energie der Summe der Arbeiten der einzelnen Kräfte gleich zu setzen hat. — Die gegenseitige Beziehung ist darin begründet, dass die Änderung der kinetischen oder potentiellen Energie bei der Bewegung längs der Wegeinheit der Newton'schen Kraft entspricht, und dass die Summe aller betreffenden Energieänderungen in der Wegrichtung gleich ist der resultierenden Energieänderung oder gleich der der resultierenden Kraft entsprechenden Energieänderung. Der Zerlegung der Kräfte entspricht die Zerlegung einer Arbeit oder Energieänderung in mehrere passende Summanden. —

Eine andere Form für die Zusammenfassung der angegebenen Principien lässt sich durch den Nachweis gewinnen, dass die resultierende Energieänderung das Maximum der unter gegebenen Bedingungen auf einer bestimmten Weglänge überhaupt möglichen Energieänderungen ist. Daraus folgt nämlich, dass die Erscheinungen in der Richtung des stärksten Energiefalles verlaufen. W. Ostwald spricht den Satz folgendermassen aus: Von allen möglichen Energieumwandlungen wird diejenige eintreten, welche in gegebener Zeit den grösstmöglichen Umsatz ergibt[1]).

Erläuternde Beispiele sind der Abfluss des Wassers von einem Berge und die Wurfbewegung. In beiden Fällen sind es zwei Componenten, welche die resultierende Bewegung hervorbringen, nämlich im ersten Falle die Schwere des Körpers und der elastische Widerstand der schiefen Fläche (bei Vernachlässigung der Reibung), und im zweiten Falle die Schwere des Körpers und die Fliehkraft der Wurfbewegung. Die resultierenden Kräfte leisten die grösstmöglichen Arbeiten; denn unter allen möglichen Bewegungen erfolgt jedesmal die in der steilsten Richtung nach abwärts, bei welcher die rascheste Umwandlung der potentiellen Energie in kinetische stattfindet. — Beide Beispiele sind auch geeignet, zu zeigen, dass die eingeschlagenen Bahnen unter möglichst geringem Widerstand oder Zwang erfolgen, indem sie sich der verticalen Richtung der Schwere möglichst nähern (Gauss' Princip des kleinsten Zwanges), und dass sie auch eine möglichst geringe Krümmung besitzen, also möglichst gerade sind (Princip

1) W. Ostwald: Lehrb. d. allg. Chemie. II. 1. Chemische Energie S. 37.

von Hertz — beim Wurf zu erweisen aus der Beziehung der lebendigen Kraft, die einem Maximum zustrebt, zur Fliehkraft, die als Widerstand möglichst gering ist).

Ausser den hiermit angedeuteten Gesetzen hat noch ein weiter reichendes in der Newton'schen Kräftezusammensetzung seinen Grund, nämlich das Intensitätsgesetz von G. Helm[1]). Die Intensität nach Helm ist ein Factor der Energie; in der Mechanik wird sie durch die Kraft dargestellt. Daher ist ersichtlich, dass die Bewegung stets im Sinne der grössten Intensität erfolgen muss, und dass Gleichgewicht herrscht, wenn zwei gleiche Intensitäten einander entgegenwirken. Das Gesetz lässt sich auf die übrigen physikalischen Gebiete ausdehnen und ist von grosser Fruchtbarkeit.

Das Energieprincip ist nicht bloss für die Mechanik von grosser Bedeutung. Versuche haben gezeigt, dass gleichwie zwischen schweren Massen und der Erde auch zwischen sogenannten magnetischen und elektrischen Massen Wechselwirkungen bestehen; insbesondere hat Coulomb (1785) mittelst der Drehwage nachgewiesen, dass die bezüglichen Anziehungen und Abstossungen im umgekehrt quadratischen Verhältnis zur Entfernung der wirkenden Massen stehen, dass also die Form des Newton'schen Gravitationsgesetzes auch hier Geltung hat. Die in der Mechanik gebräuchliche Behandlung der Kräfte ist deshalb auch auf die Gebiete des Magnetismus, der Elektricität und der Molecularphysik zu übertragen, und das Energieprincip findet auch hier seine Anwendung. Thatsächlich lassen sich z. B. die Vertheilung der Elektricität auf der Oberfläche von Conductoren und die Gestalt der Flüssigkeitsoberflächen im freien Zustande und in Gefässen damit erklären, dass die betreffenden potentiellen Energien den kleinstmöglichen Wert haben; und bevor die Gleichgewichtszustände erreicht sind, verlaufen die elektrischen und die Flüssigkeitsströmungen in der Richtung des grössten Energiegefälles. Von diesem Gesichtspunkte wirkender Centralkräfte hat H. v. Helmholtz (1847) das Energieprincip in seiner allgemeinen Bedeutung ausgesprochen und bei den Anwendungen desselben auch Wärme-, chemische, und elektromagnetische Erscheinungen in Betracht gezogen[2]).

Aber schon vorher, nämlich im Jahre 1842, hatte R. Mayer[3]) von einem allgemeineren Standpunkte das Princip der Erhaltung der Energie erkannt und dessen Bedeutung für alle Naturerscheinungen ausgesprochen. Seine wichtigste Leistung ist die zahlenmässige Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalentes, das er aus

1) G. Helm: Die Lehre von der Energie.

2) H. v. Helmholtz: Über die Erhaltung der Kraft. Siehe auch Ostwald's Classiker d. exacten Wiss.

3) R. Mayer: Die Mechanik der Wärme. Herausgegeb. v. Weyrauch.

der Arbeit zur Zusammendrückung eines Gases und aus der dabei entwickelten Wärme ermittelte; er selbst erklärte die betreffende Zahl für wertvoller, als eine ganze Bibliothek voll wohlklingender Hypothesen. — Nach Mayer berechnete Joule (1843) das mechanische Wärmeäquivalent, indem er durch mechanische Arbeit mittelst einer dynamoelektrischen Maschine einen elektrischen Strom erzeugte, durch diesen Wärme entwickelte und das Verhältnis der Arbeit zur Wärme aufstellte. Joule bestimmte auch die Wärme im elektrischen Stromkreise als einen Theil der chemischen Verbrennungswärme im galvanischen Elemente.

Damit wurde nun ziffermässig dargethan, dass nicht bloss in der Mechanik, sondern auch in allen anderen physikalischen Gebieten die Erscheinungen als Energieverwandlungen zu betrachten sind, dass die Wärme des Dampfes in die Arbeit der Maschine, die Arbeit einer elektrischen Maschine in elektrische Energie, Licht und Wärme verwandelt wird. Energie wird dabei weder vernichtet, noch neu erzeugt; darauf gestützt spricht Clausius (1865) den Satz aus: Die Energie des Weltalls ist constant.

Das Energieprincip vermag nun infolge seiner in vielen Gebieten verbürgten Giltigkeit der Naturlehre die grössten Dienste zu leisten; es vermag jedoch allein noch keine Erklärung der mannigfachen Erscheinungen zu geben. Denn es fasst ja nur die Bestimmungsstücke der Erscheinungen gesetzlich zusammen; es vermittelt aber im allgemeinen die Erscheinungselemente nicht, wenn es auch oft auf das Vorhandensein einzelner schliessen lässt und aus bekannten einzelne unbekannte Elemente zu bestimmen ermöglicht. Die Bestimmungsstücke der Erscheinungen, die Bewegungsbedingungen u. s. w. müssen im allgemeinen gegeben sein. Das Energieprincip hat sich aus dem Studium der Erscheinungen bei bekannten Maschinen entwickelt, und es ist gleichwie hier, auch sonst auf Naturvorgänge in bestimmter Weise nur anwendbar, wenn deren Bestandtheile und die Beziehungen zum Energieprincipe bekannt sind. Die Forderung, die somit als Bedingung für die Anwendung des Energieprincips an die Naturlehre gestellt wird, fällt mit der Forderung einer anschaulichen Naturerklärung überhaupt zusammen. Derselben wurde zu allen Zeiten Rechnung getragen; immer hat man die verschiedenen Naturerscheinungen auf bekannte einfache Thatsachen zurückzuführen gesucht. Mit Rücksicht auf die grosse Bedeutung dieser Erklärungsversuche auch für das Energieprincip soll auf die wichtigsten derselben kurz hingewiesen werden.

Wie im vorhergehenden Capitel bemerkt wurde, suchten bereits die griechischen Philosophen vor $2^1/_2$ Jahrtausenden das Princip aller Dinge in Stoffen, die mit besonderen Eigenschaften begabt seien und den Raum ausfüllen. Unseren heutigen Anschauungen am nächsten

kommen Demokrit (um 400 v. Chr.) und Epikur (342—270 v. Chr.) mit ihren Atomtheorien, nach welchen unendlich viele kleinste Körperchen in dem leeren Weltraume verbreitet seien, die bei ihren Bewegungen an einander prallen und durch Wirbel sich zu Körpern zusammen ballen; die Wirbel seien der Anfang der Weltbildung. Gestützt auf diese Hypothese erklärte Lucretius (96—55 v. Chr.) die Wirkung des Magnetes durch ein Ausströmen von Atomen, das ringsum einen luftleeren Raum erzeuge, in welchen das Eisen hinein stürze. Cabeo (1639) stellte eine ähnliche Theorie für die Elektricität auf. Descartes (1596—1650) legte den Grund zu einer Ätherhypothese; er lehrte, es gebe keinen leeren Raum und keine Atome; doch nimmt auch er an, dass der „Himmelsstoff" aus kleinen Kügelchen bestehe, welche Wirbelbewegungen in der Grösse der Planetenbahnen und auch fortschreitende Bewegungen ausführen; die Kügelchen des Himmelsstoffes vermögen die Körper zu Bewegungen anzuregen. Jakob und Joh. Bernoulli und Euler verbesserten die Äthertheorie, indem sie dieselbe den Erscheinungen besser anpassten. Der letztere suchte (1762) die Anziehung zweier Körper im Himmelsraum aus dem Druck und der Bewegung des Äthers abzuleiten. Er nimmt dabei an, dass die Körper in ihrer Nähe die Elasticität des Äthers verändern. Der elektrische Zustand entstehe durch eine Pressung oder Verdünnung des Äthers in den betreffenden Körpern; rings um solche Körper bilde sich durch Veränderung der Luft eine elektrische Atmosphäre. Auch Magnetismus, Licht und Wärme werden auf Wirkungen des Äthers zurückgeführt. Huygens begründete die im wesentlichen noch heute giltige Wellentheorie des Lichtes (1690).

Mit Ausnahme der letztgenannten Lichttheorie, die nach einer mustergiltigen Methode aufgestellt wurde, erscheinen die bis zu Beginn des gegenwärtigen Jahrhundertes angegebenen Äthertheorien nur in unbestimmten Formen. Dem gegenüber stellt das auf exacte Weise gewonnene Newton'sche Gravitationsgesetz für die Naturlehre eine ausserordentliche Errungenschaft dar; ist es ja doch nicht bloss geeignet, als Grundlage zu correcten Deductionen in der Mechanik zu dienen, sondern auch in der Lehre des Magnetismus, der Elektricität und im erweiterten Sinne in der Molecularphysik, nachdem man als Träger der erstgenannten Kräfte unwägbare Stoffe, die Imponderabilien, angenommen hat. Newton erklärte, er habe nicht dahin gelangen können, aus den Erscheinungen den Grund der Eigenschaft der Schwere abzuleiten, und Hypothesen erdenke er nicht; in seiner Optik führt er sogar ausdrücklich die Verschiedenheit in der Ätherdichte als Ursache der Gravitation an. Dennoch erklärten Roger Cotes und die anderen Schüler Newton's die unmittelbare Fernewirkung als eine wesentliche Eigenschaft der Masse. Die genannten Vertreter der Äthertheorie machten gegen diese neue, unbegreifliche Eigen-

schaft der Materie gewichtige Gründe geltend, dennoch gelangte sie zu allgemeiner Annahme; sie ist noch heute in den Lehrbüchern der Physik in ausgedehnter Verwendung. Nur die Wärme wird nebst dem Lichte durch einen Bewegungszustand erklärt, nachdem Melloni (1798—1854) nachgewiesen hat, dass die Wärmestrahlen denselben Gesetzen folgen wie die Lichtstrahlen, und nachdem Rumford, Davy u. a. qualitativ und Robert Mayer quantitativ die Äquivalenz von Arbeit und Wärme nachgewiesen haben.

In Bezug auf die dynamische Massenwirkung in die Ferne konnte nur durch eine genauere Kenntnis der thatsächlichen Verhältnisse eine Entscheidung getroffen werden; diese Kenntnis wurde durch die Forschungen Faraday's (1791—1867) über das elektrische und magnetische Kraftfeld gewonnen[1]). Er zeigte, dass die inducierende Kraft eines elektrischen Conductors durch eine Metallplatte aufgehalten wird, dass sie sich aber um den Rand in krummen Linien fortpflanzt, dass also keine unmittelbare Fernewirkung stattfindet. Er bewies, dass die elektrische Ladungsarbeit eines Condensators in dem isolierenden Zwischenmittel aufgespeichert ist, und dass die Länge, Form und Farbe des elektrischen Funkens von dem Raummittel abhängen. So stellte er fest, dass sich die Kraft im ganzen Raume ausbreitet; ihre Richtung wird von den Kraftlinien bestimmt, für welche die bekannte Figur der Eisenfeilspäne in der Nähe der Magnetpole ein anschauliches Beispiel liefert. Normal zu den Kraftlinien stehen die Niveauflächen oder die Flächen gleicher Arbeit. Die Richtigkeit dieser Auffassung, die Faraday auch auf das Feld des elektrischen Stromes übertrug, fand durch die Entdeckung der Inductionsströme eine glänzende Bestätigung. Sie führte noch zu den weiteren Nachweisen, dass alle Körper zwischen den Polen eines kräftigen Magnetes magnetisches Verhalten zeigen, und dass das magnetische Feld nicht nur auf elektrische Ströme, sondern auch auf das Licht wirkt, dessen Polarisationsebene es zu drehen vermag. Sie führte nach den aufgedeckten Beziehungen zwischen Elektricität, Magnetismus, Licht und Wärme zu dem Satze: Alle Naturkräfte sind umwandelbar und im Grunde nur Formen einer einzigen Kraft.

Faraday's Lehre vom Kraftfelde gestattet bereits mit Hilfe der Kraftlinien und Niveauflächen eine zahlenmässige Bestimmung vieler Erscheinungen. Maxwell hat dieselbe noch genauer mathematisch formuliert und durch mechanische Principien begründet[2]). Darnach werden die Kräfte auf die Wirkungen eines Raummittels (des Äthers) zurück-

1) Michael Faraday: Experimental-Untersuchungen über Elektricität. Deutsch von Kalischer.

2) J. M. Maxwell: Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Deutsch von B. Weinstein.

Ferner Werke über Maxwell's Theorie von L. Boltzmann, Föppl u. a.

geführt, das sich in einem Zwangszustande befindet. Dieser Zustand wird durch eine „elektrische Verschiebung“ hervorgebracht gedacht. Durch die aufgespeicherte Verschiebungsarbeit im Felde entsteht die potentielle Energie.

Mit diesen Feststellungen sind auch die Beziehungen zwischen Elektricität, Magnetismus und Licht gegeben, die sich als Kräfte des Äthers äussern. Maxwell entwickelte in der That eine elektromagnetische Lichttheorie, und diese wurde in neuester Zeit durch die berühmten Versuche von Heinrich Hertz über die Ausbreitung der elektrischen Kraft und über die elektrischen Schwingungen auf das vollkommenste bestätigt[1]).

Ebenso wenig wie die Wirkung eines leuchtenden Körpers lassen sich die neu entdeckten Erscheinungen im elektrischen und magnetischen Kraftfelde durch unmittelbare Fernewirkung erklären. Wie jene, so fordern auch diese, dass einem Raummedium, dem Äther, eine Rolle zugestanden werde. Mit der Ausbildung der bezüglichen Lehren sind gegenwärtig die hervorragendsten Forscher beschäftigt, und die erzielten Erfolge sind schon jetzt für die Wissenschaft und für die Praxis von grösster Bedeutung.

Nach der so begründeten Annahme eines allgemein verbreiteten Raummittels kann die potentielle Energie der sogenannten fernwirkenden Kräfte aus dem Bewegungszustande dieses Mediums, d. h. als kinetische Energie des Äthers, erklärt werden; es besteht kein wesentlicher Unterschied mehr zwischen potentieller und kinetischer Energie, und die Energielehre gewinnt im mechanischen Sinne ausserordentlich an Anschaulichkeit: die Erscheinungen lassen sich als Energietransport zwischen dem Raumäther und den Körpern auffassen.

Dass die Energie des Äthers in den verschiedenen physikalischen Kraftfeldern mechanischer Natur sei, ist eine Hypothese, die sich aus dem zuerst bis zu einem gewissen Grade der Vollkommenheit ausgebildeten Studium der mechanischen Erscheinungen entwickelt hat; man suchte die übrigen Erscheinungen auf bekannte Vorstellungen zurückzuführen und umgekehrt aus mechanischen Principien sämmtliche Erscheinungen zu erklären, in Gedanken nachzubilden. Die Hypothese liefert mindestens sehr passende Vergleiche, sie ermöglicht eine einheitliche, übersichtliche Naturauffassung und leistet der Naturforschung die besten Dienste.

Man kann sich von derselben aber auch unabhängig stellen, die verschiedenen physikalischen Energieformen als wesentlich unbestimmt betrachten und doch weitgehenden Forderungen der Naturlehre ent-

1) H. Hertz: Untersuchungen über die Ausbreitung d. elektr. Kraft. Gesammelte Werke. Bd. II.

sprechen. Wenn mechanische Arbeit und elektrische Energie in eine äquivalente Menge Wärme verwandelt werden können, so folgt wohl die Gleichwertigkeit der verschiedenen Energien, aber nicht ihre Wesensgleichheit. Der Begründer des Energieprincipes R. Mayer äussert sogar ausdrücklich: „dass, um Wärme werden zu können, die Bewegung aufhören muss, Bewegung zu sein". Dieser Standpunkt wird auch in neuester Zeit von Ostwald u. a. Forschern eingenommen. Dabei erleidet das Energieprincip keine Einschränkung; im Gegentheil, es gewinnt erhöhte Bedeutung. Denn die Werte für die in einander umwandelbaren physikalischen Energien sind immer einander gleich; durch die Erhaltung der Energie werden alle Erscheinungsgebiete innig verknüpft; die verschiedenen Energiewerte zeigen auch übereinstimmende mathematische Formen und gestatten analoge Anwendungen ohne irgend welche beschränkende Annahmen. Wie bei einer Fläche immer zwei Dimensionen unterschieden werden, so sind auch bei den meisten Energiewerten zwei Bestimmungsstücke, zwei Factoren zu unterscheiden: bei mechanischer Arbeit Kraft und Weg, bei der Wärme: specifische Wärme (Capacität) und Wärmegrad (Temperatur), bei der elektrischen Energie: Elektricitätsmenge und Elektricitätsgrad (Potential) u. s. w. Einer der beiden Factoren ist stets für den Eintritt einer Erscheinung oder für das Gleichgewicht entscheidend; G. Helm nennt ihn den Intensitätsfactor und spricht den Satz aus: „Jede Energieform hat das Bestreben, von Stellen, an welchen sie in höherer Intensität vorhanden ist, zu Stellen niederer Intensität überzugehen." Der Satz entspricht dem mechanischen Satz über die Kräftezusammensetzung, nach welchem die Bewegung stets in der Richtung der stärkeren Kraft erfolgt und Gleichgewicht dann eintritt, wenn entgegengesetzt wirkende Kräfte einander gleich sind. Der Übergang der Wärme erfolgt vom höheren zum niederen Wärmegrad und jener der Elektricität vom höheren zum niederen Elektricitätsgrad. Mechanische Kraft, Wärme- und Elektricitätsgrad sind die Intensitätsfactoren der betreffenden Energien. Den zweiten Factor der Energie nennt Helm Extensität oder Wirkungsraum.

Auch die Berechnung der in einem Energiefelde aufgespeicherten Arbeit ist durchführbar mit Hilfe der aus Versuchen festgestellten speciellen Gesetze für die betreffenden Erscheinungsgebiete und ohne eine mechanische Hypothese. Man erhält als Wert für die potentielle Energie stets ein Product aus den eben angedeuteten zwei Factoren. Diese Berechnungsart soll in den folgenden Ausführungen in begründeter Weise zur Anwendung kommen.

Bei dieser allgemeinen, von einer mechanischen Hypothese unabhängigen Auffassung wird somit doch die Analogie der verschiedenen physikalischen Probleme mit jenen der Mechanik gewahrt, und die

Erklärungen können noch immer von einem einheitlichen Gesichtspunkte erfolgen, und zu dieser Behandlungsweise ist das Princip der Erhaltung der Energie das wichtigste Mittel.

Dass das Energieprincip über das Gebiet dieser Analogien noch hinausreicht, mag hier nur kurz bemerkt werden; die folgende Behandlung der physikalischen Lehren wird es deutlich darthun.

Das Energieprincip leistet daher der Naturlehre die grössten Dienste. Seine historische Entwickelung folgt stets der Aufstellung der Grundgesetze in den verschiedenen physikalischen Gebieten unmittelbar nach, und es ermöglicht bereits für einen grossen Theil der Naturlehre eine Behandlung, wie sie von Robert Mayer (1845) mit folgenden Worten gefordert wurde: „Es gibt in Wahrheit nur eine einzige Kraft (Energie). In ewigem Wechsel kreist dieselbe in der todten wie in der lebendigen Natur. Die Kraft (Energie) in ihren verschiedenen Formen kennen zu lernen, die Bedingungen ihrer Metamorphose zu erforschen, das ist die Aufgabe der Physik.“

I. Bewegung der festen Körper.

§ 1. **Gleichförmige Bewegung.** Ein Bote, ein Pferd, ein Fahrzeug bewegen sich gleichförmig, wenn sie in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegen. Ihre Geschwindigkeit wird durch den Weg in der Zeiteinheit gemessen. Darnach besteht zwischen Weg L, Zeit T und Geschwindigkeit v das Gesetz

$$L = v \cdot T.$$

Zur Messung des Weges wird zu wissenschaftlichen Zwecken gewöhnlich ein Centimeter (L), in der Technik ein Meter (m), zur Messung der Zeit eine Secunde (T) beziehungsweise Minute (min.) oder Stunde (h) benützt. Mit den Masseinheiten L und T lässt sich die Geschwindigkeit v in der Form $[L \cdot T^{-1}]$ darstellen; man nennt diesen Ausdruck die Dimension der Geschwindigkeit im absoluten Masssysteme.

Aus einem verschwindend kleinen Zeittheilchen dT und dem Wegelemente dL ergibt sich die Geschwindigkeit $v = dL/dT$.

Aufg. 1. Wie gross ist die Geschwindigkeit einer Brieftaube, wenn dieselbe 525 km in 5 Stunden zurücklegt? — (29·17 m.) **2.** Wie gross ist die Umlaufsgeschwindigkeit des Schwungrades einer Dampfmaschine, wenn es bei 5 m Durchmesser 30 Umläufe in der Minute macht? — (7·854 m.) **3.** Wie weit ist eine Kanone entfernt, wenn man das Abfeuern derselben 18 Secunden früher sieht als hört? Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ist 333 m. — (5994 m.) **4.** In welcher Zeit würde ein Eisenbahnzug mit 15 m und eine Schnellpost mit 3·2 m Geschwindigkeit den Weg um die Erde von 5400 geogr. Meilen à 7420·44 m zurücklegen? — (30 Tg. 22 Std. und 144 Tg. 22 Std.) **5.** Wie gross ist die Drehungsgeschwindigkeit der Erde am Äquator, wie gross unter der Breite von 53^0? — (464 m am Äquator. 464 cos 53.) **6.** Wie gross sind die Umlaufsgeschwindigkeiten der Erde und des Jupiter, wenn man ihre Bahnen als kreisförmig ansieht und die Halbmesser derselben zu 20 140 000 Meilen und zu 104 Millionen Meilen gerechnet werden? Umlaufszeit des Jupiter = 11·87 Jahre. — (4·1 Ml. und 1·75 Ml.) (Dr. Müller-Erzbach.)

§ 2. **Freier Fall. Galilei's Gesetze** (1602). Die Körper über der Erdoberfläche zeigen ein sehr verschiedenes Verhalten, wenn sie sich frei überlassen werden: die meisten fallen zur Erde, manche steigen in der Luft empor, viele schwimmen auf dem Wasser. Bis zu Galilei wurde dieses Verhalten von den Aristotelikern durch die Annahme

erklärt, dass jedes Ding seinen Ort suche; der Ort schwerer Körper sei unten, der leichter oben. Die Bewegung infolge dieses Strebens wurde natürliche Bewegung genannt; jede andere Bewegung, wie z. B. die Wurfbewegung hiess gewaltsame. Aus den Annahmen wurde gefolgert, dass schwerere Körper rascher, leichtere langsamer fallen. Was müsste darnach geschehen, wenn man zwei gleich schwere Körper mit einander verbände und sie fallen liesse? Der Schluss, dass sie schneller fallen müssten, wird von den ausgeführten Versuchen nicht bestätigt. Hierdurch, sowie durch die Überzeugung, dass das Mittel (Luft oder Wasser) auf die Bewegung einen Einfluss nimmt, veranlasst, sucht Galilei durch Rechnung und directe Messung die Beziehungen zwischen Weg, Zeit und Geschwindigkeit.

Körper, die den Luftwiderstand leicht überwinden, fallen ungefähr gleich schnell zur Erde; dabei wächst ihre Geschwindigkeit augenscheinlich. Galilei macht die Annahme, dass die Geschwindigkeit proportional mit der Zeit wachse, und gelangt zu Ergebnissen, die durch den Versuch als richtig bestätigt werden. Die Geschwindigkeitszunahme in der Zeiteinheit heisst Beschleunigung oder Acceleration (A). Somit ist die Geschwindigkeit nach t Secunden

$$v = A \cdot t.$$

Ein Wegelement ist

$$dL = v \cdot dt = A \cdot t \cdot dt$$

und der ganze Weg[1])

$$L = \frac{1}{2} A \cdot t^2.$$

Die Werte für v und L geben vollständig die Gesetze für den freien Fall. Die Beschleunigung A wird als unveränderlich vorausgesetzt, und die Bewegung heisst deshalb gleichförmig beschleunigt.

Aus dem Weggesetz folgt demnach: 1) Die Fallräume verhalten sich wie die Quadrate der Fallzeiten. Und durch Subtraction der Wege in zwei aufeinander folgenden Secunden erhält man: 2) die Wege in den aufeinander folgenden Secunden verhalten sich wie die ungeraden Zahlen.

Die Richtigkeit dieser Gesetze lässt sich mittelst der Galilei'schen Fallrinne und mittelst der Atwood'schen Fallmaschine (1781) leicht

1) Die hier auszuführende Summierung $\int t \cdot dt$ gestaltet sich leicht elementar, wenn man setzt $t = \frac{1}{2}(t_n + t_{n+1})$ und $dt = (t_{n+1} - t_n)$. Man erhält

$$\sum \frac{1}{2}\left(t_{n+1}^2 - t_n^2\right) = \frac{1}{2} t^2.$$

Nimmt man die Wege in den auf einander folgenden Secunden als gegeben an, so lässt sich L als Summe einer arithmetischen Progression ermitteln, und daraus erhält man $v = \varDelta L / \varDelta t$ und $A = v/t$.

nachweisen; daraus folgt auch die Richtigkeit der Galilei'schen Voraussetzungen.

Ausser den Fallversuchen auf der schiefen Ebene mit Kugeln aus verschiedenen Substanzen zeigen Fallversuche in einer luftleer gepumpten Röhre ganz allgemein, dass die Beschleunigung A für alle Körper an demselben Orte gleich gross ist. Sie ist am Meeresniveau unter 45^0 geogr. Breite 9·806 m, also ungefähr 10 m. Ihre Dimension ist $[L \cdot T^{-2}]$.

Aus verschwindend kleinen Weg- und Zeitelementen berechnet, sind

$$v = \frac{dL}{dt} \quad \text{und} \quad A = \frac{d^2L}{dt^2}.$$

Eine Verbindung der gewonnenen Gesetze über die gleichförmige und gleichförmig beschleunigte Bewegung führt zu den Gesetzen der Wurfbewegung vertical nach abwärts und nach aufwärts. Bei beiden sei die Anfangsgeschwindigkeit v_0; dieselbe wird beim Wurf nach abwärts um die Beschleunigung vermehrt, beim Wurf nach aufwärts vermindert; demnach ist die Geschwindigkeit nach t Secunden

$$v = v_0 \pm At$$

und der Weg

$$L = \int (v_0 \pm At)dt = v_0 t \pm \frac{1}{2} At^2.$$

Aufg. 1. Es sind Endgeschwindigkeit und Zeit aus dem Weg L und der Beschleunigung A beim freien Falle zu bestimmen. **2.** Beim Wurf nach aufwärts seien die Wurfhöhe (der Weg) L und die Beschleunigung A gegeben; wie gross sind Anfangs- und Endgeschwindigkeit, Steig- und Fallzeit? **3.** Auf der Ebernburg ist ein Brunnen, in den ein Stein in $4\frac{1}{2}$ Secunden hinabfällt; wie tief ist derselbe, welche Geschwindigkeit hat der Stein beim Aufschlagen? $A = 10$ m. — ($101\frac{1}{4}$ m Tiefe, 45 m Geschw.) **4.** Welche Zeit würde ein Stein brauchen, um von der Spitze des Strassburger Münsters 125 m herunterzufallen, und mit welcher Geschwindigkeit würde er anlangen? — (5 Sec., 50 m.) **5.** Von welcher Höhe muss ein Stein herabfallen, um eine Geschwindigkeit von 100 m zu erlangen? — (500 m.) **6.** Wie lange und wie hoch steigt eine Kugel, die mit einer Geschwindigkeit von 800 m senkrecht aufwärts geschossen wird, und mit welcher Geschwindigkeit langt sie wieder auf dem Boden an? — (80 Sec., 32 000 m hoch, 800 m Geschw.) **7.** Ein Zug von 12 m Geschwindigkeit verliert nach Dampfabschluss in jeder Secunde 0·1 m Geschwindigkeit; welche Geschwindigkeit hat der Zug nach 1 Minute, wann und nach welchem Wege kommt er zur Ruhe? — (6 m., 120 Sec., 720 m Weg.) (P. Reis.)

§ 3. **Mass der Kraft.** (Newton 1686.) Alle irdischen Körper haben das Bestreben, in verticaler Richtung zur Erde zu fallen. Sie besitzen die Eigenschaft der Schwere. (Versuch mit dem Bleiloth.) Werden sie durch Aufhängen oder Unterstützen aufgehalten, so üben sie einen Zug oder Druck aus, dessen Grösse ihr absolutes Gewicht

heisst. Die wissenschaftliche Gewichtsbestimmung geschieht durch das Grammgewicht (g^*), die technische durch das Kilogrammgewicht (kg^*).

Frei gelassene Körper fallen mit der Beschleunigung 9·81 m zur Erde. Die Ursache einer Bewegungsänderung nennt man nach Newton „Kraft". Die Beschleunigung der Schwere ist die Wirkung der Schwerkraft und kann zur Messung derselben benützt werden. Um zum Newton'schen Mass der Kraft zu gelangen, lassen wir einen Körper unter Einwirkung verschiedener Kräfte verschiedene Beschleunigungen annehmen; z. B. wir lassen einen zerlegbaren Körper etwa im Gewichte von 120 dg frei fallen; er gewinnt da eine Beschleunigung von ungefähr 10 m, alsdann theilen wir den Körper und belasten die beiden Schnurtheile einer festen Rolle (Atwood'sche Fallmaschine) etwa auf einer Seite mit 80 dg und auf der anderen mit 40 dg; im letzteren Falle erhält der Körper von 120 dg Gewicht durch das Übergewicht von 40 dg eine Beschleunigung von 3·3 m. Der Körper erhält also unter der Einwirkung zweier verschiedenen Kräfte F_1 und F_2 die Beschleunigungen A_1 und A_2. Setzen wir nach Newton die Kräfte ihren Wirkungen, nämlich den Beschleunigungen proportional, so erhalten wir

$$F_1 : F_2 = A_1 : A_2 .$$

Darnach ist

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} = M$$

eine von den wirkenden Kräften und den erzeugten Beschleunigungen unabhängige Grösse, welche ihren Wert beibehält, solange der Körper derselbe ist. Diese für den Körper charakteristische Grösse, welche unter der Einwirkung einer Kraft eine bestimmte Beschleunigung annimmt, heisst die Masse des Körpers.

Die Gleichung

$$F = MA$$

gibt nun die Beziehung zwischen Kraft, Masse und Beschleunigung an und bestimmt eine der Grössen, sobald die beiden anderen gegeben sind; sie gibt das dynamische Mass einer constanten Kraft.

Newton wählt als bekannte Grössen die Kraft und die Beschleunigung; als Mass für die erstere nimmt er das statische Kraftmass, nämlich die Gewichtseinheit an. Nach diesem Muster wird noch heute in der Praxis zumeist das Kilogrammgewicht (kg^*) als Krafteinheit angenommen. Im vorstehenden speciellen Falle wären die auf den 120 dg schweren Körper wirkenden Kräfte 1·2 kg^* und 0·4 kg^*, welche dem Körper beziehungsweise die Beschleunigungen 10 und 3·3 m ertheilten. Darnach ergibt sich die Körpermasse

$$M = F/A = 1{\cdot}2/10 = 0{\cdot}4/3{\cdot}3 = 0{\cdot}12 \text{ Masseneinheiten.}$$

Die Messung der Kräfte durch Gewichte ist richtig, solange es sich um Massenvergleichungen an einem und demselben Orte handelt, wo die Beschleunigung für alle Körper constant und das Gewicht der Masse proportional ist. Für wissenschaftliche Zwecke wird sie aber unbrauchbar, wenn Gewichtsbestimmungen mittelst der Hebelwage an verschiedenen Orten der Erde ausgeführt werden. Eine solche Wägung gibt für denselben Körper überall dasselbe Gewicht, während es in Wirklichkeit wegen der Veränderlichkeit der Beschleunigung in verschiedenen geographischen Breiten verschieden ist. Unveränderlich ist die Masse der Körper; deshalb ist es vortheilhaft, die Gewichte als Mass für die Masse zu benützen, wie es auch im geschäftlichen Leben der Fall ist. Man wählt darum (im Centimeter-Gramm-Secundensystem) die Masse eines Grammes, Grammmasse genannt, als Masseneinheit. Für die absolute Krafteinheit erhält man dann im dynamischen Kräftemass die Gauss'sche Definition, nämlich jene Kraft, welche der Masseneinheit (Gramm) in der Zeiteinheit (Secunde) die Einheit der Geschwindigkeit (cm) ertheilt. Diese Krafteinheit heisst Dyn; ihre Dimension ist $[LMT^{-2}]$.

Ein Grammgewicht entspricht 980·6 Dyn, oder 1 Dyn ungefähr 1 Milligrammgewicht.

Viele Messungen werden mit Vortheil auf die Volumseinheit bezogen, und man nennt das Gewicht der Volumseinheit eines Körpers specifisches Gewicht und die Masse in der Volumseinheit Dichte.

Nach dem angegebenen dynamischen Kräftemass $F = MA$ ist die Beschleunigung für die Eintheilung der Kräfte entscheidend. Da die Beschleunigung der Schwere in einem nicht allzuweit ausgedehnten Versuchsgebiete sich als constant erweist, so ist auch die Schwerkraft als constante Kraft zu betrachten. Ist die Beschleunigung während des Weges veränderlich, so heisst auch die Kraft veränderlich. Auch für solche Kräfte kann das obige Kräftemass in Anwendung gebracht werden; man kann nämlich den Weg und die Zeit in so unendlich kleine Theile getheilt denken, dass während eines solchen Theilchens die Kraft als constant angenommen werden darf. Aus einem Wegelemente dL und dem zugehörigen Zeitelemente dt erhält man nach obigem

$$v = \frac{dL}{dt}, \quad A = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2L}{dt^2} \quad \text{und} \quad F = M \cdot A = M\frac{d^2L}{dt^2}.$$

Aufg. 1. (Wo es nicht anders angegeben ist, sind die Gewichte als Kraftmasse zu betrachten.) Wie viele Masseneinheiten enthält ein Körper, der ein Gewicht von 29·43 kg hat? — (29·43/9·81 = 3.) **2.** Auf einen Körper von 200 kg Gewicht wirkt 20 Secunden lang eine Kraft von 30 kg; welche Geschwindigkeit erlangt er? $A = 9{\cdot}81$ m. — (29·43 m.) **3.** Welchen Druck erleidet eine Hand, die ein Gewicht von 2 kg trägt, wenn sie sich mit einer Beschleunigung von 0·5 m auf- oder abwärts bewegt? —

(2·1 und 1·9 kg.) **4.** Mit welcher Beschleunigung müsste sich die Hand aufwärts bewegen, wenn sie den doppelten Druck, mit welcher abwärts, wenn sie gar keinen Druck des auf ihr liegenden Gewichtes empfinden sollte? — ($\pm$ 9·81 m.) **5.** An den Enden eines schwerlosen Fadens, der über eine Rolle gelegt ist, sind Gewichte von bez. 5 und 3 kg befestigt. Wie gross ist die Beschleunigung? — (2·45 m.) (Fliedner und Krebs.) **6.** Die specifischen Gewichte sind von Wasser 1 g, Schmiedeeisen 7·8 g, Kupfer 8·9 g, Blei 11·35 g, Quecksilber 13·6 g; wie gross sind die Dichten dieser Stoffe und wie verhalten sich dieselben zu einander? **7.** Wie viel Dyn entsprechen die specifischen Gewichte der vorhergehenden Aufgabe?

§ 4. **Gleichwertigkeit der Arbeit und Energie.** (Huygens 1673.) Wenn ein Körper fällt, so wirkt die Schwerkraft längs der Fallhöhe; man sagt, sie leistet eine Arbeit. Das Ergebnis der Arbeit ist der Bewegungszustand, die Geschwindigkeit des Körpers. Umgekehrt vermag ein Körper, der mit einer gewissen Geschwindigkeit vertical nach aufwärts geworfen wird, infolge seines Bewegungszustandes sein eigenes Gewicht um eine gewisse Höhe emporzuheben, also Arbeit zu verrichten. Arbeit und Bewegungszustand stehen daher in einer bestimmten Beziehung zu einander, die nach den Galilei-Newtonschen Gesetzen leicht mathematisch ermittelt werden kann. Aus der Schwerkraft $F = MA$, dem Wege beim Wurfe nach auf- oder abwärts $L = v_0 t \pm \frac{1}{2} A t^2$ und der Geschwindigkeit nach der Zeit t, nämlich $v = v_0 \pm A t$, erhält man die Form

$$F \cdot L = \pm \left(\frac{1}{2} M v^2 - \frac{1}{2} M v_0^2\right).$$

Die linke Seite der Gleichung gibt die Leistung der Kraft längs des Weges L; der Ausdruck führt nach Coriolis und Poncelet den Namen Arbeit. Die allgemeine Bedeutung desselben lässt sich durch zahlreiche Beispiele erläutern: bei der Bewegung der Körper in verticaler Richtung nach abwärts leistet die Schwerkraft eine Arbeit; bei der Dampfmaschine ist es die Spannkraft des Dampfes, welche den die Maschine treibenden Kolben längs des Cylinders fortschiebt; beim Abfeuern eines Geschützes wirkt die Expansivkraft der Pulvergase auf das Projectil längs des Rohres und treibt das Geschoss gegen das Ziel etc. Werden $F = 1$ und $L = 1$, dann erhalten wir in dem Producte (FL) die Arbeitseinheit, als welche im praktischen Leben ein Kilogramm-Meter und für wissenschaftliche Messungen nach dem Centimeter-Gramm-Secundensystem ein Erg, d. i. die Arbeit von 1 Dyn auf 1 cm angenommen wird.

Die Ausdrücke der rechten Seite der Gleichung haben die Form $\frac{1}{2} M v^2$, welche nach Leibniz und Coriolis lebendige Kraft oder nach Thomson kinetische Energie genannt wird.

Mit Benutzung der angeführten Benennungen gibt die vorstehende Gleichung für den Wurf nach abwärts den Satz: Die Arbeit einer Kraft, welche zur Bewegung eines Körpers verwendet wird, ist dem Zuwachs an lebendiger Kraft des Körpers gleich. — Die obigen Gleichungen gelten auch für eine gleichförmig verzögerte Bewegung z. B. für den verticalen Wurf nach aufwärts. In diesem Falle haben Kraft und Weg entgegengesetzte Richtungen und die Arbeit wird negativ, es verrichtet der bewegte Körper die Arbeit der Hebung seines eigenen Gewichtes, indem er Geschwindigkeit verliert und mit Bezug darauf gibt die letzte Gleichung den Satz: Die von einem Körper während seiner Bewegung geleistete Arbeit ist gleich dem Verluste, den er an lebendiger Kraft erleidet. Es wird die gesammte lebendige Kraft zur Arbeitsleistung verbraucht, wenn $v_0 = 0$ wird, d. h. wenn der Körper zur Ruhe kommt.

Die gewonnenen Sätze von der Äquivalenz der Arbeit und der lebendigen Kraft lassen sich auf zahlreiche Vorgänge anwenden, welche zugleich das Wesentliche der Bezeichnungen „lebendige Kraft“, „actuelle oder kinetische Energie“ deutlich zu machen vermögen. Durch die lebendige Kraft hebt der nach aufwärts geworfene Körper sein Gewicht, treibt ein Wasserfall Wasserräder und Turbinen, bewegt das Schwungrad die Maschine, während der Kolben in seinen todten Punkten steht, verrichtet das Geschoss sein kriegerisches Demolierungswerk etc. Immer vermag die lebendige Kraft eine ihr äquivalente Arbeit zu leisten und dieser physikalischen Bedeutung entspricht die Definition: die lebendige Kraft oder kinetische Energie ist die Leistungsfähigkeit eines bewegten Körpers.

Die bisherigen Feststellungen beziehen sich nur auf constante Kraftwirkungen. Es unterliegt jedoch keiner Schwierigkeit, das Gesetz der Äquivalenz der Arbeit und der lebendigen Kraft auch auf die Fälle inconstanter Kraftwirkungen auszudehnen. Man hat dann nur die Wege in solche Elemente zu zerlegen, längs welchen die wirkende Kraft als constant gelten kann, und die auf diesen Wegelementen geleisteten Arbeitselemente zu bestimmen. Für ein Wegelement λ gilt dann ebenfalls die obige Gleichung

$$f \cdot \lambda = \frac{1}{2} M v_n^2 - \frac{1}{2} M v_{n-1}^2$$

und für alle Wegelemente

$$\sum f \cdot \lambda = \sum \left(\frac{1}{2} M v_n^2 - \frac{1}{2} M v_{n-1}^2\right) = \frac{1}{2} M v^2 - \frac{1}{2} M v_0^2.$$

Die Summe der Arbeitswerte erstreckt sich auf alle Wegelemente. Die Gleichung besagt wieder die Äquivalenz von Arbeit und lebendiger Kraft.

Die Dimension der Arbeit und lebendigen Kraft ist $[L^2 M T^{-2}]$.

In der Technik ist es von Wichtigkeit, die Arbeitsleistung in einer bestimmten Zeit zu kennen; man nennt die Arbeit, welche in einer Secunde geleistet wird, Effect und nimmt als Einheit desselben das Secunden-Kilogramm-Meter (kgm/s) oder bei grösseren Effecten die Pferdekraft = 75 kgm/s. Die Dimension des Effectes im absoluten Masssysteme ist $[L^2 M T^{-3}]$.

Aufg. 1. Wie viele Erg enthält die Arbeit 1 g-cm? — (980·6.) **2.** Wie viele Erg enthält 1 kgm? — ($10^7 \cdot 9{\cdot}806$.) **3.** Wenn 10^7 Erg = 1 joule, und der Effect dieser Arbeit in einer Secunde 1 Watt genannt wird, wie viele Watt sind 1 Pferdekraft? — (735·45 Watt.) **4.** Welche Arbeit (kgm) wird aufgewendet, wenn 25 kg 12 m hoch gehoben werden? — (300 kgm.). **5.** Welche Arbeit ist nöthig, um einen Eimer voll Wasser, 30 kg wiegend, aus einem Brunnen von 15 m Tiefe zu ziehen? — (450 kgm.) **6.** Welche Arbeit verrichtet ein Mensch von 70 kg Gewicht, wenn er auf einer wagrechten Bahn 1 Meile (7420 m) weit geht und bei jedem Schritte (à 60 cm) seinen Körper 2 cm hebt, und wenn die Arbeit zur Bewegung der Glieder ausser Rechnung bleibt? — (17 313⅓ kgm.) **7.** Welche Arbeit consumiert ein Postwagen, der mit dem Inhalte 1500 kg wiegt, auf einer wagrechten Strasse von 3 Meilen (à 7420 m) lang, wenn der Widerstand der Reibung auf 1/30 des Gewichtes geschätzt wird? — (1 113 000 kgm.) **8.** Welche Arbeit produciert Dampf, der mit einem Drucke von 3 Atmosphären (à 1·0328 kg auf 1 cm^2) einen Kolben von 60 cm Durchmesser 200mal in einem Cylinder von 1 m Länge hin- und herschiebt? — (3 504 200 kgm.) **9.** Wie gross ist die Arbeit des Dampfes der vorhergehenden Aufgabe bei einem Kolbenhube, wenn der Druck des Dampfes von 3 Atm. gleichmässig bis zu Null abnimmt? — (4380 kgm.) **10.** Wie gross ist der Effect eines Wasserfalles, bei welchem in jeder Secunde 850 kg Wasser 6 m hoch herabfallen? — (5100 kgm/s.) **11.** 6000 kg Wasser fliessen in jeder Secunde durch den Querschnitt eines Flusses mit einer mittleren Geschwindigkeit von 2 m; wie gross ist die lebendige Kraft des Flusswassers? $A = 10$ m. — (1200 kgm.) **12.** Ein 600 kg schwerer Rammklotz soll in der Minute 10mal 3 m hoch gehoben und der einzelne Mann dabei auf nicht mehr als 11 kgm pro Secunde beansprucht werden; wie viel Mann sind zu dieser Arbeit anzustellen? — (27 Mann.) **13.** Wie gross muss die Geschwindigkeit eines 240 000 kg schweren Eisenbahnzuges sein, wenn er nach Abstellung des Dampfes bei dem Widerstande von 650 kg nur noch 1500 m weiter gehen soll? Die Beschleunigung der Schwere sei 10 m. — (9·01 m.) **14.** Wie weit bewegt sich ein Eisenbahnzug von 15 m Geschwindigkeit ohne Dampfkraft weiter, wenn der Reibungswiderstand 1/250 vom Gewichte des Zuges ausmacht? — (2812½ m.) **15.** Die im Jahre 1779 vom Vesuv ausgeworfenen Steine erreichten eine Höhe von 3430 m; wie gross war ihre Anfangsgeschwindigkeit? $A = 9{\cdot}81$. — (259·4 m.) **16.** Wie gross ist der absolute Effect einer Dampfmaschine, wenn der Dampf eine Spannung von 4 Atm. (à 1·0328 kg auf 1 cm^2) hat, und wenn der 40 cm breite Kolben in jeder Secunde 1·5 m zurücklegt? — (7787 kgm/s = 104 Pferdekrft.) **17.** Wie viele Pferdekräfte sind er-

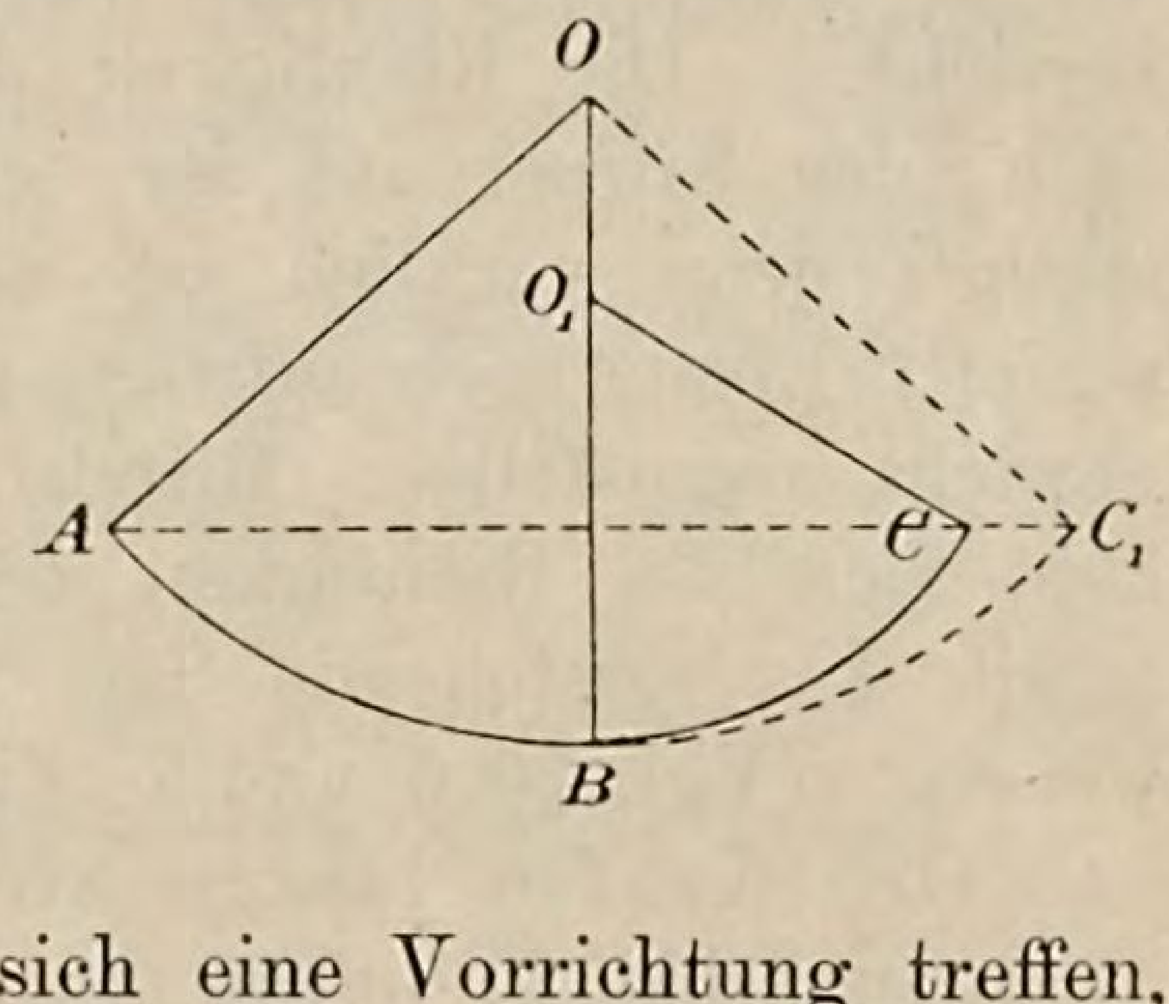
forderlich, um einer Masse gleich der unserer Erde (= 5 Quadrillionen kg) binnen 6000 Jahren die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne (= 30 000 m) zu geben? — (Über 16 Trill. Pferdekräfte.) **18.** Wenn ein Hammer von 0·5 kg Gewicht mit einer Geschwindigkeit von 10 m auf einen in einem horizontalen Brette steckenden Nagel schlägt und ihn 5 cm tief eintreibt, wie gross müsste ein Gewicht sein, um auf den Nagel gelegt, durch seinen Druck dieselbe Wirkung auszuüben? Die Beschleunigung der Schwere sei 9·81 m. — (51·5 kg.) **19.** Welche Kraft ist erforderlich, um einen Eisenbahnzug von 27 000 kg Gewicht auf einer horizontalen Schienenbahn binnen 4 Minuten aus der Geschwindigkeit von 7 m in die von 14 m zu bringen? Die Schwerebeschleunigung sei 9·81 m. — (80·28 kg.) **20.** Welche Arbeit ist erforderlich, um einer 10 000 kg schweren Locomotive auf einer horizontalen Bahn eine Geschwindigkeit von 10 m zu ertheilen? — (Ohne Rücksicht auf die Reibung 50 968 kgm.) **21.** Wie gross ist, in Pferdekräften ausgedrückt, der Effect einer Dampfpumpe, welche in 3 Minuten 600 hl Wasser 3 m hoch zu heben vermag? — ($13\frac{1}{3}$ Pferdekräfte.) [Die Aufgaben sind entnommen 6—9 d. Lehrb. v. P. Reis, 10—15 d. Aufgabenslg. v. Müller-Erzbach, 17—21 d. Aufgabenslg. v. Fliedner u. Krebs.]

§ 5. **Arbeit bei unfreier Bewegung.** Es soll die Arbeit ermittelt werden, welche die Schwerkraft leistet, wenn sie einen Körper längs einer schiefen Ebene herab bewegt. Die Reibung bleibe unberücksichtigt. Der gesuchte Wert folgt leicht aus der Anwendung des Satzes von der Gleichwertigkeit der Arbeit und lebendigen Kraft auch für den gegebenen Fall. Um zum gewünschten Resultate zu gelangen, kann Galilei's Betrachtung der Bewegung auf der schiefen Ebene dienen. Nach dieser erlangt ein schwerer Körper längs der schiefen Ebene dieselbe Geschwindigkeit, als wenn er im freien Falle die verticale Höhe der betreffenden Ebene zurücklegte[1]). Die Richtigkeit dieser Annahme folgt aus der Unmöglichkeit des Gegentheils. Denn würden wir annehmen, dass ein Körper bei der Bewegung längs der schiefen Ebene eine grössere Geschwindigkeit erlangte als beim Fall längs der Höhe, so könnten wir denselben mit der erlangten lebendigen Kraft auf eine andere schiefe oder verticale Ebene übergehen lassen, auf welcher er zu einer grösseren als seiner ursprünglichen Höhe emporsteigen müsste. — Bei der Annahme, dass der Körper etwa eine kleinere Geschwindigkeit längs der schiefen Ebene erreiche, würde eine Umkehrung des Processes dasselbe Resultat ergeben. In beiden Fällen könnte ein schwerer Körper von selbst nach aufwärts steigen, es würde Arbeit aus Nichts entstehen, Arbeit und Energie wären nicht äquivalent; diesen Schluss halten wir für unmöglich.

1) Siehe E. Mach: Die Mechanik in ihrer Entwickelung S. 123 etc. und Grundriss der Naturlehre.

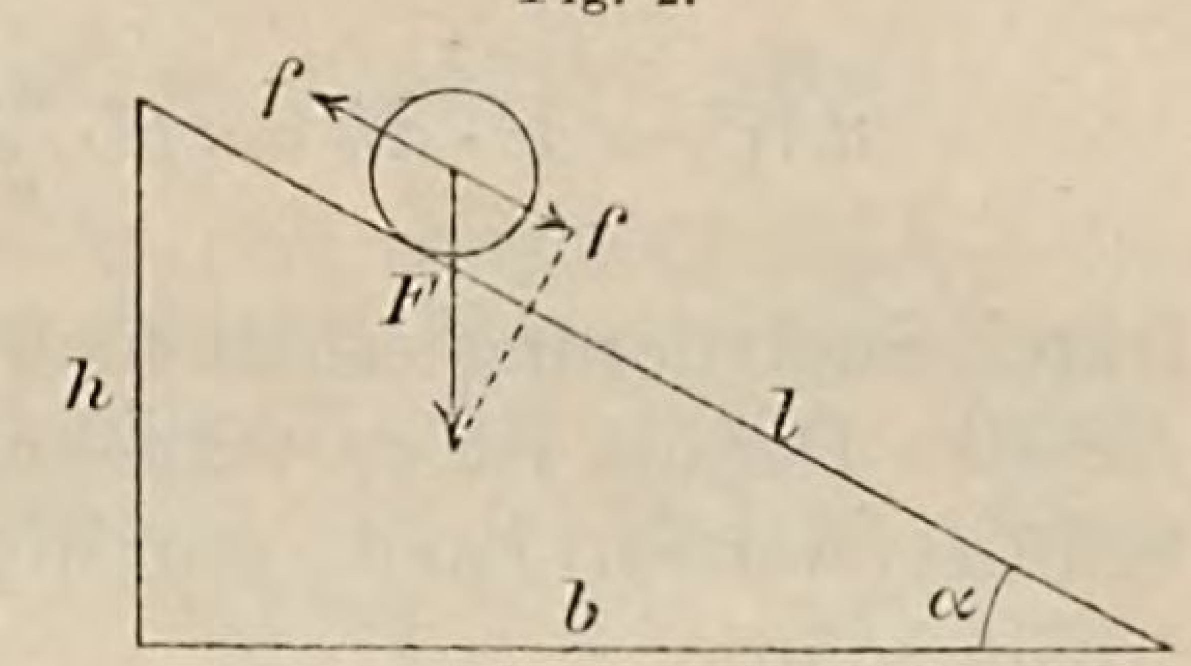
Dieselbe Betrachtungsweise wendet Galilei auf die Bewegung eines Pendels (Fig. 1) an; eine kleine Kugel A, die an dem Faden AO aufgehängt ist, macht eine Halbschwingung AB mit dem Radius AO und die weitere Halbschwingung BC mit dem Halbmesser O_1B; um die letztere Halbschwingung zu erreichen, schlingt sich der Faden OB um einen Stift O_1. Wenn die Pendelbewegung von A beginnt, so muss das Pendel auch bis zur Horizontalen AC_1 aufsteigen; kleine Differenzen haben in dem Luftwiderstand ihren Grund. — Würde beim Herabfallen auf einer Seite eine grössere lebendige Kraft erreicht als auf der anderen, so liesse sich eine Vorrichtung treffen, dass das Pendel von selbst immer höher stiege; es liesse sich Arbeit aus Nichts erzeugen. Da wir diese Möglichkeit für ausgeschlossen halten, so folgt, dass die lebendige Kraft und auch die Arbeit bei der Bewegung nicht von der Richtung und Krümmung der Bahn, sondern nur von der verticalen Fallhöhe abhängen, dass also sowohl bei der Bewegung längs der schiefen Ebene, als auch bei der Pendelbewegung die von der Schwerkraft geleistete Arbeit gleich der Arbeit beim freien Fall längs der gleichen verticalen Fallhöhe ist.

Fig. 1.



Für die schiefe Ebene (Fig. 2), deren Länge l, Höhe h und Neigungswinkel α sind, ergeben sich nach diesen Überlegungen folgende zahlenmässige Bestimmungen:

Fig. 2.



Um einen Körper von der Basis zum höchsten Punkte der schiefen Ebene etwa längs der Höhe h zu heben, ist die Arbeit $W = F \cdot h$ erforderlich, wenn F die wirksame Schwerkraft bezeichnet. Diese Arbeit wird in eine gleichwertige lebendige Kraft umgewandelt, wenn der Körper wieder in die Wagrechte der Basis b zurückfällt; dabei kann die Richtung und die Form des Weges auf das Ergebnis keinen Einfluss üben, wenn Arbeit weder gewonnen werden, noch verloren gehen soll. Es ist demnach auch die Arbeit längs der schiefen Ebene

$$W = F \cdot h = F \cdot l \cdot \sin \alpha = (F \cdot \sin \alpha) \cdot l\,.$$

Der wirklich zurückgelegte Weg ist l, von diesem ist die Fallhöhe h die Projection auf die Richtung der Schwerkraft, und es gilt demnach der Satz: Wenn Kraft und Weg nicht in gleicher Richtung

liegen, so ist die Arbeit gleich dem Producte aus der Kraft in die Projection des Weges auf die Kraftrichtung.

Der Ausdruck W lässt in der zuletzt angegebenen Form noch eine andere Deutung zu: Man kann $(F \cdot \sin\alpha) = f$ als die Kraft in der Richtung des Weges l betrachten, welche die Arbeit thatsächlich verrichtet. Die Richtigkeit dieser Auffassung wird durch den Versuch, den Körper auf der schiefen Ebene in Ruhe zu erhalten, bestätigt; denn wirklich ist eine Kraft $f = F \cdot \sin\alpha$, die längs der schiefen Ebene nach aufwärts gerichtet ist, imstande, Ruhe oder Gleichgewicht herzustellen. Mittelst des Gleichgewichtes zwischen F und f lässt sich die Richtigkeit des Arbeitswertes $F \cdot l \sin\alpha = f \cdot l$ und somit der vorstehende Satz auch durch den Versuch direct nachweisen. (Vgl. §§ 6 und 7, Fig. 3 und 4.)

Die Kräfte lassen sich auch graphisch darstellen, und zwar zunächst F, indem man vom Angriffspunkte in der verticalen Kraftrichtung ebenso viele Längeneinheiten aufträgt, als F Krafteinheiten enthält; f erscheint dann, in der Richtung der Länge der schiefen Ebene dargestellt, als die Projection von F und heisst eine Seitenkraft oder Componente von F. Mit Bezug auf solche Darstellung kann man sagen: Die geleistete Arbeit wird auch gefunden, wenn man die in die Wegrichtung fallende Componente mit dem zurückgelegten Wege multipliciert.

Ein Arbeitselement dW längs des Weges dl ist

$$dW = F \cdot dh = F \cdot \frac{dh}{dl} \cdot dl = F \cdot \sin\alpha \cdot dl = f \cdot dl.$$

Durch Summierung erhält man den oben angegebenen Wert der ganzen Arbeit. Daraus ist zu entnehmen, dass die Arbeitsänderung dW dazu benützt werden kann, um die Kräfte F und f zu berechnen. Man erhält sofort

$$F = \frac{dW}{dh} \quad \text{und} \quad f = \frac{dW}{dl},$$

d. h.: Jede der Kräfte ist gleich der Arbeitsleistung, welche in der betreffenden Kraftrichtung auf die Wegeinheit entfällt.

Der Satz gestattet auch die Berechnung der Kräfte aus Arbeitswerten für Wegelemente krummliniger Bahnen, wie z. B. der bewegenden Kräfte des Pendels längs seiner Bahn.

Eine tiefer gehende Betrachtung führt zur Zerlegung und Zusammensetzung der Bewegungen und der Kräfte. Vor deren Behandlung soll noch die Beschleunigung a bestimmt werden, mit welcher sich der Körper auf der schiefen Ebene herab bewegt. Wir benützen hierzu die Kraft f in der Bewegungsrichtung; dieselbe ist, mit Hilfe der Schwerkraft $F = MA$ berechnet,

$$f = F \cdot \sin\alpha = M \cdot A \cdot \sin\alpha = M \cdot a.$$

Daraus folgt die Beschleunigung $a = A \cdot \sin\alpha$.

Beharrungsvermögen. Aus der Betrachtung der Bewegung auf der schiefen Ebene schliesst Galilei auf das Gesetz des Beharrungsvermögens. Dasselbe ergibt sich durch Specialisierung des Wertes für die Beschleunigung a. Wendet man denselben auch auf horizontale Ebenen an, so ist $\alpha = 0$ und $a = 0$. Die Bewegung auf einer horizontalen Ebene erfährt daher keine Beschleunigung. Die Geschwindigkeit bleibt unverändert dieselbe, der Körper beharrt in seinem Zustande. Auch aus Newton's Definition der Kraft folgt das Beharrungsvermögen; denn in einer horizontalen Ebene wird auch die Componente f der Schwerkraft mit dem Neigungswinkel gleich Null, und daher kann auch keine Bewegungsänderung eintreten.

Aufg. 1. Wie verhält sich die Kraft f zur Last F bei einer schiefen Ebene, deren Höhe h und Länge l sind? — **2.** Wie gross ist die Pendelbeschleunigung bei dem Ausschlagswinkel α? — (Aus $W = Al\,(1 - \cos\alpha)$ folgt $a = d\,W/l \cdot d\alpha = A \sin\alpha$). **3.** Welche Arbeit produciert ein Mensch von 70 kg Gewicht, der eine Last von 20 kg auf einen Berg von 500 m Höhe trägt? — (45 000 kgm.) **4.** Ein Eisenbahnzug leistet durchschnittlich der Fortbewegung einen Widerstand von 1/200 seines Gewichtes; welche Arbeit ist nothwendig, um einen Zug 1 Meile (= 7420 m) weit fortzubewegen, wenn er hiebei um 100 m steigt? Das Gewicht des Zuges beträgt 150 Tonnen à 1000 kg. —

$$\left(\frac{1}{200} \cdot 150\,000 \cdot 7420 + 150\,000 \cdot 100 = 20\,565\,000 \text{ kgm.}\right)$$

5. Welches ist das Verhältnis der Kräfte in der vorigen Aufgabe, die den Zug in der horizontalen und auf der schiefen Ebene fortzubewegen vermögen? — (750 : 2772 oder ungefähr 10 : 37.) **6.** Welche Arbeit consumiert ein Holzschlitten von 10 kg Gewicht, der 50 kg trägt, wenn er auf einer Bahn von 1000 m, die $5\,^0\!/_0$ Steigung besitzt, fortbewegt werden soll, auf welcher die Reibung $^1\!/_2$ der Last beträgt? — (33 000 kgm.) (P. Reis.)

§ 6. **Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen und der Kräfte.** Beispiele der Zusammensetzung zweier Bewegungen bieten der horizontale und der schräge Wurf. Die Aristoteliker erklärten den Wurf aus der Zusammensetzung der natürlichen Fallbewegung und der gezwungenen Wurfbewegung; darnach sollte der Körper zuerst die gewaltsame geradlinige Bewegung, sodann die kreisförmige zusammengesetzte und schliesslich die geradlinig natürliche Bewegung nach abwärts vollziehen. Galilei erklärte die Zusammensetzung durch eine erweiterte Anwendung seines Beharrungsgesetzes auf zwei gleichzeitige Bewegungen und erläuterte damit das Princip der Zusammensetzung gleichzeitiger Bewegungen. Der geworfene Körper führt beide Bewegungen aus: Er bewegt sich längs der

Wurfrichtung gleichförmig und fällt infolge der Schwere gleichförmig beschleunigt, so dass er am Ende einer gewissen Zeit an einer Stelle sich befindet, an der er auch sein würde, wenn die einzelnen Bewegungen in ihren Richtungen nach einander stattgefunden hätten; die betreffende Stelle wird durch den Endpunkt der Diagonale des Parallelogrammes der beiden gleichzeitigen Bewegungen angegeben.

Andere anschauliche Beispiele solcher Zusammensetzung von Bewegungen sind: Das Ziehen einer Linie längs eines Lineales, welches gleichzeitig normal zu seiner Länge bewegt wird; — das Heranziehen eines mit der Strömung eines Flusses schwimmenden Körpers zum Ufer u. s. w.

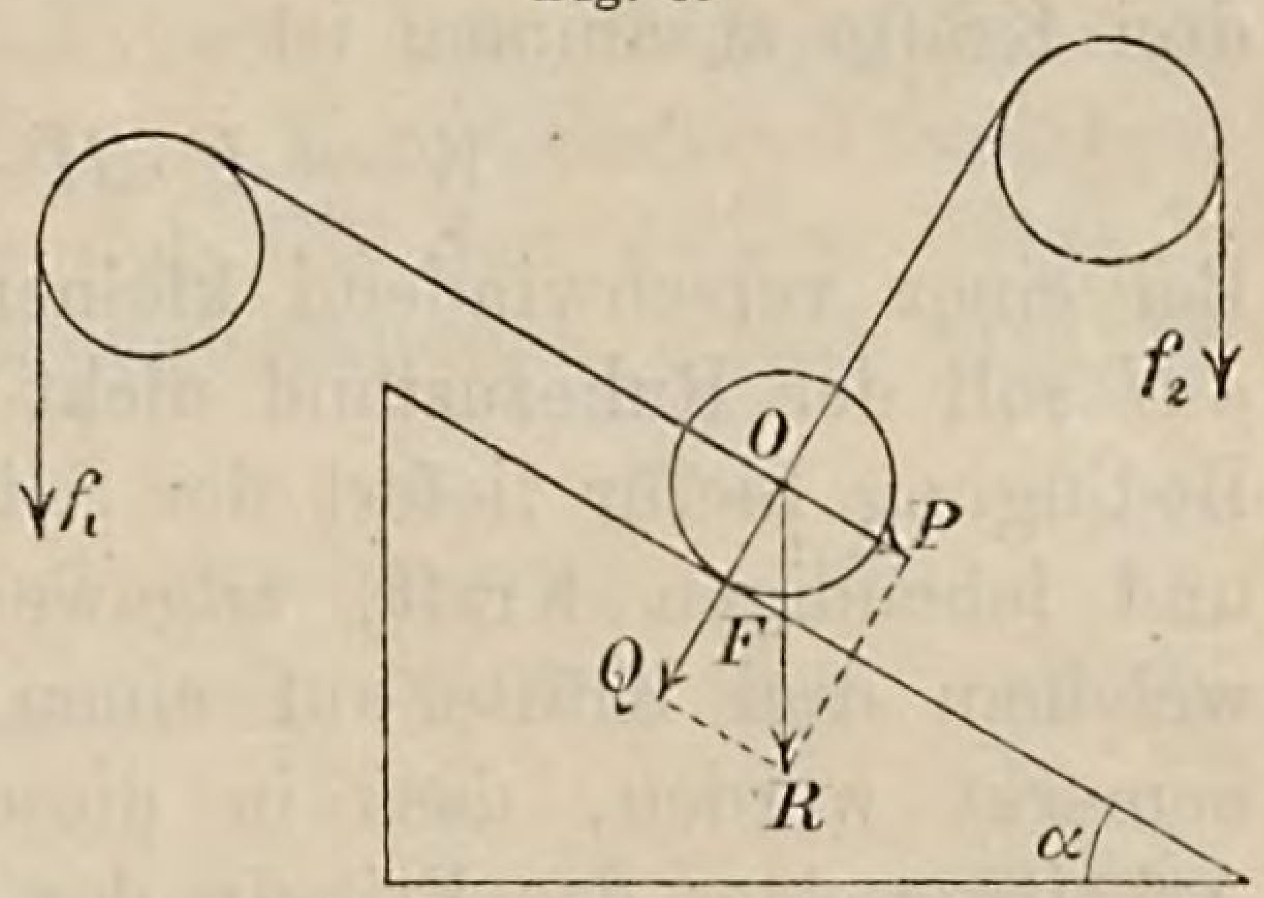
Der Satz vom Parallelogramm der gleichzeitigen Bewegungen führt leicht zum Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- oder Kräftenparallelogramm, wenn die Seiten beziehungsweise Geschwindigkeiten, Beschleunigungen oder Kräfte darstellen. Das Geschwindigkeitsparallelogramm wird selbstverständlich gebildet aus zwei gleichzeitigen, während einer Secunde in gleichförmiger Bewegung zurückgelegten Wegen. Das Beschleunigungsparallelogramm wird construiert aus zwei den betreffenden Beschleunigungen entsprechenden Wegen in der Zeit $t = \sqrt{2}$ (und zwar nach der Form $A = 2L/t^2$). Die Diagonale gibt die resultierende Beschleunigung der Richtung und Grösse nach an. Das Kräfteparallelogramm (Newton 1687) erhält man (nach der Gleichung $F = MA$) aus dem Beschleunigungsparallelogramm, indem man die Seiten desselben so oftmal vergrössert, als die Masse des zu bewegenden Körpers Masseneinheiten enthält. Die Seiten des vergrösserten Parallelogrammes sind die graphischen Darstellungen der Seiten- oder Componentenkräfte; die Diagonale, gleich der M-fachen resultierenden Beschleunigung, ist die graphische Darstellung der resultierenden Kraft oder Mittelkraft; sie gibt die Grösse und die Richtung von dieser an.

Die Zerlegung einer Bewegung, Geschwindigkeit, Beschleunigung oder Kraft ist die Umkehrung der Zusammensetzung; sie geschieht mittelst des Parallelogrammes, in welchem das gegebene Stück der Bewegung die Diagonale und die Componenten die Seiten des Parallelogrammes sind.

Als ein Beispiel für die Zerlegung und Zusammensetzung der Beschleunigungen und der Kräfte mag die Bewegung eines Körpers auf einer schiefen Ebene dienen (Fig. 3). Auf den Körper wirkt die Schwerkraft F in der Richtung OR. In dieser Richtung kann aber der Körper nicht fallen, sondern nur in der Richtung OP. Wird deshalb F in 2 Componenten f_1 und f_2 zerlegt, welche beziehungsweise längs der schiefen Ebene und normal zu derselben wirken, so ist ersichtlich, dass nur die erste eine Bewegung hervorbringt, während

die letztere durch den elastischen Widerstand der Ebene aufgehoben wird. Aus dem Kräfterechteck $OPRQ$ erhält man die wirksame Componente $f_1 = F \cdot \sin\alpha$ oder auch die entsprechende Beschleunigung $a = A \cdot \sin\alpha$, welche Ausdrücke mit den in § 5 gefundenen Werten übereinstimmen.

Fig. 3.



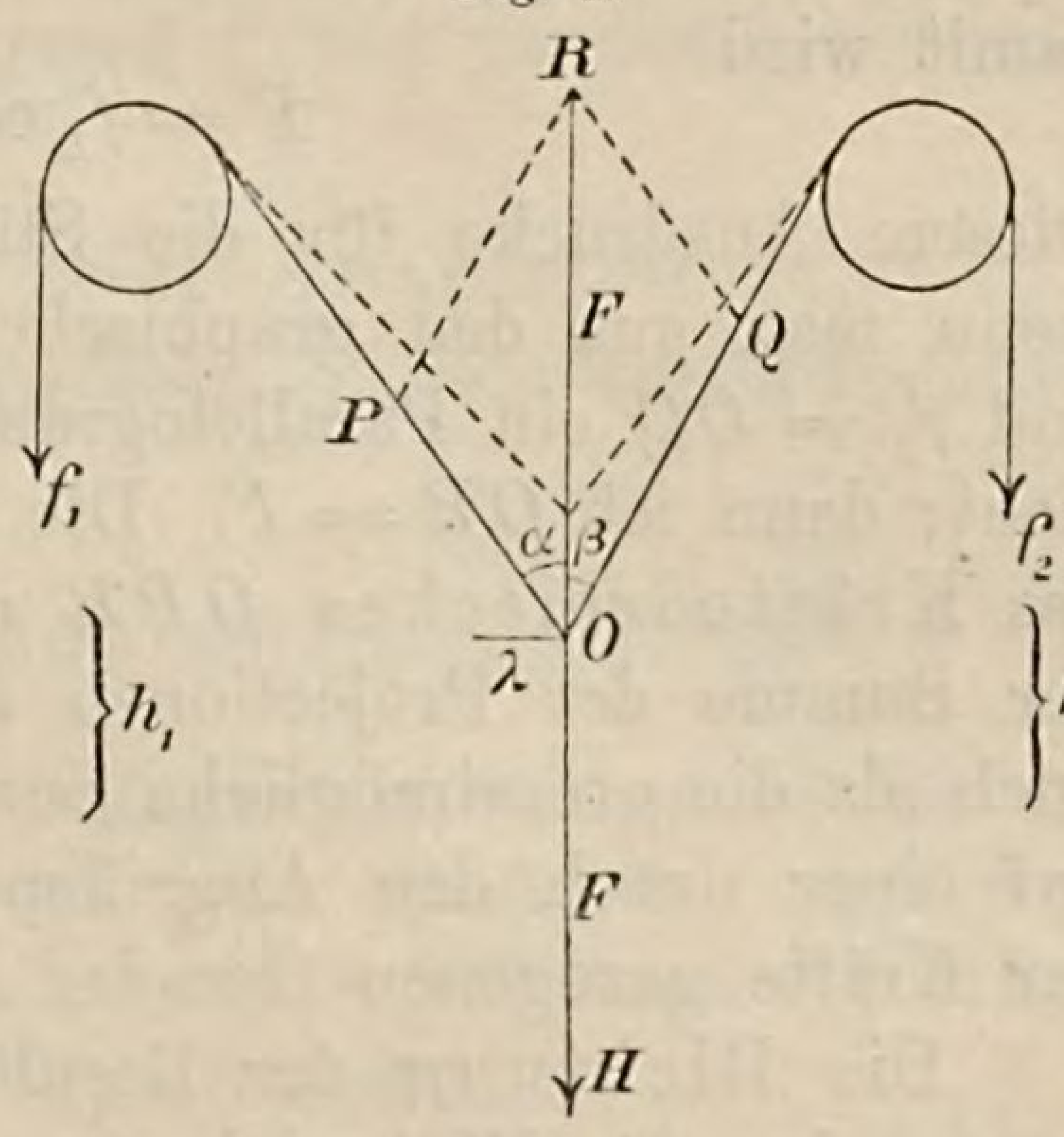
Es ist bereits bemerkt worden, dass die Richtigkeit des Wertes für die bewegende Kraft f_1 durch den Versuch bestätigt wird, indem man durch eine gleiche Gegenkraft f_1 den Körper in Ruhe zu erhalten vermag.

Auf eine ähnliche Weise kann man das Vorhandensein der normal gerichteten Kraft f_2 nachweisen, indem man anstatt des elastischen Widerstandes der schiefen Ebene an einer Schnur in der entgegengesetzten Richtung von OQ die Kraft $f_2 = F \cdot \cos\alpha$ wirken lässt. Man kann alsdann die schiefe Ebene wegheben und der Körper bleibt in seiner Lage in Ruhe; die drei Kräfte F, f_1 und f_2 halten einander das Gleichgewicht. Da jede derselben die Wirkung der beiden anderen aufhebt, so lässt sich hiernach auch jede als die der Resultierenden der beiden anderen Kräfte gleiche und entgegengesetzt wirkende Kraft betrachten.

Nun lässt sich mit Rücksicht auf die elastische Widerstandskraft f_2 der schiefen Ebene die Bewegungserscheinung auf dieser so erklären, dass die Elasticität f_2 und die Schwerkraft F die Resultierende f_1 geben, vermöge welcher die Bewegung eintritt.

§ 7. **Fortsetzung.** Die eben angegebene Zusammenstellung der Resultierenden und ihrer Componenten im Gleichgewichtszustande — nur in allgemeinerer Form — soll nun verwendet werden, um die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte auch mittelst der Arbeitswerte durchzuführen. Es sei eine Schnur über zwei Rollen gezogen, deren Achsen befestigt seien (Fig. 4). An einer Stelle zwischen den Rollen hänge das Gewicht F, und diesem werde durch die Gewichte f_1 und f_2 an den Enden der Schnur das Gleichgewicht gehalten. Eine Kraft, die graphisch durch OR dargestellt werden mag, welche F gleich ist und entgegengesetzt wirkt, ist alsdann die Resultierende von f_1 und f_2.

Fig. 4.



Es sollen nun die Bedingungen des Gleichgewichtes ermittelt werden. Zu diesem Zwecke benützen wir die Arbeitswerte der gegebenen drei Kräfte, nämlich $F \cdot H$, $f_1 \cdot h_1$ und $f_2 \cdot h_2$, deren Höhen von der Erdoberfläche aus gerechnet seien. Der Arbeitswert aller drei Kräfte zusammen ist

$$W = F \cdot H + f_1 \cdot h_1 + f_2 \cdot h_2 .$$

Bei einer verschwindend kleinen virtuellen Verschiebung z. B. um dH soll der Ruhezustand nicht gestört werden. Eine mathematische Bedingung hiefür liefert der Satz von der Gleichwertigkeit der Arbeit und lebendigen Kraft, angewendet auf den vorliegenden Fall, in welchem drei Kräfte auf einen Punkt wirken. Es soll im voraus bemerkt werden, dass in dieser weiter gehenden Anwendung des Arbeitsgesetzes das Princip der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte enthalten ist. Wir nehmen also an, dass bei der angegebenen Verschiebung im Ruhezustande keine lebendige Kraft erzeugt wird, und dass daher auch die geleistete Arbeit gleich Null ist, also dass

$$dW = F \cdot dH - f_1 \cdot dh_1 - f_2 \cdot dh_2 = 0 .$$

Die Bedingung ist erfüllt, wenn

$$F \cdot dH = f_1 \cdot dh_1 + f_2 \cdot dh_2 ,$$

d. h. wenn die Arbeit der Resultierenden F der Summe der Arbeiten der Seitenkräfte f_1 und f_2 gleich ist.

Die Gleichung gestattet bereits die Stärke der Resultierenden zu bestimmen. Aus den Bewegungsbedingungen, die in der Figur ersichtlich sind, folgen nämlich die Verkürzungen der Schnurtheile $dh_1 = dH \cdot \cos\alpha$ und $dh_2 = dH \cdot \cos\beta$, es sind zugleich die Projectionen des Weges dH auf die betreffenden Kraftrichtungen; und damit wird

$$F = f_1 \cos\alpha + f_2 \cos\beta .$$

Diesem Ausdrucke für die Stärke der Resultierenden wird genügt, wenn man aus den graphischen Darstellungen der Kräfte $f_1 = OP$ und $f_2 = OQ$ ein Parallelogramm verzeichnet und die Diagonale OR zieht; dann ist $OR = F$. Die Resultierende kann auch als eine Seite des Kräftedreieckes OPR angesehen werden; sie ist dann gleich der Summe der Projectionen der Componentenkräfte. Sie erscheint auch als die grösstmögliche Summe dieser Projectionen, die überhaupt auf einer durch den Angriffspunkt O oder sonst wo in der Ebene der Kräfte gezogenen Geraden erhalten werden kann[1]).

Die Richtung der Resultierenden kann durch Anwendung des Ausdruckes für W beziehungsweise für dW auf eine zu F normale virtuelle Verschiebung λ ermittelt werden. Bei dieser Bewegung sind $dH = 0$, $dh_1 = -\lambda \sin\alpha$ und $dh_2 = \lambda \sin\beta$. Demnach ist

1) Vgl. Thallmayer, Arch. f. Math. u. Ph. 1891. S. 310.

$$dW = -f_1 \cdot \lambda \cdot \sin\alpha + f_2 \cdot \lambda \cdot \sin\beta = 0,$$

oder

$$f_1 : f_2 = \sin\beta : \sin\alpha .$$

Die Gleichung entspricht dem aus der Trigonometrie bekannten Sinussatze für das Dreieck OPR und lehrt, dass die Diagonale des Kräfteparallelogrammes auch die Richtung der Mittelkraft bestimmt.

Durch Quadrieren und Addieren der aus den beiden Verschiebungen dH und λ entstandenen Arbeitsgleichungen erhält man für die Mittelkraft den Wert

$$F^2 = f_1^2 + f_2^2 + 2 f_1 \cdot f_2 \cdot \cos(\alpha + \beta),$$

der nach dem Carnot'schen Lehrsatze auch für die Seite OR des Kräftedreieckes gilt.

Damit ist nun der Satz vom Parallelogramm der Kräfte erwiesen. Der Nachweis basiert auf der Zusammensetzung der Arbeitswerte oder auf dem Satze, dass die Mittelkraft stets dieselbe Arbeit leistet, als die Seitenkräfte zusammen. Es ist nun leicht, auch umgekehrt den letzteren Satz aus der Kräftezerlegung mittelst des Parallelogrammes zu erhalten: Wird jede der Kräfte f_1 und f_2 in der Richtung der Resultierenden und normal dazu in Componenten zerlegt, so heben sich die letzteren gegenseitig auf, und die Summe der ersteren gibt die Resultierende. Eine Bewegung in der Richtung dieser erfordert nur eine Arbeit der Resultierenden.

Es soll nun noch gezeigt werden, dass die resultierende Bewegung in der Richtung der grösstmöglichen Arbeitsleistung erfolgt.

Nach der vorstehenden Figur mögen auf einen Punkt O die Kräfte f_1 und f_2 wirken. Der Punkt kann jede Bewegungsrichtung innerhalb des Winkels $\varphi = (\alpha + \beta)$ einschlagen. Bei irgend einer Bewegung, die etwa unter dem $\sphericalangle\, \alpha$ gegen f_1 hin geschehe, wird die Arbeit geleistet

$$\Delta W = f_1 \cdot \Delta H \cdot \cos\alpha + f_2 \cdot \Delta H \cdot \cos(\varphi - \alpha).$$

Unter einem bestimmten Winkel α wird diese Arbeit ein Maximum sein, nämlich wenn

$$\frac{d(\Delta W)}{d\alpha} = \Delta H \cdot [-f_1 \cdot \sin\alpha + f_2 \cdot \sin(\varphi - \alpha)] = 0.$$

Die Bedingung entspricht dem bereits angegebenen Sinussatze für das halbe Kräfteparallelogramm $(f_1 f_2 F)$ und gibt somit die Richtung der resultierenden Kraft. — Für deren Stärke erhält man die Arbeit längs der Wegeinheit in ihrer Richtung, nämlich

$$F = \frac{\Delta W}{\Delta H} = f_1 \cos\alpha + f_2 \cdot \cos(\varphi - \alpha)$$

wie oben.

Vom Kräfteparallelogramm kann man nun zufolge der Be-

ziehungen $F = M \cdot A = M \cdot v/t$ auf das Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsparallelogramm übergehen und in derselben Weise wie die Kräfte auch Beschleunigungen (A) und Geschwindigkeiten (v) zusammensetzen und zerlegen.

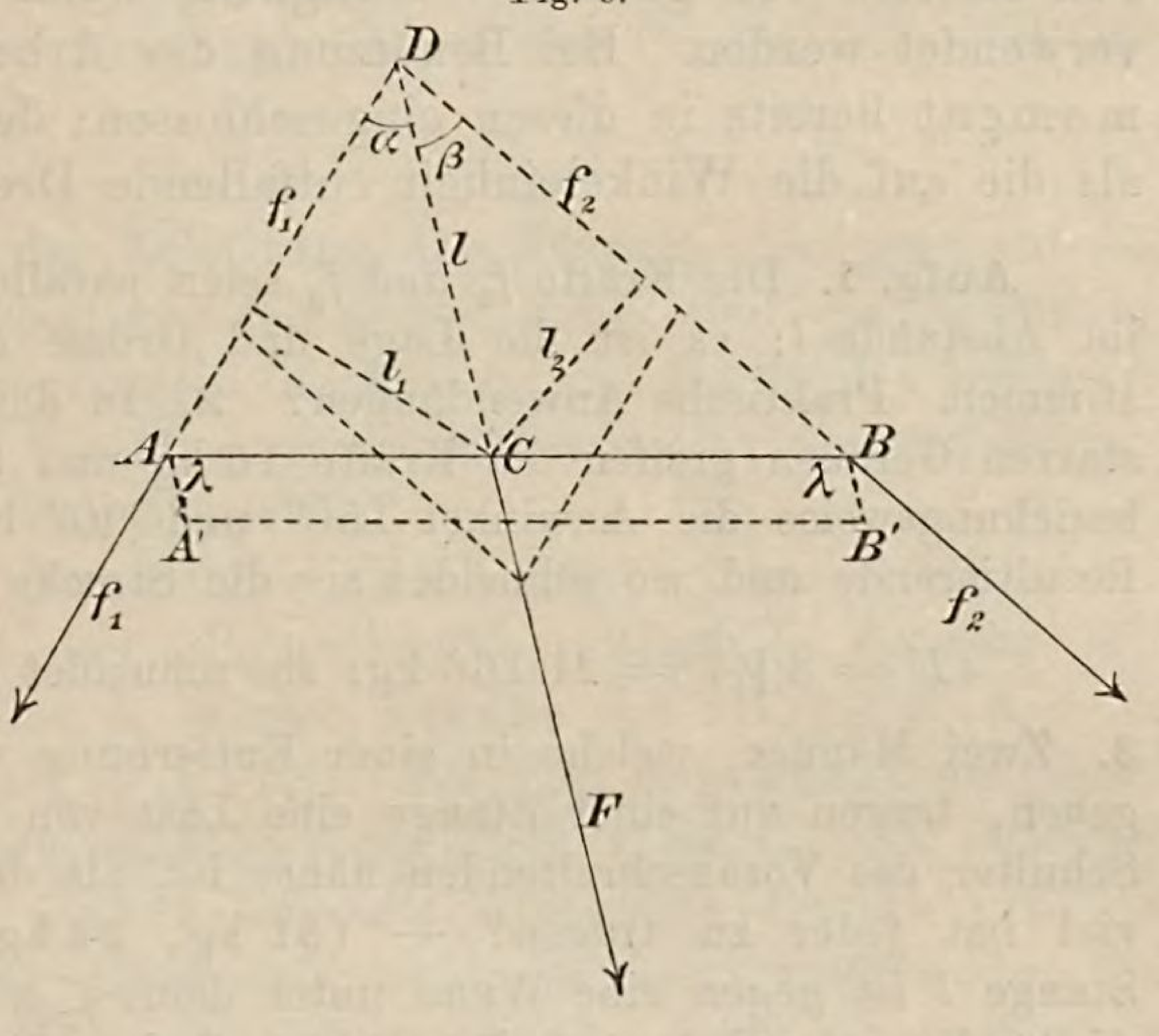
In Bezug auf das Arbeitsgesetz entspricht die Zerlegung dieser Grössen einer Zerlegung der resultierenden Arbeit, beziehungsweise auch der Aenderung der lebendigen Kraft, in mehrere Summanden.

Aufg. 1. Es sind die Mittelkräfte für die speciellen Fälle, dass die Seitenkräfte die $\sphericalangle\, \varphi = 0^0, 90^0, 180^0$ einschliessen, zu berechnen. **2.** Es ist die Resultierende von mehr als zwei Componenten zu berechnen und graphisch darzustellen. (Kräftenpolygon. $F = \Sigma f \cos (F \cdot f)$). **3.** Welches Verhältnis besteht zwischen der Stärke dreier Kräfte, die einander das Gleichgewicht halten, und den zwischen ihnen liegenden Winkeln? (Gleichgewichtsbedingung beim Keil.) **4.** Wie gross ist die geweckte Elasticität des Pendelfadens und die Resultierende aus dieser und dem Gewichte F für den Ausschlagswinkel α? **5.** Die Gelenkstangen einer Kniepresse bilden den Winkel 150^0; eine Kraft in der Stärke von 20 kg wirke in der Halbierungslinie dieses Winkels; wie gross ist der in der Richtung einer Gelenkstange wirkende Druck? — Bei welcher Grösse des Winkels übt die Kniepresse die grösste Wirkung aus? — (38·64 kg, bei 180^0.) **6.** Wie stark muss eine auf einem Eisenbahnwagen von 12 m Geschwindigkeit befindliche Röhre nach vorne geneigt werden, damit Regentropfen, welche mit 15 m Geschwindigkeit herabfallen, durch die Mitte der Röhre hindurchgehen? — ($38^0\, 40'$.) **7.** Wie stark wird ein von Nord nach Süd wehender Wind östlich abgelenkt, wenn er mit einer Geschwindigkeit von 11 m vom 60^0. zum 59^0. vorschreitet? — Erdhalbmesser = 6370 km. — ($32^0\, 21'$.) **8.** Drei unter rechten Winkeln an einen Punkt angreifenden Kräften von 4, 6, 8 kg soll durch eine vierte das Gleichgewicht gehalten werden; wie gross ist dieselbe und welche Winkel bildet ihre Richtung mit der der ursprünglichen Kräfte? — ($F = 10{\cdot}77$ kg, $4/F = \cos 68^0\, 11'\, 54''$.) **9.** Zu zeigen, wie eine fliegende Brücke durch die Stromkraft über den Fluss getrieben werden kann. **10.** Ebenso zu zeigen, dass man auf der See durch Anwendung von Segeln nach allen Richtungen, nur nicht gerade dem Winde entgegen, fahren kann. **11.** Wie muss man auf einem Kahn die Segel stellen, um den Wind möglichst auszunützen? — (Das Segel muss den Winkel zwischen Wind- und Fahrrichtung halbieren.) **12.** Ein Schiff soll an einem 32 m langen, in der Mitte des Schiffes befestigten Seile von Pferden stromaufwärts gezogen werden; die Pferde ziehen mit einer Kraft von 250 kg am Seile. a) Um welchen Winkel β muss das Schiff gegen die mit dem Ufer parallele Strömung verdreht werden, damit es stets 8 m Entfernung vom Uferwege bleibt? b) Wie gross ist die Kraft der Strömung F und welchen Druck f übt sie auf eine Seite des Schiffes aus? c) Wie weit lässt sich im äussersten Falle das Schiff an demselben Seile vom Uferwege entfernt erhalten? — ($\beta = 17^0\, 3'\, 23''$. $F = 222{\cdot}886$ kg, $f = 65{\cdot}375$ kg, c) $10^2/_3$ m. [Die Aufg. sind: 5 von Fliedner und Krebs, 6—8 von Müller-Erzbach, 9 und 10 von Reis, 11 von Martus, 12 von Daurer.]

Anmerkung. Die Aufgaben lassen sich graphisch und rechnungsmässig durch Zerlegung und Zusammensetzung der Kräfte und Geschwindigkeiten mittelst des Parallelogrammes behandeln. Die Lösungen gestalten sich aber auch sehr anschaulich, und die Rechnungen werden nicht complicierter, wenn man unmittelbar Arbeitswerte betrachtet. So z. B. erklärt sich die Wirkung der Segel beim Schiff aus der Differenz der lebendigen Kräfte der zuströmenden und längs der Segelfläche abfliessenden Luftmasse und der bei der Bewegung des Schiffes geleisteten Arbeit. Die Aufgabe erfordert die Berechnung der Arbeit des normal zur Segelfläche wirkenden Winddruckes bei der Bewegung des Schiffes. Die Lösung derselben führt (nach Abkürzung der betreffenden Gleichung durch den Weg) auf die Berechnung der in die Bewegungsrichtung des Schiffes fallenden Componente des Winddruckes.

§ 8. **Zusammensetzung der Kräfte an starren Körpern.** Im Anschluss an die vorstehenden Aufgaben soll folgender Fall betrachtet werden: An den Endpunkten einer unbiegsamen Geraden (Stange) wirken zwei Kräfte f_1 und f_2 (Fig. 5); es soll die Lage und Stärke der Mittelkraft F bestimmt werden. Die Aufgabe findet ihre Lösung in der Aufstellung der Arbeitsgleichungen für zwei Bewegungen, bei welchen die Summe der Arbeiten der Seitenkräfte der Arbeit der Resultierenden gleich ist.

Fig. 5.



Die betreffende Arbeitsgleichung für eine sehr kleine Parallelverschiebung λ der Stange in der Richtung der Resultierenden ist:

$$F \cdot \lambda = f_1 \cdot \lambda \cdot \cos(f_1 \lambda) + f_2 \cdot \lambda \cdot \cos(f_2 \lambda)$$

oder

$$F = f_1 \cdot \cos(f_1 F) + f_2 \cdot \cos(f_2 F).$$

Und für eine sehr kleine Drehung φ um den Angriffspunkt C der Resultierenden, bei welcher die entsprechend verlegt gedachten Angriffspunkte der drei Kräfte die Wege 0, $l_1 \varphi$, $l_2 \varphi$ beschreiben, ist die Arbeitsgleichung

$$0 = f_1 \cdot l_1 \cdot \varphi - f_2 \cdot l_2 \cdot \varphi,$$

daraus folgt

$$f_1 \cdot l_1 = f_2 \cdot l_2,$$

oder durch Einführung von $\frac{l_1}{l} = \sin\alpha$ und $\frac{l_2}{l} = \sin\beta$

$$f_1 : f_2 = \sin\beta : \sin\alpha .$$

Die hiemit aus den beiden Bewegungen gewonnenen Gleichungen entsprechen auch dem Kräfteparallelogramm, das ausgehend vom Schnittpunkte D aus den Seitenkräften f_1 und f_2 construiert werden kann. Sie bestimmen rechnungsmässig und graphisch die Mittelkraft F vollständig.

Ein Product aus der Kraft in die Normale, welche vom Drehpunkte C auf die Kraft gefällt wird, wie z. B. $f_1 \cdot l_1$ oder $f_2 \cdot l_2$, heisst Moment der Kraft inbezug auf den Punkt C. Die Arbeitsgleichung für die Drehung ergibt vorstehend den Satz, dass die Momente der Seitenkräfte inbezug auf einen Punkt der Resultierenden einander gleich sind. Der Satz ist für die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften von grosser Wichtigkeit, wenn dazu keine Arbeitswerte verwendet werden. Bei Benützung der Arbeitswerte ist das Kraftmoment bereits in diesen eingeschlossen; denn es ist nichts anderes, als die auf die Winkeleinheit entfallende Dreharbeit.

Aufg. 1. Die Kräfte f_1 und f_2 seien parallel mit einander und wirken im Abstande l; es ist die Lage und Grösse der Resultierenden zu bestimmen. Praktische Anwendungen? **2.** In den Punkten A und B einer starren Geraden greifen die Kräfte 16 kg und 8 kg an, mit der Geraden beziehungsweise die Anwinkel 150° und 90° bildend; wie gross ist die Resultierende und wo schneidet sie die Strecke AB? —

$(F = 8\sqrt{7} = 21{\cdot}166$ kg; sie schneidet AB in der Mitte.)

3. Zwei Männer, welche in einer Entfernung von 2·5 m hinter einander gehen, tragen auf einer Stange eine Last von 85 kg, die um 0·5 m der Schulter des Voranschreitenden näher ist, als der des Nachfolgenden; wie viel hat jeder zu tragen? — (51 kg, 34 kg.) **4.** Eine gewichtslose Stange l ist gegen eine Wand unter dem $\sphericalangle\,\alpha$ gestellt und trägt in den Abständen a und b von den beiden Enden die Last F; welchen Druck übt dieselbe gegen Wand und Boden aus, und mit welcher Schubkraft strebt sie an Wand und Boden hinzugleiten? [Die Aufg. 2 und 3 sind von Daurer und 4 von Reis.]

§ 9. **Kinetische und potentielle Energie.** Die kinetische Energie oder lebendige Kraft ist die Arbeitsfähigkeit eines bewegten Körpers. Für eine Masse m, die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, wurde in § 4 dafür die mathematische Form $\frac{1}{2} \cdot mv^2$ gefunden. Diese Energie wird z. B. bei einem vertical nach aufwärts geworfenen Körper in Arbeit verwandelt, indem sie das Gewicht des Körpers um eine bestimmte Höhe emporhebt. Wird der Körper im höchsten Punkte seines Weges durch Unterschieben einer Unterlage vor dem Fallen geschützt und in Ruhe gehalten, so scheint es, als wäre die geleistete

Arbeit verloren gegangen. Doch ist in Wirklichkeit auch der gehobene Körper leistungsfähig, er besitzt ebenfalls Energie; denn entfernt man die Unterlage, so fällt der Körper längs seiner früheren Steighöhe zurück und erlangt genau die ursprüngliche kinetische Energie wieder. (Vgl. § 2.) Ähnliche Beispiele sind die Leistungsfähigkeit eines gespannten Bogens, einer zusammengedrückten elastischen Feder, eines comprimierten Gases. Die Energie der ruhenden Körper heisst Energie der Lage, nach Rankine potentielle Energie und nach Helmholtz Spannkraft. Das Auftreten der potentiellen Energie ist immer mit einer Änderung der Lage der Körper oder ihrer Theile verbunden. Schwere Körper müssen von der Erde emporgehoben werden. Der Bogen muss gekrümmt, das Gas zusammengedrückt und daher dessen Theilchen einander genähert werden, um eine Energie der Lage oder potentielle Energie zu erzeugen.

Gleichwie die kinetische so wird auch die potentielle Energie durch eine äquivalente Arbeit gemessen; so wird z. B. die potentielle Energie eines gehobenen Gewichtes durch das Product aus Gewicht und Hubhöhe bestimmt.

§ 10. **Das Princip der Erhaltung der Energie.** Gestützt auf die Gleichwertigkeit von Arbeit und lebendiger Kraft, und mit Benützung der voranstehenden Benennungen lässt sich nun leicht das genannte Princip darstellen. Wir beziehen uns zunächst wieder nur auf Körper unter dem Einfluss der Schwerkraft F.

Für einen Körper, der auf der Erdoberfläche oder auf einer anderen Grundfläche liegt, sei allgemein die potentielle Energie W_0. Bei Hebung auf die Höhe h_1 wächst dieselbe auf $(W_0 + F \cdot h_1)$. In der Höhe h_2 ist sie $(W_0 + F \cdot h_2)$. Bei der Bewegung von einer Höhe in die andere, nach aufwärts oder nach abwärts, frei oder auf vorgeschriebener Bahn, ändert sich die kinetische Energie um die Differenz der potentiellen Energien. Sind die Geschwindigkeiten des Körpers in den beiden Höhen beziehungsweise v_1 und v_2, so besteht daher die Gleichwertigkeit

$$(W_0 + F \cdot h_1) - (W_0 + F \cdot h_2) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

und daraus folgt

$$W_0 + F \cdot h_1 + \frac{1}{2} m v_1^2 = W_0 + F \cdot h_2 + \frac{1}{2} m v_2^2 = \text{const.}$$

Die durch das Gleichheitszeichen verbundenen Ausdrücke geben die Summe der potentiellen und kinetischen Energien des Körpers beziehungsweise in den beliebigen Höhen h_1 und h_2 an, und daher lehrt die Gleichung den Satz: „Die Summe der potentiellen und kinetischen Energien oder kurz die Energie des Körpers bleibt während der Be-

wegung constant." Dies ist der Satz von der Erhaltung der Energie[1]).

Bei der Bewegung nach aufwärts finden die Energieänderungen im entgegengesetzten Sinne statt, als bei der Bewegung nach abwärts; die Summe der Energien bleibt aber immer dieselbe.

Wenn auf den Körper mehrere Kräfte wirken, z. B. auf einfache Maschinen Kraft und Last, auf das physische Pendel u. a., so kann der vorstehende Satz auf jede einzelne Kraft bezogen, und die darnach gebildeten mathematischen Formen können durch Addition verbunden werden. Der Vorgang ist durch das in den §§ 6 und 7 behandelte Princip der Kräftezusammensetzung gerechtfertigt. Man erhält somit für ein System von Kräften und Massentheilchen

$$W_0 + \sum \left(Fh + \frac{1}{2} mv^2\right) = \text{const.}$$

Die Summe ist auf alle Kräfte und Massentheile auszudehnen, die an der Bewegung theilnehmen.

Die Gleichung bewährt sich in allen genannten speciellen Fällen, in denen sie auch zur Ableitung der betreffenden Gesetze benützt werden kann. Allein reicht sie jedoch zur Lösung dieser Aufgaben nicht aus; es müssen noch die Bewegungsbedingungen, die von der Einrichtung der Maschinen abhängen, genau bekannt sein und mathematisch formuliert werden. Die betreffenden Bedingungen lassen sich aber immer mit dem Energiegesetze innig verbinden und auf einfache Weise zur Lösung der Aufgaben verwenden.

Vor solchen speciellen Anwendungen soll noch in Kürze auf die allgemeine Bedeutung des Principes der Erhaltung der Energie hingewiesen werden.

Die Erfahrung lehrt, dass oft mechanische Arbeit verbraucht wird, ohne dass eine gleichwertige lebendige Kraft zum Vorschein kommt. Robert Mayer hat (1842) zahlenmässig bewiesen, dass auch in diesen Fällen die Arbeit nicht verloren geht, sondern dass dafür andere physikalische Kräfte geweckt werden[2]). Er drückte durch mechanische Arbeit Luft zusammen und fand, dass eine der Arbeit proportionale Wärmemenge entwickelt wurde, ferner dass umgekehrt die Luft bei der Ausdehnung die aufgewendete Arbeit wieder zu leisten vermochte und sich dabei ebenso sehr abkühlte, als sie sich früher erwärmt hatte. Daraus folgt, dass auch die Wärme eine Energie ist, und zwar eine der mechanischen Arbeit gleichwertige Energie. Als solche tritt sie sehr häufig in Begleitung mechanischer Erscheinungen infolge von verbrauchter Arbeit zur Ueberwindung der Reibung auf. Und ebenso wie die Wärme sind Schall, Licht, Elektri-

1) Clausius: Mech. Wärmetheorie. I. 3. Aufl. S. 21.

2) R. Mayer: Die Mechanik d. Wärme. 3. Aufl. Herausggb. v. Weyrauch.

cität und Magnetismus Energien. Wenn daher durch mechanische Arbeit Wärme oder Elektricität erzeugt wird, so ist die Arbeit nicht verloren, sondern sie ist in eine gleichwertige Menge einer anderen physikalischen Energie übergeführt worden. Die gesammte in Erscheinung tretende Energie bleibt dem Werte nach unverändert. Auf diese umfassende Bedeutung der Erhaltung der Energie hat bereits R. Mayer ausdrücklich hingewiesen. In seiner Anwendung auf alle Energien der Natur nimmt der Satz die von Clausius (1865) ausgesprochene Form an: „Die Energie des Weltalls ist constant.“

Darnach gilt das Energieprincip für alle Naturerscheinungen und wird zu einer Grundlage für die ganze Naturwissenschaft: Eine Erscheinung kann für sich allein niemals bestehen, sondern sie ist immer im Zusammenhange mit einer Reihe anderer Erscheinungen; die Verbindung gibt das Energieprincip. Dasselbe zwingt uns, die Erscheinungen als eine Umwandlung der Energie von einer Form in eine andere zu betrachten und gibt damit zugleich Ursache und Wirkung an. Auf diese Weise werden sämmtliche Naturerscheinungen in Zusammenhang gebracht, und die Lehre von diesen Erscheinungen als die Lehre von den Energieverwandlungen gekennzeichnet.

Anmerkung. Aus der angegebenen mathematischen Form lassen sich einige historisch wichtige Principien der Mechanik ableiten:

a) Der Satz der lebendigen Kräfte. Man erhält denselben durch Bildung der Energiedifferenzen mit Rücksicht darauf, dass die Aenderungen dh und dv entgegengesetztes Vorzeichen erhalten. Man erhält

$$\Sigma F \cdot dh = \Sigma m v dv .$$

Findet die Bewegung infolge von Unfreiheit nicht in der Richtung dh, sondern längs dl statt, so ist zu setzen

$$F \cdot dh = F \cdot \left(\frac{dh}{dl}\right) dl = f \cdot dl$$

und man gewinnt für die Äquivalenz von Arbeit und lebendiger Kraft die Form

$$\Sigma f \cdot dl = \Sigma m v dv .$$

Die Summe bezieht sich zunächst auf die verschiedenen Kräfte und Massen; sie kann aber auch auf eine beliebige Anzahl von Wegelementen ausgedehnt werden.

Der Satz der lebendigen Kraft wird auch in den späteren Untersuchungen oft angewendet werden; desgleichen:

b) das Princip der virtuellen (möglichen) Verschiebungen. Dasselbe geht aus dem Satze der lebendigen Kräfte hervor, wenn die Geschwindigkeitsänderung $dv = 0$ gesetzt wird; seine mathematische Form ist

$$\sum F \cdot \left(\frac{dh}{dl}\right) dl = \sum f \cdot dl = 0 .$$

Es gilt für den Gleichgewichtszustand eines Kräftensystems und sagt aus, dass in diesem Zustande die Summe der bei einer virtuellen oder mit dem Systeme verträglichen (möglichen) Verschiebung geleisteten Arbeiten gleich Null ist.

c) Das D'Alembert'sche Princip. Dasselbe ist eine besondere Form des Satzes der lebendigen Kräfte; denn setzt man in der Gleichung für diesen $v = dh/dt$, so erhält man den gesuchten Ausdruck

$$\sum \left(F - m\frac{dv}{dt}\right) dh = 0 .$$

Hierin ist $dv/dt = a$ die Beschleunigung der betreffenden Massentheilchen m. Für eine beliebig gerichtete Bewegung dl gilt

$$\sum \left(F\frac{dh}{dl} \cdot dl - m \cdot \frac{dl}{dt} \cdot dv\right) = \sum (f - ma) dl = 0 .$$

In dieser Form ist auch die Beziehung zum Principe der virtuellen Verschiebungen, aus dem der D'Alembert'sche Satz hervorgegangen ist, deutlich zu erkennen. Denkt man die auf jedes Massentheilchen m wirkende Kraft f um ihre Wirkung ma vermindert, so wird die Bewegungsänderung aufgehoben, und es herrscht Gleichgewicht. Die letzte Summe gibt für diesen gedachten Gleichgewichtszustand den Satz der virtuellen Verschiebungen an.

d) Der Hamilton'sche Satz. Seine mathematische Form ist

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (U + T) dt = 0 \quad \text{oder} \quad \int_{t_0}^{t_1} (\delta U + \delta T) dt = 0 ,$$

δU und δT bedeuten die Änderungen der Arbeit und lebendigen Kraft, die für die Anfangs- und Endzeit verschwinden müssen. Der Satz folgt leicht aus dem Satze der lebendigen Kräfte oder aus dem D'Alembert'schen Principe[1]).

§ 11. **Bewegung auf der schiefen Ebene.** Die schiefe Ebene wurde bereits (§ 5 und 6) zur Erläuterung der Grundgesetze benützt; es sollen nun die Bewegungserscheinungen auf derselben durch die Energiewerte und die daraus abgeleiteten Grössen behandelt werden.

Es sei gegeben das Gewicht F und die Masse m eines Körpers, ferner die Länge l und die Neigung α der schiefen Ebene; die Beschleunigung der Schwere sei A. (Siehe § 6, Fig. 3.) Mit diesen Grössen ausgedrückt ist der unveränderliche Energiewert, bezogen auf die Basis der Ebene,

1) Siehe E. Mach: Entwicklg d. Mech. S. 356.
W. Thomson u. P. G. Tait: Handb. d. theor. Ph. Deutsch v. Helmholtz u. G. Wiedemann. S. 279—284.

$$W = F \cdot h = F \cdot l \cdot \sin\alpha$$

und nach der Bewegung um die Strecke x

$$W = F \cdot (l - x) \sin\alpha - \frac{1}{2} mv^2.$$

Um zunächst die Beschleunigung a längs der schiefen Ebene zu ermitteln, setzen wir für $F = mA$ und bestimmen die Energieänderungen bei der Bewegung um dx; wir erhalten aus der letzten Gleichung

$$dW = 0 = - mA \cdot \sin\alpha \cdot dx + mv\,dv.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf $dx = v \cdot dt$

$$A \cdot \sin\alpha = \frac{dv}{dt} = a.$$

Mittelst des Wertes für die Beschleunigung a oder mittelst der lebendigen Kraft lassen sich nun auch andere Stücke bestimmen; z. B. die Endgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2A \cdot l \cdot \sin\alpha} = \sqrt{2A \cdot h}$$

oder die Zeit

$$t = \sqrt{\frac{2l}{A \cdot \sin\alpha}}.$$

Der Wert für die Fallzeit t längs der schiefen Ebene kann dazu dienen, um an der Hand einer einfachen geometrischen Construction den Galilei'schen Satz nachzuweisen: Der verticale Durchmesser ($l/\sin\alpha$) eines Kreises ist isochron mit jeder vom oberen Endpunkte in diesem Kreise gezogenen Sehne (l). — Da ein Körper, von dem höchsten Punkte eines Kreises ausgehend, in der Richtung jeder beliebigen Sehne sich bewegen könnte, um dem Energieprincipe zu entsprechen, in Wirklichkeit jedoch längs der steilsten Sehne, des längsten Weges in derselben Zeit, fällt, so folgert Ostwald allgemein: Von allen möglichen Energieumwandlungen wird diejenige eintreten, welche in gegebener Zeit den grösstmöglichen Umsatz ergibt[1]).

Die Zerlegung der Schwerkraft F in die Componenten längs der schiefen Ebene und normal zu derselben ergibt sich durch entsprechende Zerlegung des Arbeitswertes oder der Änderung der potentiellen Energie. Befindet sich m in der verticalen Entfernung z über der Basis in Ruhe, so ist die Energie $w = F \cdot z$ und demnach ein Arbeitselement

$$dw = F \cdot dz = F \cdot \left[\left(\frac{dz}{dx}\right) \cdot dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) \cdot dy\right].$$

In der Figur lässt sich nämlich dz als Diagonale eines Parallelogrammes darstellen, dessen Seiten das Längenelement dx und das Normalelement dy sind; dz erscheint darnach als die Summe der Projectionen von dx und dy auf der Diagonale, und es sind die Quotienten

1) W. Ostwald: Lehrb. d. allg. Ch. Bd. I. Chem. Energie. S. 37.

$$\frac{dz}{dx} = \sin\alpha \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dy} = \cos\alpha,$$

damit wird

$$dw = F \cdot \sin\alpha \cdot dx + F \cdot \cos\alpha \cdot dy$$

und die verlangten Componenten sind nach dem Zerlegungsprincipe

$$f_x = \left(\frac{dw}{dx}\right) = F \cdot \sin\alpha \quad \text{und} \quad f_y = \left(\frac{dw}{dy}\right) = F \cdot \cos\alpha.$$

Aufg. 1. Ein Eisenbahnzug von 100 Tonnen à 1000 kg läuft auf einer Rampe von $^1/_{30}$ Steigung herab; welche Geschwindigkeit und welche lebendige Kraft hat er nach 3 Minuten? $A = 10$ m. — (60 m, 18 Mill. kgm.) **2.** Wenn nach Galilei's Versuchsweise in einer 40 m langen, glatten Rinne Kugeln in 8 Secunden hinab rollen, wie gross ist die Beschleunigung in der Richtung der Rinne und unter welchem Winkel ist die Rinne geneigt? $A = 9{\cdot}81$ m. — ($^5/_4$ m, $7^0\ 19^1/_4{}'$.) **3.** Wie muss ein Dachstuhl bei gegebener Grundfläche geneigt sein, damit der darauf fallende Regen in der kürzesten Zeit abläuft? — (45^0.) **4.** Wie weit wird sich ein Körper auf einer schiefen Ebene, deren Neigungswinkel gegen den Horizont 40^0 beträgt, aufwärts bewegen, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit 100 m ist? Welche Zeit braucht der Körper beim Hinabbewegen auf der schiefen Ebene von seinem Ruhepunkt aus? — (792·92 m, 15·86 Sec.) **5.** Ein Körper von 800 kg Gewicht steigt eine schiefe Ebene, die 600 m lang ist und mit dem Horizont einen Winkel 18^0 bildet, aufwärts. Mit welcher lebendigen Kraft muss derselbe die schiefe Ebene betreten, um gerade das obere Ende derselben zu erreichen? Wie gross muss dieselbe sein, wenn er noch mit der Hälfte der Geschwindigkeit, mit der er die Ebene betrat, oben anlangen soll, und nach welcher Zeit kommt er in beiden Fällen oben an? — (148 330 kgm, 197 770 kgm, 19·9 Sec., 11·49 Sec.) — [Aufg. 1 ist von Reis, 2 von Müller-Erzbach, 3—5 von Budde.]

§ 12. **Pendelbewegung.** Ein Pendel nennt man einen um eine horizontale Achse drehbar aufgehängten Körper. Besteht dieser aus einem schwerlosen Faden und einem an dessen Ende befestigten Massentheilchen (einem kleinen kugelförmigen Körperchen), so heisst das Pendel ein einfaches oder mathematisches. Galilei hat, angeregt durch die Schwingungen der Kronleuchter im Dome zu Pisa, deren Dauer er nach seinen Pulsschlägen bestimmte, insbesondere durch den Vergleich der Pendelbewegung mit der Bewegung auf der schiefen Ebene die Schwingungsgesetze des Pendels aufgestellt. Huygens untersuchte auch die Bewegung des einfachen Pendels für den Fall, als dieselbe nicht in einer Ebene, sondern im Raume stattfindet. Der Pendelfaden beschreibt alsdann eine Kegelfläche, und das Pendel heisst ein Kegelpendel.

Es soll zunächst die Bewegung dieses Pendels betrachtet werden. Das Massentheilchen m (Fig. 6) werde um den Winkel α aus der verticalen Richtung herausgezogen und erhalte dann durch einen

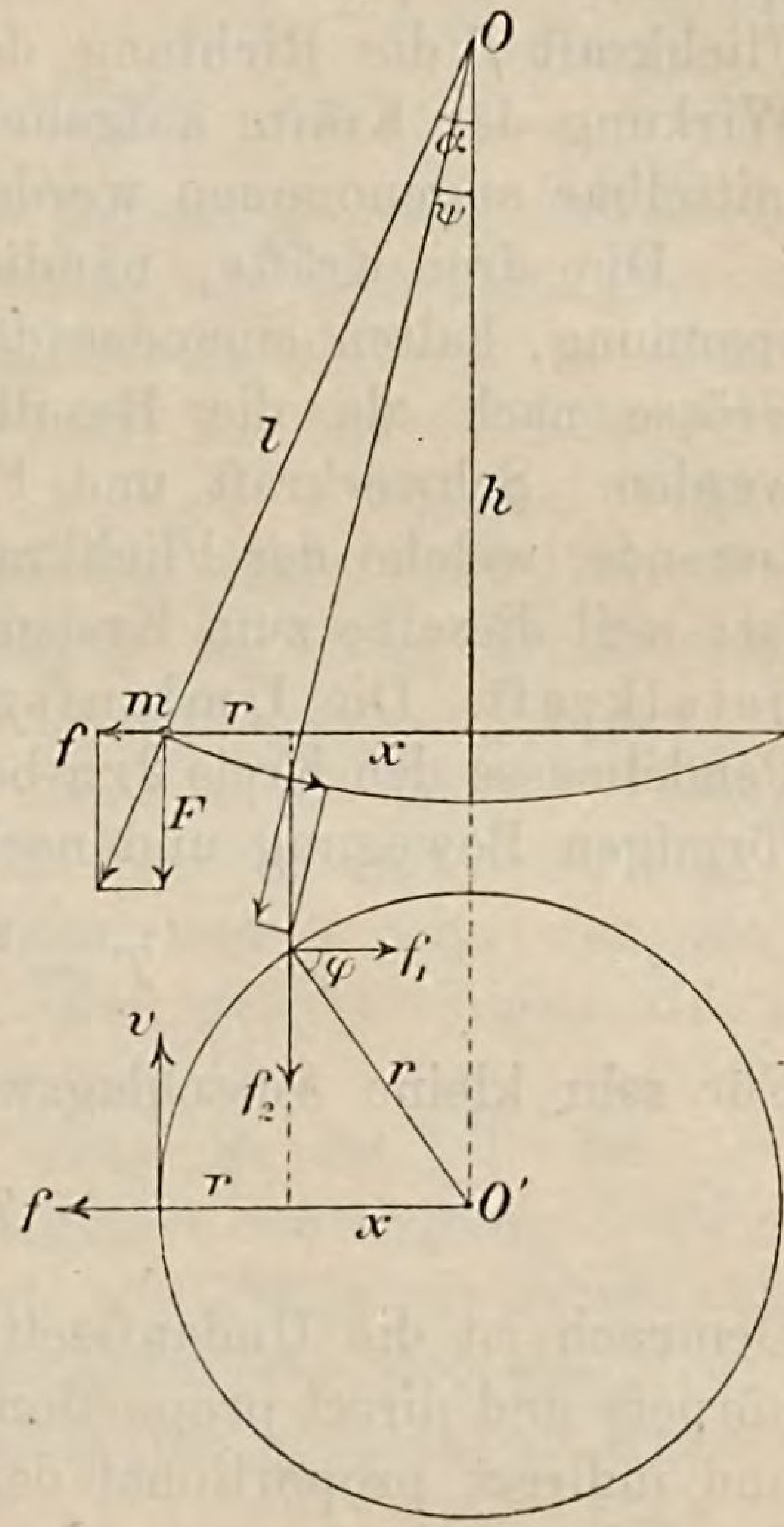
Anstoss in normaler Richtung zur Ausschlagsebene die Geschwindigkeit v. Wenn die potentielle Energie von der tiefsten Lage des Pendelkörpers gezählt wird, so ist sie gegeben durch

$$F(l - h) = mA \cdot l(1 - \cos\alpha),$$

und die gesammte Energie ist

$$W = mA \cdot l(1 - \cos\alpha) + \frac{1}{2} \cdot mv^2.$$

Fig. 6.



Dieser Wert bleibt während der ganzen folgenden Schwingungserscheinungen unverändert erhalten. Setzt man

$$v = r \cdot \omega,$$

wobei ω die Geschwindigkeit eines Punktes, für welchen $r = 1$, die sogenannte Winkelgeschwindigkeit ist, so wird

$$W = mA \cdot l(1 - \cos\alpha) + \frac{1}{2} mr^2 \cdot \omega^2 = \text{const.}$$

Die Energieänderung mit Rücksicht auf die Änderung der potentiellen und kinetischen Energie im entgegengesetzten Sinn ist

$$dW = m \cdot A \cdot l \sin\alpha \cdot d\alpha - m\omega^2 r dr - mr^2 \omega d\omega = 0.$$

Durch Einführung der Werte, die aus den Beziehungen $r = l \sin\alpha$ und $v = \omega \cdot r$ folgen, erhält man

$$dW = \left(m \cdot A \cdot \operatorname{tg}\alpha - m\frac{v^2}{r}\right) dr - mr^2 \cdot \omega d\omega = 0.$$

Die beiden Glieder von dW bedeuten die Arbeiten von Kräften, welche beziehungsweise in der Richtung des Kreishalbmessers r und dazu normal wirken. Ist die erstere Kraft, die durch den Klammerausdruck gegeben ist, gleich Null, so wird gleichzeitig auch mit der Änderung der Winkelgeschwindigkeit $d\omega$ die zweite gleich Null. Dies sind die Bedingungen für eine gleichförmige Kreisbewegung von m um h. Aus dem Verschwinden des Klammerausdruckes ($= dW/dr$) folgt

$$m \cdot A \cdot \operatorname{tg}\alpha = m\frac{v^2}{r} = f.$$

Diese infolge der kinetischen Energie der Kreisbewegung entwickelte Kraft wirkt in der Richtung des Halbmessers nach auswärts und

heisst Fliehkraft oder Centrifugalkraft; sie ist der kinetischen Energie direct und dem Krümmungshalbmesser indirect proportional.

Eine einfache geometrische Darstellung (die verticale Projection der Fig. 6) zeigt, dass der letzten Bedingungsgleichung dann entsprochen wird, wenn die Mittelkraft von der Schwerkraft F und der Fliehkraft f die Richtung des Fadens hat. Da in diesem Falle die Wirkung der Kräfte aufgehoben wird, hätte die Bedingung auch unmittelbar angenommen werden können.

Die drei Kräfte, nämlich Schwerkraft, Fliehkraft und Fadenspannung, halten einander das Gleichgewicht; jede einzelne kann der Grösse nach als die Resultierende der beiden anderen angesehen werden. Schwerkraft und Fadenspannung geben somit eine Resultierende, welche der Fliehkraft f gleich und entgegengesetzt gerichtet ist; weil dieselbe zum Kreismittelpunkte hin wirkt, heisst sie Centripetalkraft. Die Umlaufszeit T des Pendels, während welcher die Pendelmasse den Kreis $2r\pi$ beschreibt, ist nach dem Gesetze der gleichförmigen Bewegung und nach den vorstehenden Werten für f und r

$$T = \frac{2r\pi}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{A}}.$$

Für sehr kleine Ausschlagswinkel, für die $\cos\alpha = 1$ ist, erhält man

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{A}}.$$

Demnach ist die Umlaufszeit unabhängig von der Masse des Pendelkörpers und direct proportional der Quadratwurzel aus der Pendellänge und indirect proportional der Quadratwurzel aus der Beschleunigung der Schwere.

Das Gesetz stimmt auch mit der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels überein, das kleine Schwingungen in einer Ebene ausführt. Um dies zu beweisen, haben wir den auch für andere Schwingungsbewegungen wichtigen Satz zu begründen, dass eine geradlinige Schwingung als Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung betrachtet werden kann.

Figur 6 mag zwei Pendel versinnlichen: ein ebenes einfaches Pendel, das sehr kleine Schwingungen in der Zeichnungsebene ausführt, und das bereits behandelte Kegelpendel, von welchem der Basiskreis des Kegels in der horizontalen Projection dargestellt ist. Der Kreishalbmesser r und $\sphericalangle\,\alpha$ des Kegelpendels entsprechen dem grössten Ausschlage des anderen einfachen Pendels. Die in einer beliebigen Lage des Pendels (siehe Fig.) zum Kreismittelpunkt wirkende Kraft (Centripetalkraft) des Kegelpendels

$$f = m \cdot A \cdot \operatorname{tg}\alpha = m \cdot A \cdot r/h$$

lässt sich in zwei Componenten zerlegen, von denen die eine f_1 zur Schwingungsebene parallel und die andere f_2 dazu normal ist. Die

erstere, parallele Componente ist nun der bewegenden Componente des ebenen Pendels gleich; denn die eine ist

$$m \cdot A \cdot \frac{r}{h} \cdot \cos \varphi = m \cdot A \cdot \frac{x}{h}$$

und die andere des ebenen Pendels

$$m \cdot A \cdot \sin \psi = m \cdot A \cdot \frac{x}{l}.$$

Für sehr kleine Ausschlagswinkel α ist h nahezu gleich l, und beide Kräfte sind einander gleich. In der Richtung der Schwingungsebene wirken also auf beide Pendel gleiche Kräfte; die normal zu dieser Ebene wirkende Componente des Kegelpendels hat auf die Bewegung in der Richtung der Schwingungsebene keinen Einfluss. Sähen wir von dieser normalen Kraft ab, so müssten beide Pendel dieselbe Bewegung vollführen; infolge ihrer Wirkung wird das Kegelpendel von dem anderen Pendel nur normal zur Schwingungsebene verschoben. Der Ort der Pendelmasse des ebenen Pendels muss daher in jedem Augenblicke als die Projection des Ortes des Pendelkörpers vom Kegelpendel auf die Schwingungsebene erscheinen, und es folgt, dass eine geradlinige Schwingung als Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung betrachtet werden kann.

Ohne Rücksicht auf das einfache, ebene Pendel gilt der ausgesprochene Satz allgemein für jene geradlinigen Schwingungen, deren Kraft nach demselben Gesetze wirksam ist, wie die in die betreffende Richtung fallende Componente des Kegelpendels, also stets der Elongation x proportional ist. Dieses Gesetz ist für elastische Kräfte giltig.

Für die Pendelbewegung folgt, dass bei entsprechend kleinen Ausschlagswinkeln die Umlaufszeit des Kegelpendels der Schwingungszeit des ebenen Pendels gleich ist, und dass somit mit dem obigen Gesetze für die Umlaufszeit auch das Gesetz der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels gegeben ist. Die Richtigkeit desselben lässt sich leicht durch Versuche bestätigen.

Die Abhängigkeit von der Beschleunigung der Schwere kann man mittelst des Mach'schen Apparates nachweisen, bei welchem die Schwingungsebene gegen eine Verticalebene unter beliebigem Winkel β geneigt werden kann; die hier wirksame Componente der Schwerkraft ist $A \cos \beta$; dieselbe kann mit dem Winkel β beliebig geändert werden[1]).

Aufg. 1. Die Kuppel der Peterskirche in Rom würde gestatten, ein annähernd einfaches Pendel von 128·5 m Länge anzubringen. Wie gross wäre dessen Schwingungsdauer, wenn $A = 9{\cdot}803$ m zu setzen ist? —

1) Eine genauere elementare Ableitung für die Schwingungsdauer bei beliebig grossem Ausschlagswinkel hat W. Pscheidl (Ztsch. f. Rlw. Wien. 1878. S. 407) gegeben.

(11·37 Sec.) **2.** Um wie viele Schwingungen macht ein 1 m langes, einfaches Pendel in einem Tage weniger als ein Secundenpendel, die Beschleunigung $A = 9{\cdot}809$ m vorausgesetzt? — (266 Schwingungen.) **3.** Ein Pendel von 3·975 m Länge hat eine Schwingungszeit von 2 Sec., wie gross ist die Beschleunigung? — (9·808 m.) **4.** Eine Uhr mit Secundenpendel, die in Paris (unter $48^0\,50'\,14''$ nördl. Br.) richtig gieng, also täglich 86 400 Sec. schlug, blieb, wie Richer 1672 beobachtete, in Cayenne (unter nahe 5^0 nördl. Br.) täglich 128 Sec. zurück. Um wie viel musste das Pendel, dessen Länge = 0·99385 m war, verkürzt werden, damit es in Cayenne Secunden schlagen konnte? — (0·002942 m.) **5.** Die Kugeln des Centrifugalregulators einer Dampfmaschine machen n Umläufe in der Minute; wie gross ist die Höhe h des dadurch gebildeten Kegels? $A = 9{\cdot}81$ m. — (Aus zwei Werten für die Umlaufszeit folgt $894{\cdot}8/n^2 m$.) **6.** Wie gross ist bei einem Centrifugalregulator, dessen Pendelstange l Meter lang und dessen Winkelgeschwindigkeit ω sind, die Höhe z, um welche die auf der Achse gleitenden Muffe gehoben werden? — ($z = l - A/\omega^2$.) **7.** Am Äquator ist die Länge des Secundenpendels $l_0 = 0{\cdot}99093$ m, in Duisburg (unter $51^0\,26'$ nördl. Br.) $l_1 = 0{\cdot}99408$ m, am Pol $l_2 = 0{\cdot}99608$ m. Wie gross ist für diese drei Orte die Beschleunigung der Schwerkraft? — (9·7800 m, 9·8112 m, 9·8308 m.) **8.** Eine Uhr, deren Pendel, wenn sie richtig geht, eine Schwingungsdauer $= {}^3/_4$ Sec. haben muss, geht täglich 10 Minuten vor. Um wie viel muss der Schwingungspunkt gesenkt werden, damit die Uhr richtig gehe? — (0·00766 m.) [Die Aufg. 1 und 2 sind von S. Daurer, 3—6 von Fliedner und Krebs, 7 und 8 von Budde.]

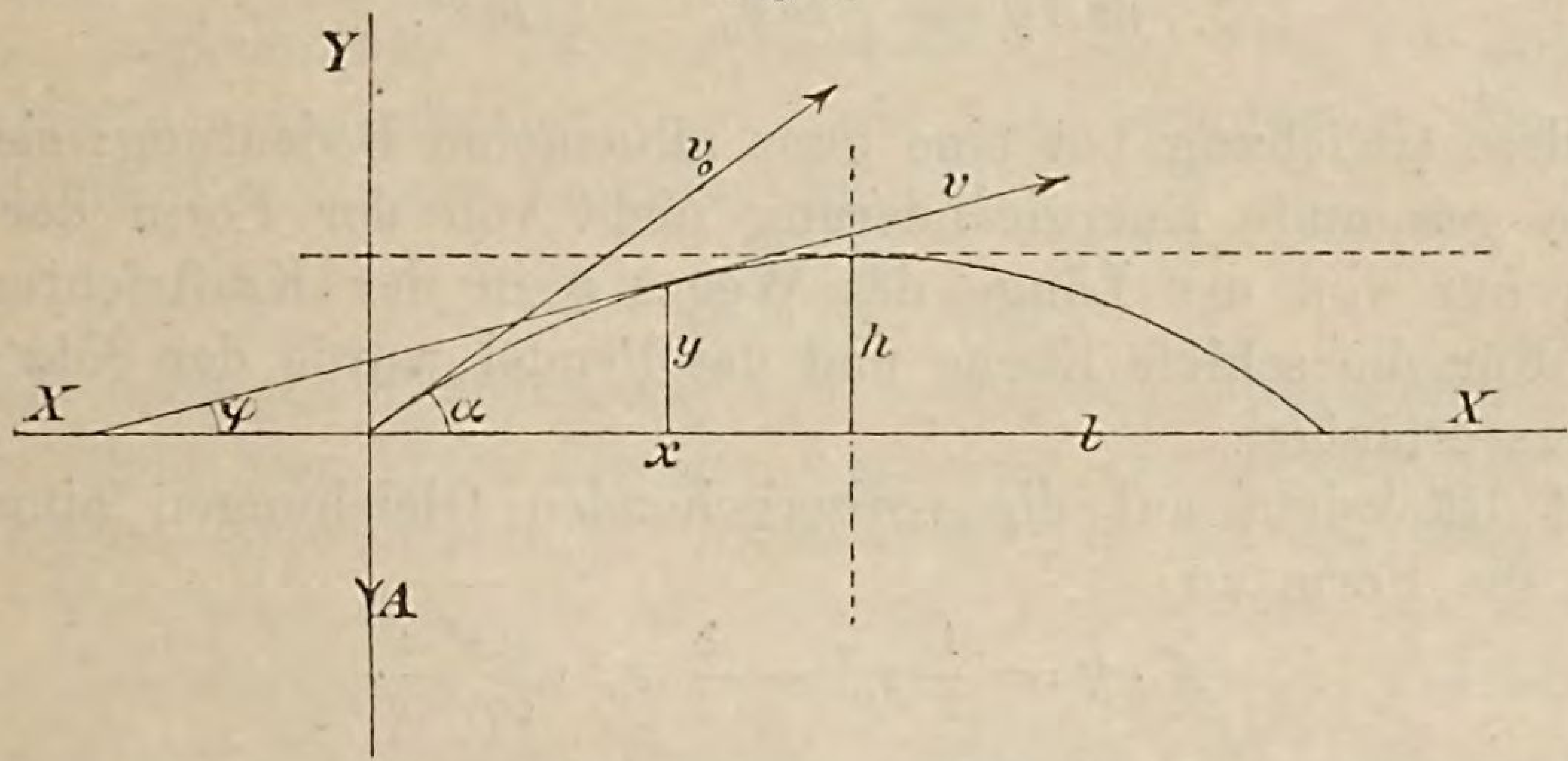
§ 13. **Wurfbewegung.** Die Bewegung, welche ein horizontal oder schief geworfener Körper ausführt, ist nach Galilei eine Zusammensetzung einer verticalen Fallbewegung und einer horizontalen oder schiefen gleichförmigen Bewegung; die Bewegungen gehen unabhängig von einander vor sich. Die Anwendung des Parallelogrammes der gleichzeitigen Bewegungen (§ 6) führt leicht zur graphischen Darstellung der Flugbahn. Bei der Berechnung mittelst des Energieprincipes muss die Grösse der constanten Energie, die durch die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers bestimmt wird, ferner die Grösse und Richtung der Schwerkraft bekannt sein. In letzterer Beziehung setzen wir voraus, dass die Schwerkraft constant und ihre verticalen Richtungen in den einzelnen Punkten der Bahn parallel zu einander sind.

Der allgemeinste Fall ist der schiefe Wurf; für denselben gilt folgende Betrachtung: Ein Massentheilchen m werde unter dem Winkel α gegen die Wagrechte X mit der Geschwindigkeit v_0 in Bewegung gesetzt (Fig. 7) und alsdann der Einwirkung der Schwerkraft, deren Beschleunigung $= A$, überlassen. Wird die potentielle Energie nach der Erhebung über der X-Achse gerechnet, also nach der Y-Coordinate, so ist der unveränderliche Energiewert gegeben durch die anfängliche kinetische Energie ${}^1/_2 \cdot m v_0^2$. Hat sich der

Körper um die Höhe y erhoben, so ist die potentielle Energie $m \cdot A \cdot y$, die kinetische $\frac{1}{2} m v^2$ und die Summe beider muss der anfänglichen Energie gleich sein; es besteht daher für jeden beliebigen Punkt der Flugbahn die Energiegleichung

$$W = m \cdot A \cdot y + \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2.$$

Fig. 7.



Die ganze Erscheinung beruht nun auf einer Umwandlung der kinetischen Energie in potentielle und umgekehrt. Die dabei stattfindenden Energieänderungen kann man nach Galilei's und Newton's Zerlegungsprincip in Theile zerlegen, indem man in der Form

$$dW = \left(\frac{dW}{dx}\right) dx + \left(\frac{dW}{dy}\right) dy = 0,$$

$$\left(\frac{dW}{dx}\right) dx = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dW}{dy}\right) dy = 0$$

setzt. Nach der ersteren der beiden letzten Gleichungen folgt

$$v \left(\frac{dv}{dx}\right) dx = 0,$$

d. h. in der horizontalen Richtung findet keine Energieänderung und keine Änderung der Geschwindigkeit statt; die Bewegung in dieser Richtung ist gleichförmig; die Geschwindigkeit ist

$$v_x = v \cos \varphi = v_0 \cos \alpha.$$

Der Satz ist von ganz allgemeiner Bedeutung: Die wagrechte Richtung ist nämlich die normale Richtung zur wirkenden Schwerkraft; in der Horizontalen findet daher keine Arbeitsleistung statt und es gilt der Satz vom Beharrungsvermögen. Horizontale Flächen haben wegen dieser Besonderheit auch einen eigenen Namen; man nennt sie Niveauflächen oder Flächen gleicher Arbeit in Bezug auf die Schwerkraft.

Aus der Zerlegung der lebendigen Kraft

$$m v\, dv = m v\, dv_x + m v\, dv_y$$

folgt, da $dv_x = 0$,

$$dv_y = dv.$$

Der zweite Theil der Energieänderung dW, der sich auf die verticale Richtung y bezieht, ergibt demnach

$$m \cdot A \cdot dy - mv\,dv = 0$$

oder

$$mAy = \frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{1}{2} mv^2.$$

Auch diese Gleichung hat eine ganz allgemeine Bedeutung; sie lehrt, dass die gesammte Energieänderung nicht von der Form der Bahn, sondern nur von der Länge des Weges y in der Kraftrichtung abhängt. Für die schiefe Ebene und das Pendel wurde der Satz bereits besonders erläutert.

Mit Rücksicht auf die vorhergehenden Gleichungen nimmt die letztere die Form an

$$A \cdot y = \frac{1}{2} v_0^2 - \frac{1}{2} v_0^2 \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}.$$

Zu dem gröfsten Werte von $y = h$, welcher Wurfhöhe genannt wird, gehört eine horizontale Bahntangente, für welche $\varphi = 0$ ist; damit erhält man die Wurfhöhe

$$h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2A}.$$

Dieser Wert ist direct zu gewinnen, wenn man die bei der Hebung des Körpers geleistete Arbeit $m \cdot A \cdot h$ gleich setzt der mit der verticalen Geschwindigkeitscomponente $v_0 \sin \alpha$ berechneten lebendigen Kraft, welche zur Hebung verbraucht wird. Die Wurfhöhe erscheint demnach als der Weg eines verticalen Wurfes mit der Verticalcomponente der Geschwindigkeit nach aufwärts; sie wird, nachdem der Körper den höchsten Punkt erreicht hat, von dem fallenden Körper wieder in gleicher Zeit zurückgelegt wie von dem aufsteigenden. Die Zeit des Steigens oder Fallens folgt aus dem Fallgesetze

$$h = \frac{1}{2} At^2;$$

sie ist

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{A}.$$

Betrachtet man in ähnlicher Weise die Bewegung infolge der unveränderlichen horizontalen Componente $v_0 \cos \alpha$ der Geschwindigkeit v_0, so folgt leicht die Wurfweite, d. i. die in den Horizont fallende Sehne der Flugbahn; sie wird in der Zeit zurückgelegt, in welcher der Körper steigt und fällt, also in der Zeit $2t$ und ist demnach

$$l = \frac{2v_0^2}{A} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{v_0^2}{A} \cdot \sin 2\alpha.$$

Dieses Gesetz für die Wurfweite gilt im leeren Raume; es besagt, dass die Wurfweite zunimmt im quadratischen Verhältnis mit der Anfangsgeschwindigkeit und proportional dem Sinus des doppelten Erhebungswinkels. Es kann dieselbe Wurfweite mit zwei verschiedenen Erhebungswinkeln erreicht werden, wenn der eine um ebenso viel grösser als der andere kleiner als 45° ist.

Das Energieprincip gestattet aber, nicht bloss einzelne Stücke der Flugbahn, sondern auch die Form der Bahn genau zu bestimmen. Für das angenommene Coordinatensystem lässt sich die analytische Gleichung der betreffenden Curve wie folgt ermitteln. Die auf die Masseneinheit bezogene Energiegleichung

$$2A \cdot y + v^2 = v_0^2$$

erfordert noch die Bestimmung von v aus den Coordinaten. Diesem Zwecke dient der Wert für die Änderung der kinetischen Energie nach irgend einer Richtung, beziehungsweise für die entsprechende Kraft. Man kann entweder in Rechnung ziehen, dass die Horizontalflächen Niveauflächen der Schwerkraft sind, längs welchen keine Änderung der kinetischen Energie stattfindet, oder man kann den Ausdruck für die Fliehkraft benützen, welche der zur Bahn normal wirkenden Componente der Schwerkraft das Gleichgewicht hält. Nach der ersteren Rücksicht ist

$$v \cdot \cos \varphi = v_0 \cdot \cos \alpha$$

und damit geht die Energiegleichung in die Form über:

$$2Ay + v_0^2 \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \varphi} = v_0^2.$$

Setzt man hierin für $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = y'$ und demnach $\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + y'^2}$, so erhält man die Curvengleichung

$$2A\left(y - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2A}\right) + v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot y'^2 = 0;$$

für den höchsten Punkt der Curve ist $y' = 0$ und daher

$$\bar{y} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2A};$$

dies ist der Wert für die Wurfhöhe. Durch Verschiebung des Coordinatensystems, bis der Mittelpunkt mit dem höchsten Punkte der Flugbahn zusammenfällt, erhält man für y die Coordinate

$$-\eta = y - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2A}$$

und als Curvengleichung

$$-2A\eta + v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \eta'^2 = 0;$$

daraus folgt

$$\frac{\sqrt{2A}}{v_0 \cos\alpha} \cdot d\xi = \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}}$$

und ferner[1])

$$\xi^2 = \frac{2 v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}{A} \cdot \eta .$$

Dies ist die Scheitelgleichung einer Parabel. Will man die Gleichung für das Achsensystem (XY) darstellen, so hat man für η die Rücksubstitution zu machen und auch den entsprechenden Wert für ξ einzuführen. Setzt man für η die Wurfhöhe, so erhält man für ξ die halbe Wurfweite $\pm v_0^2 \sin 2\alpha/2A$; man hat demnach einzuführen

$$\xi = x - \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{2A}$$

und erhält die Parabelgleichung der Flugbahn in der gesuchten Form

$$\left(x - \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{2A}\right)^2 = \frac{2 v_0^2 \cos^2\alpha}{A} \cdot \left(y - \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2A}\right).$$

Diese Gleichung gilt nur für Flugbahnen im leeren Raume. In der Luft erleidet das Bewegliche einen Widerstand, indem es einen Theil seiner lebendigen Kraft an die im Wege stehenden Lufttheilchen abgeben muss; durch die beständige Verminderung der Geschwindigkeit wird die Parabel in der Richtung des Luftwiderstandes etwas zusammengedrückt. Die im Luftraume zurückgelegte Bahn heisst ballistische Curve.

Aufg. 1. Die vorstehende Parabelgleichung für die Flugbahn ist für die Fälle zu specialisieren und zu deuten, in welchen der Erhebungswinkel $\alpha = 0^0$ und 90^0 ist. **2.** Es sind die im höchsten Punkte der Flugbahn wirkenden verticalen Kräfte zu ermitteln. (Man setze in $dW/dy = 0$ für v das Product aus Krümmungsradius r in die Winkelgeschwindigkeit ω, dann erhält man als entgegen wirkende Kräfte die Schwerkraft und die Fliehkraft, nämlich $mA = mv^2/r$.) **3.** Es sind an einer beliebigen Stelle die zur Flugbahn normalen Kräfte zu bestimmen. (Aus $dW/dr = 0$ und $v = \omega \cdot r$ ergibt sich $A \cos\varphi = v^2/r$ d. h.?) **4.** Aus der allgemeinen Energiegleichung für W und dem in der vorhergehenden Aufgabe ermittelten Werte für die Fliehkraft ist die Gleichung für die Flugbahn abzuleiten. (Die gegebenen Gleichungen und die analytischen Formen für $\mathrm{tg}\,\varphi = dy/dx = y'$ und für den Krümmungshalbmesser $r = (1 + y'^2)^{3/2}/y''$ führen zu der bereits abgeleiteten Parabelgleichung.) **5.** Am Äquator der Erde, des Mondes, des Jupiters erfahren frei fallende Körper beziehungsweise die Beschleunigungen 9·78 m, 1·65 m, 21·17 m; wie hoch muss auf jedem dieser Himmelskörper ein Bewegliches

1) Um die Summierung elementar auszuführen, ist zu setzen

$$d\eta = \eta_n - \eta_{n-1} = (\sqrt{\eta_n} - \sqrt{\eta_{n-1}}) \cdot 2\sqrt{\eta}.$$

Darnach folgt leicht

$$\sum 2(\sqrt{\eta_n} - \sqrt{\eta_{n-1}}) = 2\sqrt{\eta}.$$

gelangen, das sich mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 5 m über dem Boden erhebt? — Sprung eines Turners. (1·28 m, 7·58 m, 0·59 m.) **6.** Eine Kanonenkugel wird unter einem Erhebungswinkel von 15^0 mit einer Geschwindigkeit von 550 m abgeschossen; wie gross sind Wurfweite und Wurfhöhe ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand? (Für $A = 10$ m, 15 125 m, 1013 m.) **7.** Eine unter dem Erhebungswinkel von 20^0 und mit der Geschwindigkeit von 500 m abgeschossene Kanonenkugel schlug nach 24 Secunden in die Erde ein; wie gross war die Schussweite? — (11274 m.) **8.** Eine mit 500 m Geschwindigkeit abgeschossene Kanonenkugel schlug nach 6 Sec. in einen 80 m gegen das Kanonenrohr höher liegenden Punkt ein; wie gross war der Erhebungswinkel? — ($4^0\, 58'\, 19''$.) **9.** Eine Kugel wird mit einer Geschwindigkeit von 500 m unter dem Erhebungswinkel von 12^0 abgeschossen; in welcher Höhe trifft sie einen 1500 m entfernten Erdwall? — (271·81 m.) **10.** Unter welchem Winkel muss eine Kanonenkugel abgeschossen werden, damit sie möglichst weit fliegt, und wie gross ist dann die Schussweite und die grösste Höhe der Kugel für eine Geschwindigkeit derselben von 550 m? — ($\alpha = 45^0$, 30 250 m, 7562 m.) [Aufg. 5 ist von Daurer, 6—10 von Müller-Erzbach.]

§ 14. **Fliehkraft.** (Huygens 1673.) Die Bedingungen, unter welchen die Fliehkraft oder Centrifugalkraft in Erscheinung tritt, und ihr Gesetz wurden gelegentlich bereits bei Behandlung des Kegelpendels und des schiefen Wurfes (Aufg. 2 und 3) erhalten. Darnach entsteht bei jeder krummlinigen Bewegung die Fliehkraft; sie ist normal zur Bahn und hält einer ablenkenden Centripetalkraft das Gleichgewicht. Beim Kegelpendel hält die Fliehkraft der Mittelkraft aus Schwerkraft und Fadenspannung, und beim Wurf einer Componente der Schwerkraft, speciell im höchsten Punkte der Schwerkraft selbst das Gleichgewicht. Das für sie gewonnene Gesetz ist

$$F = m \cdot v \cdot \frac{dv}{dr} = \frac{m \cdot v^2}{r},$$

wenn r der Krümmungshalbmesser in dem betreffenden Bahnelement ist.

Die erstere Form des Gesetzes, die unmittelbar aus dem Ausdrucke für die kinetische Energie hervorgegangen ist, gestattet eine anschauliche Auslegung: Infolge des Beharrungsvermögens sucht der bewegte Körper in derselben Richtung mit constanter lebendigen Kraft sich fortzubewegen; eine normal zur Bahn gegen den Krümmungsmittelpunkt hin wirkende Kraft, die Centripetalkraft, lenkt den Körper aus seiner geradlinigen Richtung ab und sucht die kinetische Energie zu ändern; die Kraft, welche diese Energieänderung äussert, ist die Fliehkraft. Dieselbe ist der Centripetalkraft gleich und entgegengesetzt. Der Verlust an vorhandener lebendiger Kraft kann durch den Gewinn infolge der Arbeit der Centripetalkraft ersetzt und dadurch die lebendige Kraft auch constant erhalten werden, wie dies beim Kegelpendel der Fall ist.

Das Gesetz soll noch in folgendem Beispiele allgemein abgeleitet

werden. An beiden Enden eines Fadens von der Länge $(r_1 + r_2)$ seien beziehungsweise die Massen m_1 und m_2 befestigt; die Massen werden mittelst einer Schwungmaschine gleichförmig in concentrischen Kreisen mit den Radien r_1 und r_2 gedreht; es ist die Fadenspannung für den stationären Zustand zu berechnen[1]). Die kinetische Energie des angegebenen Systemes ist

$$W = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 .$$

Gleichgewicht herrscht zwischen den beiden Massen, wenn bei einer sehr kleinen Verschiebung in der Fadenrichtung keine Energieänderung eintritt, also wenn

$$d\,W = m_1 v_1 d v_1 - m_2 v_2 d v_2 = 0.$$

Die einander das Gleichgewicht haltenden Kräfte sind die Fliehkräfte

$$m_1 \cdot v_1 \cdot \frac{d v_1}{d r} = m_2 \cdot v_2 \cdot \frac{d v_2}{d r} .$$

Setzt man für jede Geschwindigkeit v die r-fache Winkelgeschwindigkeit ω, so findet man leicht die gesuchte Form der Fliehkräfte oder die Fadenspannung

$$p = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{r_1} = \frac{m_2 \cdot v_2^2}{r_2} .$$

Es ist von allgemeiner Bedeutung, zu bemerken, dass die kinetischen Energien der Massen mit Hilfe der einander das Gleichgewicht haltenden Kräfte ausgedrückt werden können; man kann nämlich dafür setzen:

$$w_1 = \left(\frac{m_1 \cdot v_1^2}{r_1}\right) \cdot \frac{r_1}{2} \quad \text{und} \quad w_2 = \left(\frac{m_2 \cdot v_2^2}{r_2}\right) \cdot \frac{r_2}{2} .$$

Die Kräfte erscheinen hier als Factoren der Energie; sie werden nach Helm „Intensitätsfactoren“ der Energie genannt; wir werden sie auch „Wirkungsgrade“ der Energie nennen.

Das Fliehkraftgesetz kann mit Hilfe der Centrifugalapparate von Pscheidl, Weinhold, Frick u. a. bestätigt werden.

Aufg. 1. Eine Glocke von 6 q Gewicht erhält beim Läuten einen Ausschlag von 60⁰; mit welcher Kraft werden die Achsenlager in Anspruch genommen, wenn die Glocke sich im tiefsten Punkte befindet? — (12 q.) **2.** Wie oft mal in der Secunde, beziehungsweise in einer Minute muss ein mit Wasser gefülltes Glas in einem Kreise mit 0·5 m grossem Halbmesser herumgeschwungen werden, damit das Wasser nicht ausfliesse? (Mindestens 0·71, bez. 43 mal.) **3.** Wie gross ist die mittlere Anziehung des Mondes durch die Erde, wenn die Umlaufszeit des Mondes 27 Tage 7 St. 43 Min. 12 Sec. und sein mittlerer Abstand 51 800 geogr. Ml. (zu 7420 m) beträgt? — (0·0027 m.) **4.** a) Wievielmal schneller müsste

1) Vgl. meine Abhandlung „Über die Drehung eines Körpers im Kreise“ in Exner's Rep. 1891. S. 436.

sich die Erde um die Achse drehen, damit am Äquator die auf einen Körper wirkende Schwerkraft von der Fliehkraft aufgehoben würde, der Körper also gewichtslos erschiene? $r = 6\,370\,000$ m, $A = 9{\cdot}78$ m. — (17mal.) **4.** b) Mit welcher Geschwindigkeit müsste, vom Luftwiderstande abgesehen, eine Kugel horizontal abgeschossen werden, damit sie nicht auf die Erde herabfiele, sondern sie umkreiste? Wie gross wäre ihre Umlaufszeit? — ($17 \cdot 463 = 7871$ m, 1·41 St.) **5.** Wie viel muss bei dem Krümmungshalbmesser von 500 m einer Geschwindigkeit von 16 m und bei einer Spurweite von 1·435 m die äussere Eisenbahnschiene höher liegen als die innere, wenn durch die Neigung der Bahn die Fliehkraft aufgehoben werden soll? — (75 mm.) **6.** An einem $r = 1$ m langen Faden von $F = 10$ kg Festigkeit ist eine Kugel von $f = 0{\cdot}25$ kg Gewicht befestigt; sie wird in einer lothrechten Ebene um das freie Ende des Fadens mit steigender Geschwindigkeit geschleudert, bis zuletzt der Faden zerreisst. Wie hoch, wie weit und wie lange wird die Kugel fliegen, wenn der Faden während des aufwärts gehenden Theiles einer Schwingung genau in dem Augenblicke zerreisst, in welchem er mit dem Horizonte einen $\sphericalangle\, \alpha = 45^0$ bildet? Die Entfernungen sind vom Mittelpunkte der Schleuderbahn aus zu rechnen. — (10·707 m, 39·988 m, 2·905 Sec.) [Die Aufg. 3—5 sind von Müller-Erzbach, Fliedner und Krebs, 6 von Budde.]

Zu den Centrifugalapparaten gehören Centrifugal-Gebläse, -Pumpen, -Trockenapparate etc.

Dass das Gesetz für die Fliehkraft mit dem Elasticitätsgesetz übereinstimmt, und der Einfluss der Fliehkraft auf die Schwerkraft sollen an späterer Stelle erörtert werden.

§ 15. **Centralbewegung.** Gesetze von Kepler und Newton. Ebenso wie die Bewegungen der Körper auf der Erdoberfläche wurden auch die Bewegungen der Himmelskörper ursprünglich als einfache Erscheinungen betrachtet und durch einen philosophischen Grundsatz zu erklären gesucht. Man bemerkte frühzeitig, dass der ganze Sternenhimmel täglich sich um eine Weltachse dreht, deren Richtung sehr nahe durch die Verbindungsgerade von der Erde zum Polarstern gegeben ist; von der Erde nahm man an, dass sie im Mittelpunkte des Weltalls ruhe. Durch die Drehung des Himmelsgewölbes mit Sonne, Mond und Sternen wurde die Erscheinung des Tages und der Nacht erklärt.

Weitaus die meisten, nachts sichtbaren Sterne stehen in Gruppen, sogenannten Sternbildern, unveränderlich beisammen; sie heissen Fixsterne. Von ihnen lehrt Aristoteles, dass sie vom Himmelsstoffe, dem Äther, in der vollkommensten Bewegung, nämlich im Kreise, in alle Ewigkeit gleichmässig fortgeführt würden. Schon mit freiem Auge bemerkt man, dass die Sonne sich nicht in ein Sternbild einreihen lässt, sondern dass sie von Sternbild zu Sternbild sich ostwärts vorschiebt; diese Eigenbewegung geht so vor sich, dass das

Himmelsgewölbe immer nach einem Vierteljahre um dieselbe Abendstunde stets um eine Vierteldrehung in der Richtung von Ost nach West gedreht erscheint. In einem Jahre haben die Fixsterne eine Drehung mehr um die Weltachse ausgeführt, als die Sonne. Noch vor einer genaueren Bestimmung der Orte am Himmel mittelst der gebräuchlichen sphärischen Coordinaten wurde die Stellung der Sonne zu den Fixsternen gefunden, indem man die Abstände von der Sonne zum Mond und vom Monde zu den betreffenden Fixsternen mit Hilfe von Visiervorrichtungen bestimmte. Solche Messungen ergaben, dass die Sonne am Himmelsgewölbe unter den Fixsternen in einem grössten Kreise sich fortbewegt, und in den 12 Monaten des Jahres die 12 Sternbilder des Thierkreises (Zodiakus) passiert. Schon 1400 v. Chr. war den Ägyptern bekannt, dass die Sonne ihre Bahn, Ekliptik genannt, in $365\frac{1}{4}$ Tagen vollendet. Durch die Neigung der Ekliptik gegen den Himmelsäquator (Schiefe der Ekliptik $= 23^0\ 27'$) wird es bedingt, dass im Sommerhalbjahre die Sonne sich nördlich vom Äquator befindet, und dass während dieser Zeit die nördliche Erdhälfte stärker und täglich länger beleuchtet und erwärmt wird, als die südliche. Während des Winterhalbjahres befindet sich die Sonne südlich vom Äquator und erwärmt und beleuchtet mehr die südliche Erdhälfte. So werden durch die Bewegung der Sonne in der Ekliptik die Jahreszeiten mit ihren verschiedenen Tages- und Nachtlängen begründet.

Zur Erklärung der bisherigen Erscheinungen genügen die angenommenen Kreisbewegungen noch vollständig. Für die Planetenbahnen reicht derselbe Erklärungsgrund aber nicht mehr aus. Bei den mit freiem Auge sichtbaren Planeten, Venus, Mars, Jupiter und Saturn, kann man schon durch gelegentliche Beobachtungen erkennen, dass sie ähnlich wie die Sonne in der Nähe der Ekliptik unter den Fixsternen sich verschieben, ferner dass Venus nur auf der Sonnenseite als Morgen- oder Abendstern erscheint, während die anderen Planeten sowohl in Conjunctions- als auch in Oppositionsstellung zur Sonne gelangen. Eine genauere Aufzeichnung ihrer Stellungen zwischen den Fixsternen zeigt eine östliche Bewegung mit Schleifenbildung. Ptolemäus (um 140 n. Chr.) in Alexandria suchte diese Bahnen damit zu erklären, dass er annahm, die Planeten bewegen sich in Kreisen, deren Mittelpunkte aber auf je einem in der Nähe der Ekliptik befindlichen Kreis weiter schreiten; die Planetenbahnen wären darnach Epicyklen. Bei dieser Erklärung wird die Erde in der Mitte des Weltraumes ruhend gedacht. Ptolemäus' „Almagest" mit seinem geocentrischen Systeme blieb 1400 Jahre lang massgebend. Vergleiche zwischen den Epicyklen und den wirklichen Bahnen ergaben aber Differenzen; um diese auszugleichen wurden exentrische Stellungen der Kreise angenommen oder auch dritte Kreise, auf welchen die betreffenden Planetenbewegungen vor sich gehen sollten.

Von solchen Complicationen suchte sich Copernicus unabhängig zu machen und forschte nach einem einfachen Zusammenhange der Erscheinungen. Auf einen solchen liessen ihn die Constanz der epicyklischen Umlaufszeit sämmtlicher Planeten schliessen, insbesondere führte ihn der Umstand, dass die langsamsten Planeten (Jupiter 398, Saturn 378, Uranus 369 und der 1846 entdeckte Neptun 366 Tage) ungefähr ein Jahr zur Bildung jeder Schleife beanspruchen, zu der Annahme, dass diese Schleifenbildung in der Bewegung der Erde um die Sonne ihre gemeinsame Ursache haben. Die Schleife ist darnach nur das perspectivische oder parallaktische Bild, das der betreffende Planet infolge der Erdbewegung am Himmelsgewölbe verzeichnet. Die Längen der Schleifen sind die Parallaxen, bezogen auf die Endpunkte eines Erdbahndurchmessers; dieselben gestatten die Entfernungen der Planeten von der Sonne in Erdbahnhalbmessern zu berechnen. Durch derartige zahlenmässige Bestimmungen gelangte Copernicus (1543) zur Aufstellung seines heliocentrischen Planetensystems, nach welchem die Planeten in der Reihenfolge Mercur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Uranus und Neptun um die Sonne kreisen. Im ganzen entsprach dieses heliocentrische System den gemachten Beobachtungen. Genauere Messungen besonders von Tycho Brahe, die Kepler fortsetzte, zeigten aber noch immer Differenzen bezüglich der Stellungen des Mars; für diese genügte die angenommene Kreisbewegung nicht, auch wenn der Kreis excentrisch gedacht wurde. Die Bestimmung der wirklichen Lage des Mars im Raume nach dem heliocentrischen Systeme führten Kepler (1609) schliesslich zur Aufstellung folgender drei Gesetze:

1. Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet; 2. die von den Leitstrahlen in gleichen Zeiten beschriebenen Flächenräume sind einander gleich; 3. die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der mittleren Entfernung von der Sonne.

Newton hat nun diese Gesetze auf eine einheitliche Ursache zurückgeführt und sie dadurch erklärt (1685). Wie bei den Erscheinungen der krummlinigen Bewegungen auf der Erde, so muss auch bei den Planetenbewegungen eine Centripetalkraft, beziehungsweise eine Centralkraft vorhanden sein, und Newton erkannte die letztere als eine Fallbeschleunigung der Planeten gegen die Sonne. Mit Hilfe des Gesetzes für die Fliehkraft, welche der Centripetalkraft gleich sein muss, und mittelst des dritten Kepler'schen Gesetzes fand Newton das nach ihm benannte Gravitationsgesetz. In erster Annäherung nahm er eine Planetenbahn kreisförmig an[1]), für diese ist die Centri-

1) Newton's Ableitg. des Gesetzes mit Rücksicht auf ellipt. Bahnen siehe in Violle's Lehrb. d. Ph. I. Vgl. auch: G. Helm, Arch. f. Math. u. Ph. 1879, S. 326, ferner Martus' astron. Gg. u. a.

petalkraft, wenn v die Geschwindigkeit, r der Kreishalbmesser und t die Umlaufszeit bedeuten,

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot \frac{4\pi^2 \cdot r}{t^2}$$

und nach dem 3. Gesetz Kepler's ist

$$\frac{r^3}{t^2} = k' \text{ const.},$$

daher wird

$$F = k' 4\pi^2 \cdot \frac{m}{r^2}.$$

Die Kraft, welche den Planeten gegen die Sonne bewegt, ist daher der Masse des Planeten direct und dem Quadrate seiner Entfernung von der Sonne umgekehrt proportional. Thatsächlich genügt diese Kraft zur Erklärung der mechanischen Himmelserscheinungen.

Gestützt auf sein Kraftgesetz stellte Newton zunächst die Hypothese auf, dass ganz allgemein zwei Massen m_1 und m_2 in ihrer Verbindungsgeraden anziehende Kräfte auf einander ausüben in der Stärke

$$F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

k ist die Gravitationsconstante, deren Dimension $= M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}$ ist. $k \cdot m_1/r^2$ ist nach dem Newton'schen Kraftmasse ($F = A \cdot m$) die Beschleunigung der Masse m_2.

Die allgemeine Giltigkeit des Gesetzes prüfte Newton, indem er die Mondbeschleunigung gegen die Erde mit der Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche verglich. Er setzte voraus, dass der Mond um die Erde in gleichförmiger Bewegung einen Kreis beschreibe und dass die Geschwindigkeit = 1050 m und der Halbmesser des Kreises dem 60-fachen Erdhalbmesser, also $= 60 \times 6\,360\,000$ m seien. Darnach erhielt er die Beschleunigung in der Grösse $1050^2/60 \cdot 6\,360\,000 = 0{\cdot}0028$. Der Betrag ist ungefähr der 60^2 oder 3600ste Theil der Beschleunigung der Schwere auf der Erde $A = 9{\cdot}81$ m. Das Resultat bestätigt die Annahme, dass der Mond, dem Newton'schen Gesetze entsprechend, gegen die Erde falle.

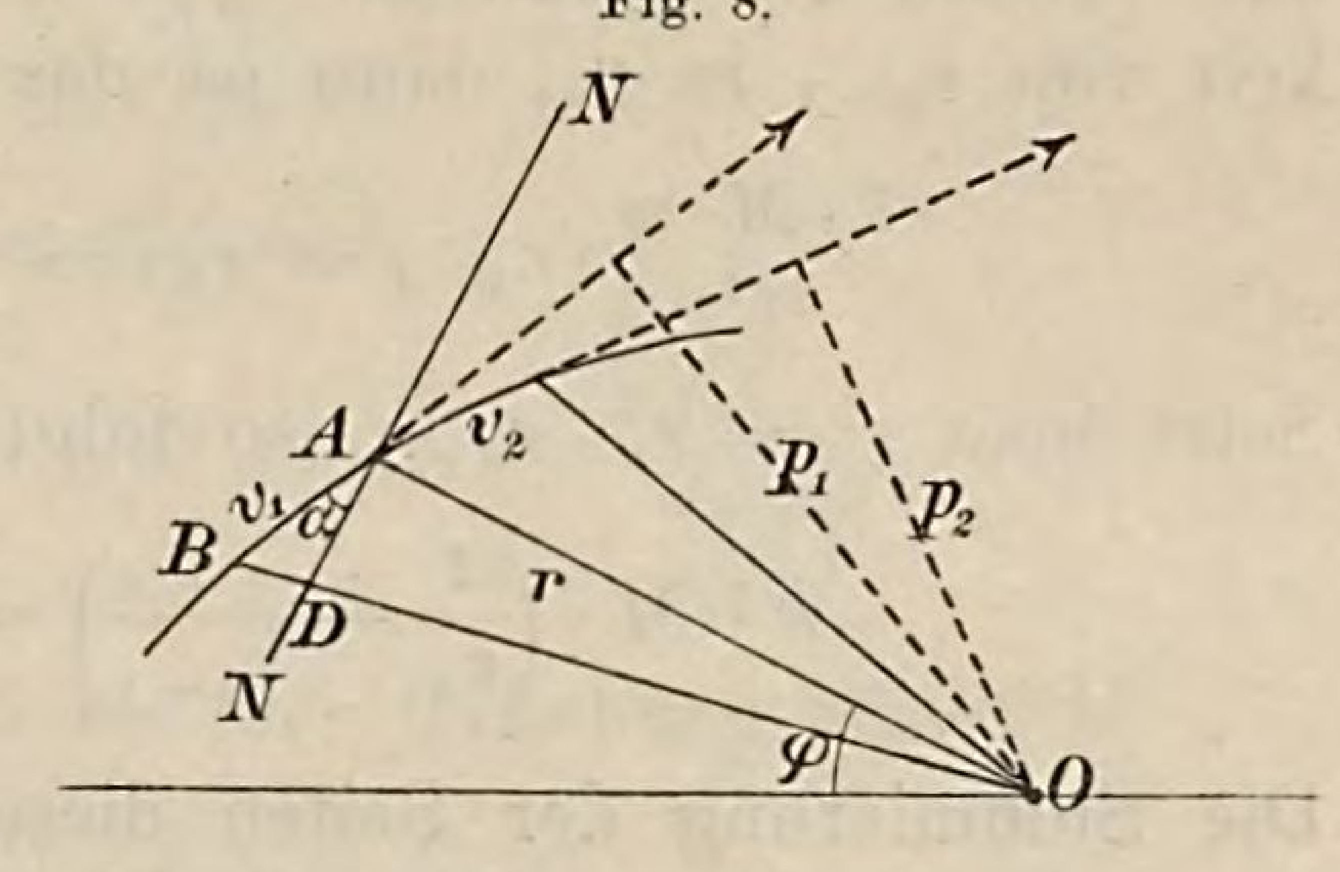
Nach so erwiesener Giltigkeit des Gesetzes im ganzen Sonnensysteme wird das Gesetz als ein allgemeines Naturgesetz anerkannt und mit dem Namen „Newton'sches Gravitationsgesetz" bezeichnet. Das Gesetz ist lediglich der Ausdruck von Thatsachen; es ist frei von jeder Hypothese. Newton selbst hielt es noch für erklärungsbedürftig. Roger Cotes und die übrigen Schüler und Anhänger Newton's betrachteten es aber als ein Elementargesetz und erklärten die Gravitation als unvermittelte Fernewirkung, und diese als eine Eigenschaft der Materie. Trotz gewichtiger Einwendungen seitens der Anhänger des Cartesius, welche die neue Eigenschaft des Stoffes

für unbegreiflich hielten und die Fernewirkung durch Vermittelung des Weltäthers zu erklären suchten, gelangte dennoch jene Lehre zu allgemeiner Annahme.

§ 16. **Centralbewegung.** Fortsetzung. Es sollen nun mit Hilfe des Newton'schen Gravitationsgesetzes und des Energieprincipes die Kepler'schen Gesetze abgeleitet werden.

Das Flächengesetz folgt ohne weiteres aus der Kraftrichtung und der hierdurch bestimmten Lage der Niveaufläche. Ein zahlenmässig bestimmtes Kraftgesetz ist nicht erforderlich[1]). In Fig. 8 gebe die krumme Linie ein Stück der Bahn an, welche ein Himmelskörper unter der Einwirkung einer Centralkraft, deren Convergenzpunkt O sei, beschreibe. Zwei auf einander folgende Elemente der Bahn werden beziehungsweise mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 zurückgelegt. Im Punkte A grenzen die Bahnelemente aneinander; die Richtung der Centralkraft in diesem Punkte wird von dem Leitstrahle r angegeben.

Fig. 8.



Zur Kraftrichtung normal liegt die Niveaufläche NN, in deren Richtung die Bewegung gleichförmig ist, weil in ihr keine Kraft wirkt. Sind die Neigungswinkel von v_1 und v_2 zur Niveaufläche bez. gleich α_1 und α_2, so gilt für die Geschwindigkeitscomponenten in der Richtung NN die Gleichung

$$v_1 \cdot \cos \alpha_1 = v_2 \cdot \cos \alpha_2 .$$

Die Winkel α werden auch von dem Leitstrahle r mit den Perpendikeln p gebildet, welche vom Centralpunkte O auf die Richtungen von v gefällt werden; somit können die Werte $\cos \alpha$ durch die entsprechenden Quotienten p/r ersetzt werden, und man erhält

$$v_1 \cdot \frac{p_1}{r} = v_2 \cdot \frac{p_2}{r} \quad \text{oder} \quad v_1 \cdot p_1 = v_2 \cdot p_2 ,$$

den mathematischen Ausdruck für das zweite Kepler'sche Gesetz: das Product vp gibt die sogenannte Flächengeschwindigkeit an, und die Gleichung lehrt die Constanz dieser Geschwindigkeit von Element zu Element der Bahn.

Das Gesetz folgt auch unmittelbar aus der Eigenschaft des Geschwindigkeitsparallelogrammes, das man aus v_1 als Seite und v_2 als Diagonale construieren kann, wenn man auf die Geschwindigkeiten den Satz von den Kraftmomenten in Bezug auf den Punkt O ent-

1) Vgl. meine Abhdlg. über das Energieprincip in d. Zeitsch. f. phys. u. chem. Unterr. Berlin. II. 1888. S. 71.

sprechend anwendet. Das Moment der Diagonalgrösse ist stets gleich der Summe der Momente der Seitengrössen; da hier der Punkt O in der zweiten Seite des Parallelogrammes liegt, so ist deren Moment gleich Null, und man erhält ohne weiteres für die beiden anderen Momente die vorstehende Gleichung[1]).

Das erste Kepler'sche Gesetz über die Form der Bahn erhält man analog wie die Flugbahn eines geworfenen Körpers. Wir benützen zunächst die Gleichung für den unveränderlichen Energiewert und das zweite Kepler'sche Gesetz. Da die potentielle Energie des Planeten nicht bekannt ist, so gehen wir von der Äquivalenz der Arbeit und lebendigen Kraft, bezogen auf ein beliebiges Bahnelement aus. Wenn der Leitstrahl r_{n-1} übergeht in r_n und die Geschwindigkeit von v_{n-1} in v_n, dann ist das Äquivalenzgesetz

$$\frac{k \cdot M \cdot m}{r^2}(r_{n-1} - r_n) = \frac{1}{2} m \cdot v_n^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_{n-1}^2 .$$

Setzt man $r^2 = r_n \cdot r_{n-1}$, so folgt

$$k \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n-1}}\right) = \frac{1}{2} \cdot v_n^2 - \frac{1}{2} \cdot v_{n-1}^2 .$$

Die Summierung der Seiten dieser Gleichung zu dem Zwecke, um einen Ausdruck für einen endlichen Weg zu erhalten, ist unschwer elementar auszuführen. Die linke Seite ergibt für die Arbeit bei Bewegung der Masseneinheit aus der Entfernung r_0 bis r, wie man sich leicht durch Aufschreiben einiger Glieder der Summe überzeugt, die Summe $k \cdot M \cdot (1/r - 1/r_0)$. Denkt man sich die Bewegung aus unendlicher Ferne her, also $r_0 = \infty$, so folgt für $k \cdot M/r$ die Bedeutung der Arbeit bei der Bewegung aus dem Unendlichen. Dieser Arbeitswert, negativ genommen, heisst auch das Potential von M an dem Orte in der Entfernung r; derselbe findet sich vor der Bewegung als potentielle Energie des Systems vor. Das Potential als Kräftefunction wurde von Lagrange (1777) in die mathematische Behandlung der Schwerkraft eingeführt; der Name rührt von Gauss her (1840). Nach dieser Bemerkung gestattet die vorstehende Gleichung den Übergang zum ganzen Energiewerte. Die Gleichung lässt sich nämlich in der Form schreiben

$$\frac{k \cdot M}{r_n} - \frac{1}{2} \cdot v_n^2 = \frac{k \cdot M}{r_{n-1}} - \frac{1}{2} \cdot v_{n-1}^2 = \text{const.}$$

Ist die potentielle Energie des aus dem Centralkörper und dem Planeten bestehenden Systemes, wenn beide Körper unendlich weit von einander entfernt sind, gleich W_0, so erhält man die gesammte Energie für die Masseneinheit des Planeten in der Entfernung r, indem man

1) Vgl. meine Abhdlg. über das Energieprincip in der Dynamik. 1884. S. 26.

den in der vorstehenden Gleichung gegebenen Wert von dem für W_0 abzieht; also ist die Energie

$$W = W_0 - \frac{k \cdot M}{r} + \frac{1}{2} v^2;$$

denn die potentielle Energie W_0 wird durch die Annäherung um die Arbeit $k \cdot M/r$ vermindert, und ausserdem besitzt die Masseneinheit des Planeten die lebendige Kraft $v^2/2$. Mit diesem constanten Energiewerte verbinden wir das Flächengesetz (nach Fig. 8) in der Form

$$v \cdot p = v \cdot r \cdot \cos\alpha = C.$$

Durch Einsetzen des hieraus folgenden Wertes für v wird der constante Wert

$$\varDelta W = W - W_0 = \frac{C^2}{2 r^2 \cdot \cos^2\alpha} - \frac{k \cdot M}{r}.$$

Aus dem kleinen Dreieck (ABD) ergibt sich

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dr}{r \cdot d\varphi} \quad \text{und somit} \quad \cos^2\alpha = \frac{r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}{1 + r^2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}.$$

Mit Hilfe dieses Wertes erhält man aus der Gleichung für $\varDelta W$

$$d\varphi = \frac{dr}{r\sqrt{\frac{2 r^2 \cdot \varDelta W}{C^2} + \frac{2 \cdot k \cdot M \cdot r}{C^2} - 1}}.$$

Der Gleichung wird durch die Polargleichung der Kegelschnittslinien genügt, nämlich durch die Form

$$r = \frac{q}{1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi},$$

die sich auf den Brennpunkt als Coordinatenursprung bezieht, und in welcher q den halben Parameter und ε die numerische Excentricität bedeuten. Man erhält daraus

$$d\varphi = \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^2}{q^2}(\varepsilon^2 - 1) + \frac{2r}{q} - 1}}.$$

Durch Vergleich beider Werte für $d\varphi$ folgen die Bedingungsgleichungen

$$\frac{2 \cdot \varDelta W}{C^2} = \frac{\varepsilon^2 - 1}{q^2} \quad \text{und} \quad \frac{k \cdot M}{C^2} = \frac{1}{q},$$

die durch Elimination von q ergeben

$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{2 C^2}{k^2 \cdot M^2} \cdot \varDelta W = \frac{2 C^2}{k^2 \cdot M^2} \cdot \left[\frac{v^2}{2} - \frac{k \cdot M}{r}\right].$$

Die **Bahn** des Himmelskörpers ist demnach eine Kegelschnittslinie, deren numerische Excentricität ε durch die vorstehenden Werte gegeben ist. Dieselben charakterisieren zugleich den Kegelschnitt, je nachdem $\varepsilon \gtreqless 1$; also je nachdem

$$\left[\frac{v^2}{2} - \frac{k \cdot M}{r}\right] \gtreqless 0,$$

ist die Bahn eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse.

Mit Rücksicht auf die Bedeutung von $k \cdot M/r$ als Arbeit, welche die Masseneinheit des Beweglichen aus wirkungsloser Ferne bis in die Distanz r vom Centralkörper heranzuziehen oder aus dieser Distanz zu entfernen vermag, ergibt sich, dass der Himmelskörper eine ungeschlossene oder geschlossene Bahn um den Centralkörper beschreibt, je nachdem die bezeichnete Arbeit kleiner, gleich oder grösser als die lebendige Kraft des Himmelskörpers in irgend einer Lage ist. Dieses Ergebnis lässt sich vom Standpunkte des Energieprincipes auch unmittelbar einsehen.

Ohne Hilfe von Differentialen erhält man die Beziehung zwischen Planetenbahnen und Kegelschnitten, wenn man den angegebenen Energiewert ΔW nach Püning (Poske's Zeitsch. IX. 1895. S. 27) unmittelbar mit folgender für die Ellipse (als allgemeiner Kegelschnittslinie) giltigen Relation vergleicht: Denkt man den Punkt A (Fig. 8) mit beiden Brennpunkten einer Ellipse verbunden, so schliessen die Leitstrahlen r und $(2a - r)$ den $\sphericalangle\, 2\alpha$ mit einander ein, weil die Curvennormale in A den Winkel der Leitstrahlen halbiert. Aus dem von den Leitstrahlen und $2e$ gebildeten Dreieck folgt

$$\begin{aligned} 4e^2 &= r^2 + (2a - r)^2 - 2r(2a - r)\cos 2\alpha \\ &= 4a^2 - 2r(2a - r)(1 + \cos 2\alpha) \\ &= 4a^2 - 4r(2a - r)\cos^2\alpha \end{aligned}$$

und

$$r(2a - r)\cos^2\alpha = b^2,$$

wenn b die kleine Halbachse ist. Somit gilt die Bedingung

$$r^2 - 2ar = -\frac{b^2}{\cos^2\alpha}.$$

Aus der Gleichung für ΔW folgt

$$r^2 + \frac{kM}{\Delta W} \cdot r = \frac{C^2}{2\cos^2\alpha \cdot \Delta W}$$

oder

$$r^2 - \frac{k \cdot M}{\frac{1}{2}v^2 - \frac{kM}{r}} \cdot r = -\frac{C^2}{2\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{kM}{r}\right)\cos^2\alpha}.$$

Durch Vergleich beider Bedingungsgleichungen für r folgen die Werte für die Halbachsen

$$a = \frac{kM}{v^2 - 2\frac{kM}{r}}, \quad b = \frac{C}{\sqrt{v^2 - 2\frac{kM}{r}}}.$$

Die Bedingungen, unter welchen diese Werte für eine elliptische,

parabolische oder hyperbolische Bahn entscheiden, sind diejenigen, welche bereits angegeben wurden.

Für die Planeten unseres Sonnensystems gilt das Kennzeichen der Ellipsität, und es folgt für dieselben das erste Kepler'sche Gesetz.

Nach P. Salcher kann man Versuche anstellen über die Bewegung der Himmelskörper, indem man ein Eisenkügelchen in der Nähe eines kräftigen Magnetpoles nach einer Richtung in Bewegung versetzt. Die Versuche stützen sich auf den Umstand, dass das magnetische Wechselwirkungsgesetz mit dem Newton'schen Gravitationsgesetze übereinstimmt. Als Unterlage zu denselben ist eine mit Papier belegte Glasplatte geeignet, und das Kügelchen kann man in einer kleinen Rinne von verschiedenen Höhen herab laufen lassen.

Das dritte Gesetz ergibt sich aus dem ersten und zweiten wie folgt: Nach dem zweiten Gesetz ist die Flächengeschwindigkeit gegeben durch die Gleichung $C = \frac{1}{2} p v$. Ist nun die Umlaufszeit des Planeten t und sind die grosse und kleine Halbachse der elliptischen Bahn beziehungsweise a und b, so ist die Fläche der Ellipse, welche während eines Umlaufes vom Radiusvector beschrieben wird

$$\frac{1}{2} \cdot p \cdot v \cdot t = a \cdot b \cdot \pi .$$

Danach ist für zwei verschiedene Punkte

$$v = \frac{2 a b \pi}{p \cdot t} \quad \text{und} \quad v_0 = \frac{2 a b \pi}{p_0 \cdot t} .$$

Führt man diese Werte in die obige dem Energiewerte W vorhergehende Gleichung ein mit der Bedingung, dass die Anfangslage des Planeten im Perihel und eine zweite Lage im Aphel, also die beiden Stellungen des Planeten in den Endpunkten der grossen Axe gewählt werden, und bezeichnet mit e die lineare Excentricität, so erhält man:

$$k \cdot M \left[\frac{1}{a + e} - \frac{1}{a - e} \right] = \frac{2 a^2 \cdot b^2 \cdot \pi^2}{t^2} \cdot \left[\frac{1}{(a + e)^2} - \frac{1}{(a - e)^2} \right],$$

oder nach leichter Umformung und Substitution von $a^2 - e^2 = b^2$,

$$t^2 = \frac{4 \pi^2}{k M} \cdot a^3,$$

das dritte Kepler'sche Gesetz.

Aufg. 1. Es ist aus dem Satze für die lebendige Kraft direct das Kriterium für die Art des Kegelschnittes einer Centralbewegung abzuleiten. (Aus dem genannten Satze folgt für zwei auf einander folgende und somit für zwei beliebige Bahnelemente die Beziehung

$$v^2/2 - k \cdot M/r = v_0^2/2 - k \cdot M/r_0 = C^2/2 p_0^2 - k \cdot M/r_0 .$$

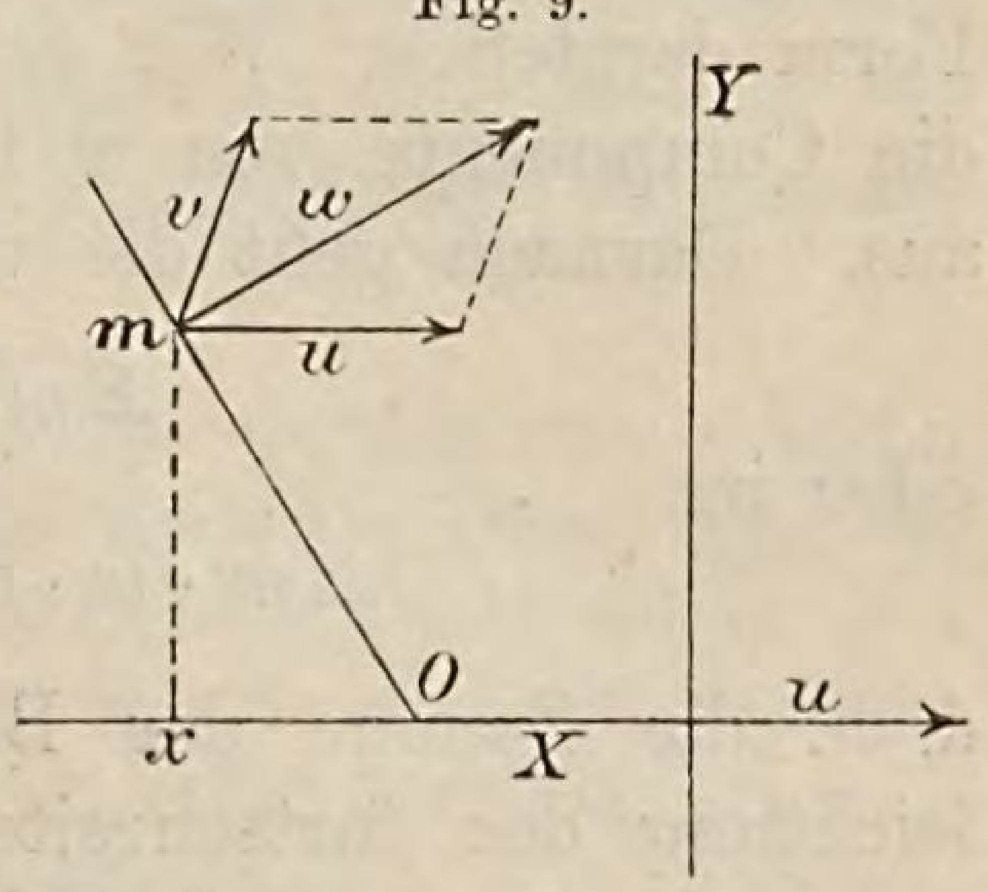
Die letzte Seite kann nun auf die Sonnennähe oder Sonnenferne des bewegten Himmelskörpers bezogen und darnach das Kriterium des Kegel-

schnittes ermittelt werden: Bei der Hyperbel ist für $r_0 = \infty$ das Perpendikel p_0 endlich, daher die fragliche Differenz positiv; bei der Parabel ist für $r_0 = \infty$ auch $p_0 = \infty$, die Differenz ist gleich Null; und für die Ellipse, bei welcher r und p stets endlich bleiben, erübrigt eine negative Differenz. [Vgl. meine Abhdlg. in Poske's Zeitsch. 1888.] Bei Benützung des Punktes in der Sonnennähe hat man in dem Ausdrucke $(v_0^2/2 - k \cdot M/r_0)$ ein Glied mittelst des Fliehkraftgesetzes zu berechnen und den Wert für den Krümmungshalbmesser $= r(1 + \varepsilon)$ einzuführen. Man erhält als charakteristische Differenz $(k \cdot M/2r_0)(\varepsilon - 1)$, die für eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse entscheidet, je nachdem $\varepsilon \gtreqless 1$. [Vgl. hierzu die Abhdlg. v. E. Maiss „Die Bahnen bei Centralbewegungen" in d. Zeitsch. f. d. Realschlw. Wien. 18. Jgg. S. 271 und meine Bemerkungen dazu S. 402.]) **2.** Es ist zu beweisen, dass für eine Planetenbahn die charakteristische Differenz $(v^2/2 - k \cdot M/r) = -k \cdot M/2a$ oder $= -2\pi^2 \cdot a^2/t^2$ ist. (Man bilde die Differenz für den Scheitel, benütze das Flächengesetz $v_0 p_0 = 2a \cdot b \cdot \pi/t$ und das Gesetz für die Umlaufszeit $k \cdot M = 4\pi^2 \cdot a^3/t^2$. Die Behauptung folgt auch unmittelbar aus der vorstehenden Gleichung für die Halbachsen.) **3.** Mit Hilfe des vorstehenden Wertes für die charakteristische Differenz ist die lebendige Kraft des Planeten zu bestimmen. $(^1/_2 m \cdot v^2 = k \cdot M \cdot m(1/r - 1/2a).)$ **4.** Es soll der Abstand des Planeten Saturn von der Sonne in Erdhalbmessern berechnet werden. Die Umlaufszeit des Saturn beträgt 10 759 Tage und die der Erde 365·26 Tage. — (9·5378 Erdhalbm.) **5.** Die Umlaufszeit der Erde um die Sonne ist 365·26 Tage, ihre mittlere Entfernung von derselben 20 Mill. Meilen; wie gross ist die mittlere Entfernung der Venus von der Sonne, deren Umlaufszeit 224·72 Tage beobachtet worden ist? — (14·5 Mill. Meilen.) **6.** Wie gross ist die Beschleunigung der Erde gegen einen fallenden Stein? $(A \cdot m/M.)$ **7.** Die Erde vollendet ihren Umlauf um die Sonne in 365·26 Tagen; ihr mittlerer Abstand von der Sonne beträgt 23 340 Erdradien (zu 6370 km). Die volle Beschleunigung der Schwerkraft an der Erdoberfläche ist 9·8145 m. Wie gross ist dann unter der Voraussetzung, dass die Erdbahn kreisförmig ist, die von der Sonne auf die Erde und umgekehrt von der Erde auf die Sonne ausgeübte Beschleunigung, und wie gross ergibt sich hieraus die Sonnenmasse im Verhältnis zur Erdmasse? — ($5{\cdot}8936 \cdot 10^{-3}$, $1{\cdot}8017 \cdot 10^{-8}$ m, 327 120 Erdmassen.) **8.** Die Erde bewegt sich in 365·26 Tagen um die Sonne, von welcher sie eine mittlere Entfernung von 23 340 Erdradien zu 6370 km hat; der Mond bewegt sich in 27·322 Tagen um die Erde und hat von ihr die mittlere Entfernung 383 200 km. Wie vielmal so gross ist die Sonnenmasse als die Erdmasse, wenn beide Bahnen als kreisförmig betrachtet werden? — (326 780 Erdmassen.) **9.** Die Umlaufszeit unseres Mondes beträgt 27·322 Tage, die des ersten Jupitermondes 1·769 Tage; die mittlere Entfernung der Monde von ihren Planeten sind 383 200 km, beziehungsweise 423 500 km. Wie verhält sich hiernach die Jupitermasse zur Erdmasse? — (322 : 1.) **10.** Die Erde hat bei ihrer Bewegung um die Sonne eine Geschwindigkeit von 4·1 Meilen; wie gross müsste ihre Geschwindigkeit sein, damit ihre Bahn a) eine Parabel, b) ein Kreis würde? Die Beschleunigung auf der Sonne ist 27 · 9·808 m; der Mittel-

punkt der Erde ist vom Mittelpunkte der Sonne 20 Mill. Meilen à 7420 m entfernt oder 211 mal weiter entfernt als ein Punkt der Sonnenoberfläche. — (a) $v = \sqrt{[2 \cdot 20 \cdot 10^6 \cdot 9{\cdot}81 \cdot 27/211^2 \cdot 7420]} = 5{\cdot}7$ Meilen, b) 4 Meilen.) **11.** Das Aphel des Encke'schen Kometen ist gleich 40 Mill. Meilen, das Perihel 3 Mill. Meilen; wie gross ist die Geschwindigkeit im Aphel, wenn die im Perihel 12 Meilen beträgt? — (0·9 Meilen.) **12.** Die Umlaufszeiten von Neptun und Merkur sind 60 177 und 88 Tage; wie weit ist der erstere von der Sonne entfernt, wenn die Entfernung des letzteren 8 Mill. Meilen beträgt? — (621 Mill. Meilen.) [Die Aufg. 5 und 6 sind von Fliedner und Krebs, 4 und 7—9 von Budde, 10—12 von Reis.]

§ 17. Bewegungsenergie der Sonne und der Planeten. Massenmittelpunkt. Newton schloss aus den krummlinigen Planetenbahnen auf eine von der Sonne ausgeübte Centralkraft. Umgekehrt macht auch die Existenz einer Centralkraft die Annahme einer krummlinigen Bewegung nothwendig, deren Fliehkraft die Centripetalkraft aufzuheben vermag und es hindert, dass die wechselwirkenden Massen gegen einander stürzen. Da nach dem Gravitationsgesetze auch jeder Planet auf die Sonne anziehend wirkt, so ist der letztere Schluss auch auf die Sonne anwendbar; auch sie muss in Bezug auf jeden Planeten sich in einer krummlinigen Bahn bewegen, nachdem sie der Gravitation der Planeten widersteht. Ausser diesen Bewegungen der Sonne und Planeten findet noch eine andere Bewegung des ganzen Sonnensystems statt. Es ist nämlich aus der scheinbaren Gestaltveränderung der Sternbilder nach langen Zeiträumen zu schliessen, dass es sich fortschreitend im Himmelsraume bewegt. Die wirklichen Bewegungen der Sonne und der Planeten setzen sich demnach aus mehreren Bewegungen zusammen, und es muss untersucht werden, in wieferne die einfachen Bewegungen einzeln betrachtet werden dürfen, und welchen Einfluss diese Bewegungen auf einander ausüben.

Fig. 9.



In Fig. 9 sei m ein Massentheilchen, das einen Himmelskörper des betrachteten Systemes darstelle; w sei seine wirkliche Geschwindigkeit. Besitzt das System eine fortschreitende Bewegung mit der Geschwindigkeit u, so kommt u allen Massentheilen des Systems als Geschwindigkeitscomponente zu. Die andere Geschwindigkeitscomponente v entspricht der inneren Bewegung des Systems. Aus dem Geschwindigkeitsparallelogramme erhält man für

$$w^2 = u^2 + v^2 + 2u \cdot v \cdot \cos(uv).$$

Der Ausdruck gilt für jede einzelne Masse des Systems, und daher kann man für die ganze Bewegungsenergie setzen

$$\sum \frac{1}{2} m w^2 = \sum \left[\frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} m v^2 + m \cdot u \cdot v \cdot \cos(u \cdot v)\right]$$
$$= \frac{1}{2} u^2 \cdot \sum m + \sum \frac{1}{2} m v^2 + u \cdot \sum m \,.\, v \cdot \cos(uv)\,.$$

Die Glieder mit u bestimmen den Zustand des Systems infolge der fortschreitenden Bewegung; jene mit v den inneren Bewegungszustand. Die zwei ersten Glieder der Gesammtenergie geben die lebendigen Kräfte der beiden Bewegungen an. Wir können dieselben als die Äquivalenz der Arbeiten äusserer und innerer Kräfte ansehen. Das dritte Glied, das die Geschwindigkeiten u und v als Factoren enthält, muss verschwinden, wenn die äusseren und inneren Bewegungen, beziehungsweise die Arbeiten äusserer und innerer Kräfte von einander unabhängig sein sollen; denn es dürfen infolge einer Änderung von u die Glieder mit v nicht verändert werden und umgekehrt, welcher Bedingung nur entsprochen wird, wenn das letzte Glied gleich Null ist.

Die lebendige Kraft des Systems ist also, wenn für Σm die ganze Masse M des Systems gesetzt wird,

$$\sum \frac{1}{2} m w^2 = \frac{1}{2} M u^2 + \sum \frac{1}{2} m v^2,$$

d. h. gleich der Summe der Energien der fortschreitenden und inneren Bewegungen.

Die Bedingung für diese Zerlegbarkeit ist

$$\Sigma m \cdot v \cdot \cos(uv) = 0\,.$$

Für das Product aus der Masse in die Geschwindigkeit ist der Name „Bewegungsgrösse“ gebräuchlich; $m \cdot v \cdot \cos(uv)$ ist somit die Bewegungsgrösse der inneren Bewegung von m in der Richtung der fortschreitenden Bewegung. Die Summe aller dieser Bewegungsgrössen soll gleich Null sein. Diese Bedingung lässt sich noch in anderer Form darstellen. Wir drücken die Geschwindigkeit $v \cdot \cos(uv)$ durch die Componente von w in der Richtung von u und durch u selbst aus. Darnach geht die vorstehende Summe über in

$$\Sigma m (w \cdot \cos(uw) - u) = 0$$

oder in

$$\Sigma m \cdot w \cdot \cos(uw) = \Sigma m \cdot u = M \cdot u\,,$$

d. h. die Summe der Bewegungsgrössen aller Massentheile in der Richtung der fortschreitenden Bewegung muss gleich sein der Bewegungsgrösse der fortschreitenden Bewegung der ganzen Masse, die man sich in einem Punkte vereint denken kann. Dieser Punkt, dessen Bewegung die fortschreitende oder äussere Bewegung des Körpers darstellt, heisst Massenmittelpunkt. Seine Lage im Massensystem lässt sich nach der vorstehenden Gleichung ermitteln, wenn wir von

jedem Massentheilchen die Bewegung in der X-Richtung ausgeführt denken; wir setzen für die Geschwindigkeiten $w \cdot \cos(uw) = dx/dt$ und für $u = dX/dt$ und erhalten

$$\frac{1}{dt} \cdot \sum m \cdot dx = \frac{1}{dt} M \cdot dX$$

oder

$$\Sigma m \cdot x = M \cdot X.$$

Eine Constante ist weiter nicht hinzuzufügen; denn denken wir alle Massentheile m im Massenmittelpunkt zu M vereint, so besteht die linke Seite der Gleichung nur aus einem Gliede und nimmt ohne weiteres die Form der rechten Seite an. Die Gleichung genügt vollkommen dem Satze von den Bewegungsgrössen. Denkt man sich von demselben Systeme fortschreitende Bewegungen in den Richtungen der Y- und Z-Achse des Coordinatensystemes ausgeführt, so kann man noch zwei weitere analoge Gleichungen wie die vorstehende aufstellen und erhält zur Bestimmung des Massenmittelpunktes die drei Gleichungen

$$M \cdot X = \Sigma m \cdot x, \quad M \cdot Y = \Sigma m \cdot y, \quad M \cdot Z = \Sigma m \cdot z.$$

Zusammengefasst, lauten die Gleichungen in Worten: Das Product aus der Masse eines Systemes und dem normalen Abstande des Massenmittelpunktes von einer Ebene ist gleich der Summe der Producte aus den einzelnen Massentheilen in ihre Normalabstände von derselben Ebene.

Solange der Massenmittelpunkt in Ruhe ist, muss auch das ganze System als ruhend betrachtet werden; die indessen vor sich gehenden Bewegungen zählen zu den inneren Bewegungen des Systems. Die Bewegung des Massenmittelpunktes, in dem man sich die ganze Masse des Systems vereint denken kann, repräsentiert die Bewegung des Massensystems nach aussen. Bei solcher Auffassung ist die Zerlegung der ganzen Bewegungsenergie in die Energie der inneren und in die Energie der fortschreitenden Bewegung gestattet.

Aufg. 1. Wenn das Verhältnis der Sonnenmasse zur Erdmasse m_1/m_2 (= 350 000) gegeben ist, in welchem Verhältnis wird die Entfernung der Mittelpunkte von Sonne und Erde (= 20 140 000 Meilen) durch den Massenmittelpunkt beider Körper getheilt, und wie weit liegt derselbe ungefähr vom Sonnenmittelpunkt entfernt? — (1 : 350 000, 57 Meilen.) **2.** In welcher Beziehung stehen die Bewegungsrichtungen des Planeten und der Sonne, wenn der Massenmittelpunkt als ruhend betrachtet wird? Welche Bahn beschreibt somit der Sonnenmittelpunkt? (Die beiden Bewegungsrichtungen sind in jedem Augenblicke entgegengesetzt parallel, und der Sonnenmittelpunkt beschreibt eine verhältnismässig kleine, der Planetenbahn ähnliche Ellipse um den Massenmittelpunkt als Brennpunkt.)

3. Damit der von der Sonne zur Erde führende Leitstrahl einen gewissen Winkel beschreibe, habe die Erde die Geschwindigkeit v, wenn die Sonne ruhend vorausgesetzt wird; welche Geschwindigkeit besitzt demnach die Erde thatsächlich, wenn sich die Sonne nach entgegengesetzter Richtung so bewegt, dass der Massenmittelpunkt des aus Sonne und Planeten bestehenden Systems in Ruhe bleibt? Wie gross ist die Geschwindigkeit der Sonne? Wie gross ist die lebendige Kraft der Erde und der Sonne zusammengenommen? — (Aus dem Satze für die Bewegungsgrössen der inneren Geschwindigkeiten, nämlich $m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0$ folgt für die Erde $v_2 = v \cdot m_1/(m_1 + m_2)$, für die Sonne $v_1 = v \cdot m_2/(m_1 + m_2)$ und für die lebendige Kraft $= m_1 m_2 v^2/2(m_1 + m_2)$.) **4.** Welchen Wert erhält die nach dem zweiten Kepler'schen Gesetze berechnete halbe grosse Achse einer Planetenbahn, wenn die Bewegung der Sonne der vorhergehenden Aufgabe entsprechend berücksichtigt wird? — (Für den Endpunkt der kleinen Achse b gibt das zweite Kepler'sche Gesetz $\frac{1}{2} p \cdot v = a \cdot b \cdot \pi/t$, hierin ist $p = b$, folglich $a = v \cdot t/2\pi$. Mit Rücksicht auf die Sonnenbewegung ist v_2 für v zu setzen, daher wird $a = v \cdot m_1 \cdot t/2\pi(m_1 + m_2)$.) **5.** Wie gross ist die relative Beschleunigung eines Planeten gegen die Sonne, und welchen Wert gewinnt damit die lebendige Kraft des Planeten? Welches ist die ganze mechanische Energie von Sonne und Planeten? — (Die Beschleunigung ist $(km_1/r^2 + km_2/r^2) = k(m_1 + m_2)/r^2$. Durch Einführung derselben in Aufg. 3 § 16 erhält man für die lebendige Kraft $\frac{1}{2} v^2 = k(m_1 + m_2)(1/r - 1/2a)$. Mit Hilfe dieses Wertes folgt nach vorstehender Aufgabe 3 für die lebendige Kraft der Sonne und des Planeten $k m_1 m_2 (1/r - 1/2a)$ und die gesammte Energie $W = W_0 - k m_1 m_2/2a$ [1].) **6.** Aus einem Geschütze von der Gesammtmasse M wird ein Geschoss von der Masse m mit der Geschwindigkeit u abgefeuert; mit welcher Geschwindigkeit vollführt das Geschütz seinen Rücklauf ohne Rücksicht auf die Reibung? — (mu/M.) **7.** Welches ist der Erfolg, wenn ein äusseres Hindernis den Rücklauf der Kanone in der vorhergehenden Aufgabe hemmt? — (Eine Verschiebung des Massenmittelpunktes in der Richtung der äusseren Kraft.) **8.** Um einen Kahn von der Masse m mit der Geschwindigkeit u vorwärts zu bewegen, welche Wassermasse muss mit der Geschwindigkeit U durch die Ruder bewegt werden? — (mu/U.) **9.** Wie erklärt man die Fortbewegung einer Locomotive, die selbstthätige Fortbewegung eines Menschen auf der Erde, das selbstthätige Schwingen eines Turners an einer Stange oder in einer Schaukel? — (Durch Mitwirkung der Bewegungshindernisse als äusserer Kräfte, in deren Richtung die Bewegung erfolgt.) **10.** Zwei Massen m_1 und m_2 bewegen sich beziehungsweise mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nach derselben Richtung hin; welches ist die auch durch den Zusammenstoss nicht zu ändernde Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes? — (Die gesuchte Geschwindigkeit V ergibt sich aus $m_1(V - v_1) - m_2(v_2 - V) = 0$. Es ist

$$V = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/(m_1 + m_2).$$

Dies ist zugleich die gemeinsame Geschwindigkeit zweier unelastischen

1) Vgl. A. Schülke's Aufsatz über das Potential in der Zeitsch. für phys. u. chem. Unterr. V. S. 293 ff.

Körper nach dem Stoss.) **11.** Wo liegt der Massenmittelpunkt einer Kugel, eines homogenen Cylinders, eines prismatischen Körpers?

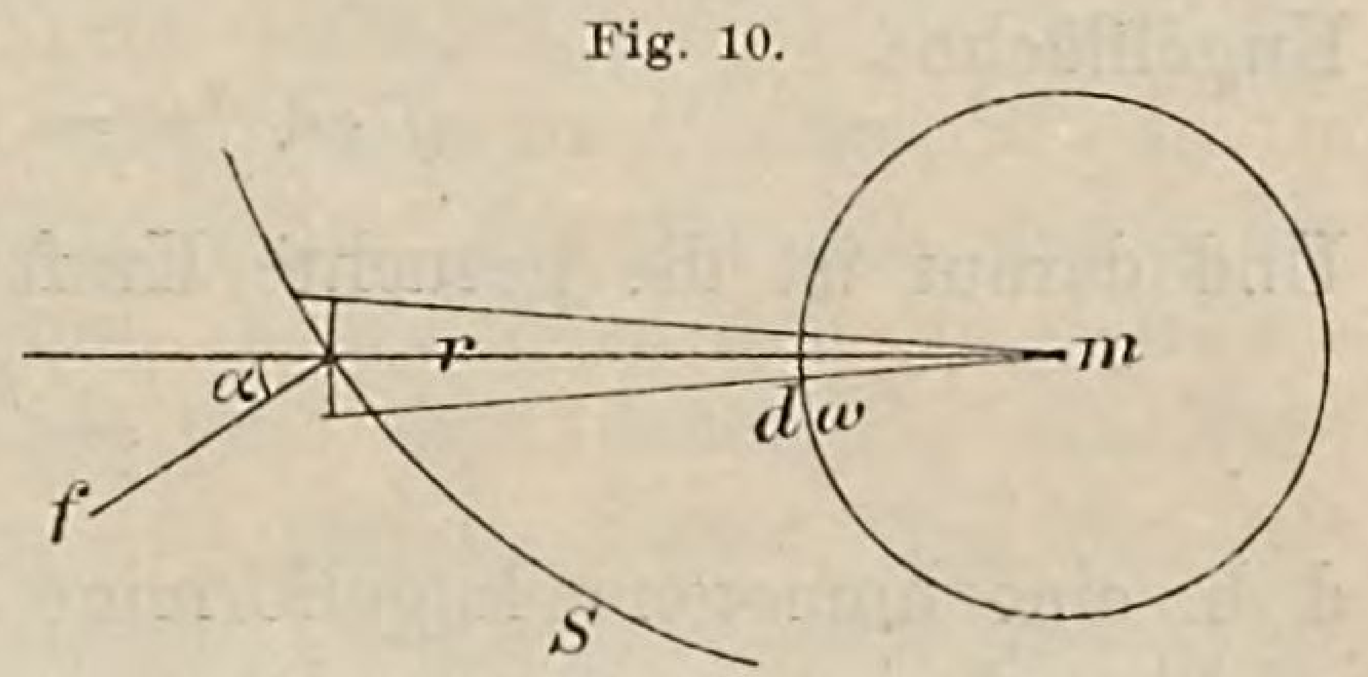
§ 18. **Potential eines Massensystems. Satz von Gauss.** Bei der bisherigen Betrachtung der Erscheinungen wurden die bewegten Körper als kleine Kugeln oder materielle Punkte gedacht, deren Dimensionen gegenüber den anderen Rechnungsgrössen zu vernachlässigen waren. Diese Voraussetzung trifft aber weder bei den schweren irdischen Körpern noch bei den Himmelskörpern zu. Es muss deshalb noch nachgewiesen werden, dass dessen ungeachtet die gewonnenen Resultate richtig bleiben.

Der Beweis hat zu zeigen, dass die Kräfte, welche auf die einzelnen Körper wirken, stets durch eine Resultierende ersetzt werden können, deren Angriffspunkt bei festen Körpern alle Theile folgen müssen. Das Studium der fortschreitenden Bewegung kann sich alsdann auf die Betrachtung der Bewegung des Angriffspunktes der Resultierenden beschränken.

Die gestellte Aufgabe ist elementar leicht lösbar mit Hilfe des Satzes von Gauss über den Flächendruck oder über die sogenannte Kraftströmung.

Zur Gewinnung desselben berechnen wir die normale Kraft F, welche von einer Masse m auf eine Fläche S (Fig. 10) ausgeübt wird, wenn die Fläche auf jeder Einheit mit der Masseneinheit gleichförmig belegt gedacht wird.

Fig. 10.



Die Kraft von m auf ein Flächenelement dS in der Verbindungsrichtung r ist $k \cdot m \cdot dS / r^2$, und daher der normale Flächendruck, wenn f die Kraft auf die Masseneinheit bedeutet,

$$f \cdot dS = \frac{k \cdot m \cdot dS}{r^2} \cdot \cos \alpha ,$$

$dS \cdot \cos \alpha$ kann als die Projection von dS auf eine um m mit dem Halbmesser r geschlagene Kugel aufgefasst werden; dann ist $dS \cdot \cos \alpha / r^2 = d\omega$ die Centralprojection auf einer concentrischen Kugel vom Radius Eins. Durch Einführung des letzten Wertes erhält man

$$f \cdot dS = k \cdot m \cdot d\omega \quad \text{und} \quad F = \int f \cdot dS = k \cdot m \cdot \int d\omega .$$

Man nennt diesen Zug auf die Fläche auch Kraftströmung oder Kraftfluss [1]). Er ist bestimmt durch das Product aus der wirkenden Masse in den Raumwinkel, unter welchem die in Betracht kommende

1) Mascart u. Joubert: Lehrb. d. Elektr. u. d. Magn. Deutsch v. Levy. J. G. Wallentin: Einführung in die moderne Elektricitätslehre. S. 39.

Fläche von m aus erscheint. Der Satz rührt von Gauss her (1813). Die Summe $\int d\omega$ lässt sich leicht bilden, wenn die Fläche S geschlossen ist; sie ist dann als Kugelfläche vom Halbmesser Eins gleich 4π, wenn m innerhalb S liegt, oder gleich Null, wenn m sich ausserhalb der geschlossenen Fläche befindet, weil im letzteren Falle $\sphericalangle\,\omega$ aus zwei gleichen, übereinander liegenden Theilen besteht, die entgegengesetzt gerechnet werden müssen.

Der Satz ist leicht auf mehrere Massentheile anzuwenden. Sind dieselben in einer Fläche eingeschlossen, so gilt für die Kraftströmung jedes Massentheiles der Ausdruck $k \cdot 4\pi \cdot m$ und daher für alle Massentheile

$$\sum \int f \cdot dS = k \cdot 4\pi \cdot \sum m = k \cdot 4\pi M.$$

Mit Hilfe dieses Wertes kann unmittelbar die Kraft gewonnen werden, mit welcher eine Kugelschale oder eine Vollkugel auf eine ausserhalb liegende Masseneinheit wirkt[1]). Die kugelförmige Masse sei M, und die Masseneinheit befinde sich in der Entfernung r vom Kugelmittelpunkte. Ist M seiner ganzen Ausdehnung nach homogen, so ist die Anziehung auf jede Masseneinheit in der Entfernung r dieselbe, d. h. die Kraftströmung auf eine Kugelfläche vom Radius r ist über die ganze Fläche constant. Bezeichnet man die Kraft auf die Masseneinheit mit f, dann ist die Kraftströmung für die gedachte Kugelfläche

$$f \cdot 4r^2\pi = k \cdot 4\pi \cdot M.$$

Und daraus ist die gesuchte Kraft

$$f = \frac{k \cdot M}{r^2},$$

d. h. eine homogene kugelförmige Masse (Hohlkugel oder Vollkugel) wirkt auf eine ausser ihr liegende Masseneinheit so, als ob die ganze Masse im Mittelpunkte vereint wäre. Bezüglich der Constanten k ist zu bemerken, dass dieselbe gleich Eins gesetzt werden kann, wenn die Kraft im absoluten Masse nach Gauss gemessen wird.

Hat die wirkende Masse M die Form einer Kugelschale, und befindet sich die Masseneinheit im Innern in der Entfernung r vom Kugelmittelpunkt, so ist auch jetzt die Kraftströmung in allen Elementen der Kugelfläche $4r^2\pi$ gleich gross; die Kraftströmung durch die ganze Fläche, welche von einem einzelnen Massentheilchen von M herrührt, ist aber gleich Null, weil jedes dieser Theilchen ausserhalb der Fläche $4r^2\pi$ liegt; daher ist auch die ganze Kraftströmung von M auf die Fläche $4r^2\pi$ gleich Null, d. h. auf eine Masseneinheit im Innern einer Kugelschale wirkt keine Kraft.

1) Vgl. Poincaré: Elektr. u. Optik. Deutsch von Jäger u. Gumlich. J. G. Wallentin a. a. O. S. 44.

Befindet sich die angezogene Masseneinheit im Innern einer Vollkugel, so wirken die Schalen der Kugel, deren Radien grösser sind als die Entfernung der Masseneinheit vom Mittelpunkt, auf diese nicht ein; es kommt nur die Wirkung der übrigen Vollkugel in Betracht, deren Masse man sich im Mittelpunkte vereint denken kann.

Mit den hiermit gewonnenen Sätzen ist nun die früher gemachte Annahme gerechtfertigt, dass kugelförmige Himmelskörper so wirken, als ob ihre Masse im Mittelpunkte vereint wäre.

Auch das bereits (§ 16) in der Form $-M/r$ benützte Potential der Sonne ist richtig, wenn auch die Sonne nicht als Massenpunkt, sondern als kugelförmiger Köper betrachtet wird. Denn man erhält für jede kugelförmige Masse M als Mass für das Potential die Arbeit, die eine unter der Einwirkung von M stehende Masseneinheit aus einer bestimmten Entfernung r ins Unendliche oder umgekehrt zu führen vermag; und diese Arbeit ist, wenn $k = 1$,

$$P = \int_{\infty}^{r} f \cdot dr = \int_{\infty}^{r} \frac{M}{r^2} \cdot dr = \frac{M}{r}.$$

Das Potential steht mit der potentiellen Energie in inniger Beziehung. Die Arbeit der Annäherung wird von der potentiellen Energie der in Betracht kommenden Massen geleistet. Ist diese Energie w_0, wenn sich die Massen in wirkungsloser Ferne befinden, so ist sie nach der Annäherung $(w_0 - M/r)$. Da w_0 eine bestimmte Grösse ist, so ist der mit der Entfernung veränderliche Wert M/r für den durch die potentielle Energie bedingten Zustand, in welchem sich die wirkenden Massen befinden, charakteristisch und darf daher als ein Mass dieses Zustandes angesehen werden. In diesem Sinne wird der berechnete Arbeitswert P mit dem Namen Potential bezeichnet. Der Ausdruck gilt, sowohl wenn die Masse M die Form einer Vollkugel, als auch wenn sie die einer Kugelschale besitzt.

Für den letzteren Fall soll noch die Arbeit berechnet werden, welche von der Gravitation geleistet wird, wenn sämmtliche Massentheilchen von M aus unendlicher Entfernung bis auf die Kugelschale gebracht werden. Wird der Masse M die Masseneinheit zugeführt, so ist der Arbeitswert M/r; dem Massentheilchen dM entspricht somit die Arbeit $M \cdot dM/r$. Durch Summierung erhält man den gesuchten Betrag

$$W = \frac{M^2}{2r};$$

derselbe gibt die durch die Annäherung der Massentheilchen von M in Arbeit verwandelte potentielle Energie an; er wird auch das Potential der Masse M auf sich selbst genannt. Die Betrachtung der physikalischen Verhältnisse im „Kraftfelde“ und die geo-

metrische Darstellung derselben nach Faraday lassen ein anschauliches Bild für den Potentialwert gewinnen, das im nächsten Paragraphen gegeben werden soll.

Aufg. 1. Eine Kugelschale habe den Halbmesser r und die Flächendichte δ; welches ist die Differenz der Kräfte, die an einem Punkte der äusseren und an einem Punkte der inneren Fläche wirken? — ($4\pi\delta$.) **2.** Welches ist der Potentialunterschied für die genannten beiden Punkte? — (Null.) **3.** Mit welcher Kraft wirkt eine unbegrenzte Kreiscylinderfläche vom Radius r und der Flächendichte δ auf eine ausserhalb liegende Masseneinheit, die sich in der Entfernung x von der Cylinderachse befindet? — (Die Kraft wirkt normal zur Cylinderfläche; so kann man auch die ganze Wirkung der Cylinderfläche durch Kräfte herbeigeführt denken, die normal und gleichmässig vertheilt auf ihr wirken. Durch die gegebene Masseneinheit kann man eine concentrische Cylinderfläche vom Halbmesser x und beliebiger Höhe h legen; auf deren Mantel ist die Kraftströmung $2x\pi \cdot h \cdot f$; auf die Basen ist die Kraftströmung Null, weil die Kräfte parallel wirken. Daher gilt nach Gauss für den Hilfscylinder und die von ihm eingeschlossene Masse die Gleichung $2\pi x \cdot h \cdot f = 4\pi \cdot 2r\pi h \cdot \delta$; daraus folgt $f = 4r\pi \cdot \delta/x$.) **4.** Wie lässt sich das Resultat der vorhergehenden Aufgabe auf eine unendlich lange Gerade mit gleichförmiger Massenvertheilung beziehen, wenn man mit δ die Masse der Längeneinheit bezeichnet? — (Man setzt $2r\pi \cdot \delta = \delta'$ und erhält $f = 2\delta'/x$.) **5.** Mit welcher Kraft wirkt eine unbegrenzte Ebene von der Flächendichte δ auf eine Masseneinheit in der normalen Entfernung x? — (Ähnlich wie in Aufg. 3 findet man nach Gauss $f = 2\pi\delta$.) **6.** Welchen Wert hat das Potential eines kreisförmigen, unendlich langen hohlen Cylinders in einem äusseren Punkt, dessen Abstand von der Achse $= x$ ist? Welche Formen nimmt der Wert an für einen Vollcylinder und für eine Gerade? — (Anknüpfend an Aufg. 3 erhält man für das Potental $P = 4r\pi\delta\int dx/x = 4r\pi\delta \log x_\infty/x$ [1]) und mittelst zweier zusammengehöriger Werte P_1 und x_1 das Resultat $P = P_1 + 4r\pi \cdot \delta \log x_1/x$.) **7.** Es ist das Potential einer Kreisscheibe für Punkte der Normalen im Mittelpunkte zu berechnen. Wie gross ist das Potential, wenn die normale Entfernung x negativ wird, und welche Änderung erfährt das Potential beim Durchgang durch die Scheibe? — (Für einen Kreisring vom Radius r ist in einem Punkte in der Entfernung l das Potential

1) Behufs elementarer Summierung der Werte $\omega = \Delta x/x$ kann man setzen $\Delta x = x_2 - x_1$ und $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Man erhält dann

$$x_2/x_1 = (1 + \omega/2)/(1 - \omega/2) \doteq (1 + \omega).$$

Bildet man die analogen Gleichungen für je zwei aufeinander folgende Werte von x und multipliciert die erhaltenen n Gleichungen, so folgt

$$x_{n+1}/x_1 = (1 + \omega)^n,$$

und wenn $n \cdot \omega = w$ gesetzt und logarithmiert wird,

$$\log(x_{n+1}/x_1) = w \log(1 + \omega)^{1/\omega} = w,$$

indem $\lim(1 + \omega)^{1/\omega} = 2{\cdot}718281 \cdots$ für $\lim \omega = 0$.

$2r\pi \cdot dr \cdot \delta/l = 2\pi\delta \cdot dl$, da $rdr = ldl$; demnach folgt für die Kreisscheibe $2\pi\delta(l - x)$. Vgl. A. Miller's Aufs. über d. elektr. Potential in d. Blätt. f. d. Bayerische Rlschlw. 1890.) **8.** Es ist das Potential einer Vollkugel vom Radius R auf sich selbst zu berechnen. — (Das einfache Potential für einen inneren Punkt in der Entfernung x setzt sich zusammen aus dem Potential der Vollkugel $\frac{4}{3}\pi x^3\delta/x$ und aus dem Potential der Hohlkugel $\int_x^R 4r^2\pi \cdot \delta \cdot dr/r$; man erhält $2\pi\delta(R^2 - x^2/3)$, bezogen auf die Masseneinheit. Berechnet man den Betrag für die Schale $4x^2\pi \cdot \delta \cdot dx$, summiert über die ganze Kugelmasse M und dividiert durch 2, so erhält man $3M^2/5R$.) **9.** Welche Arbeit hat die Schwerkraft bei der Bildung der Erde geleistet, wenn das Gewicht der Erde ungefähr $Q = 6 \cdot 10^{24}$ kg und der Halbmesser der Erde $R = 6370$ km sind?

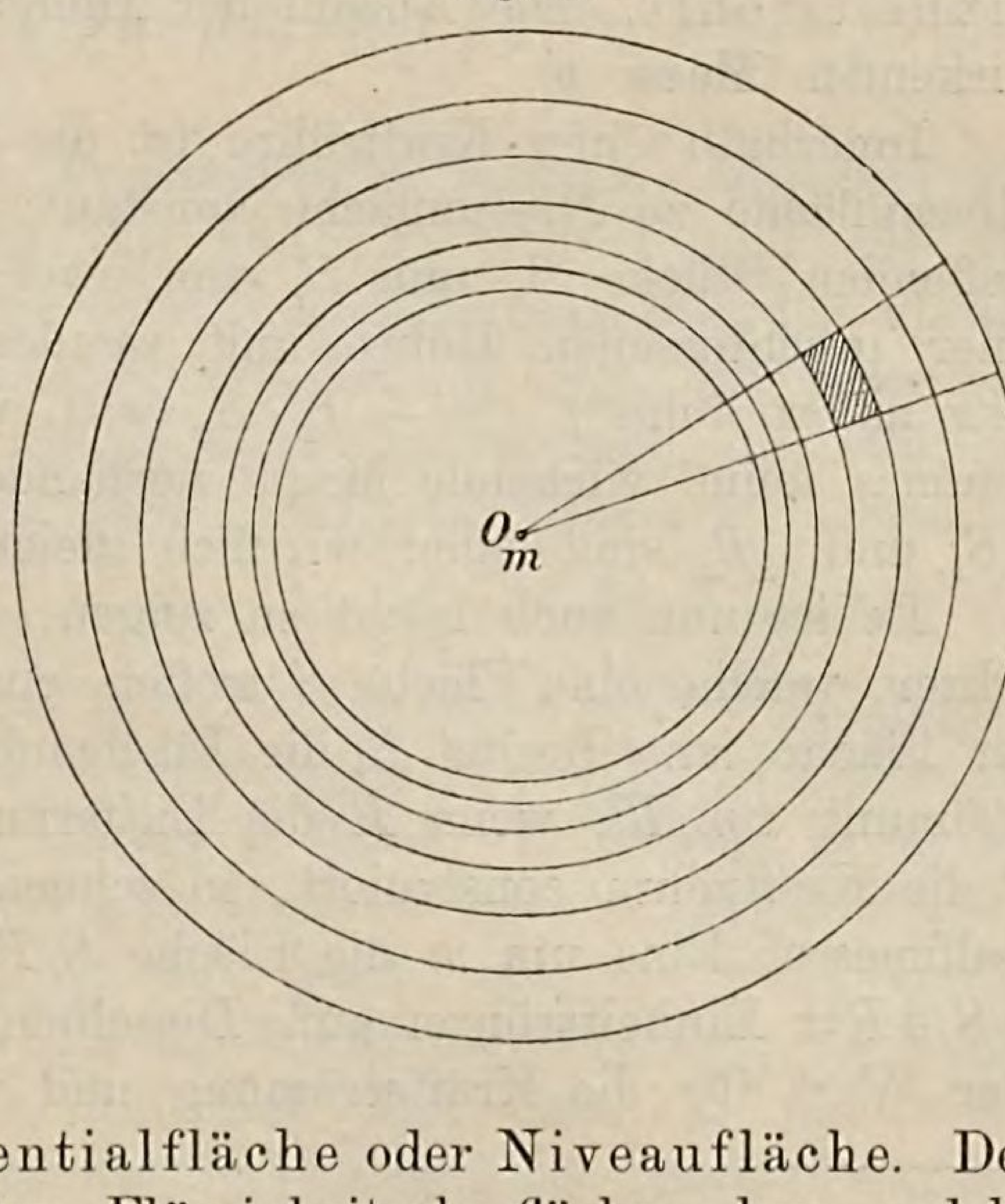
$(W = 3k \cdot M^2/5R = 3 \cdot a \cdot R \cdot M/5 = 3 \cdot Q \cdot R/5 = 23 \cdot 10^{30}$ kgm.)

10. Welche Arbeit hat die Gravitation der Sonne bei deren Bildung geleistet, wenn der Halbmesser $R = 95\,000 \cdot 7500$ m, die Dichte $\delta = 1{\cdot}38$ und die Beschleunigung auf der Sonne das 28·3-fache der Schwerebeschleunigung auf der Erde sind?

$(W = 3kM^2/5R = 3 \cdot 28{\cdot}3 \cdot R \cdot 4 \cdot R^3\pi \cdot 1{\cdot}38 \cdot 1000/3 \cdot 5 = 253 \cdot 10^{38}$ kgm.)

§ 19. **Kraftfeld. Niveauflächen. Kraftlinien.** Die Vertheilung der Massenwirkung im Raume lässt sich mit Hilfe der von Faraday eingeführten Niveauflächen und Kraftlinien übersichtlich und geometrisch anschaulich darstellen. Wir betrachten zunächst eine Masse m, die auf einer Kugelfläche gleichmässig vertheilt ist, deren Mittelpunkt O und deren Halbmesser gleich Eins sei. Das Potential P derselben in der Entfernung r vom Mittelpunkte ist $-m/r$; dieser Wert ist für alle Punkte des Raumes derselbe, denen dasselbe r zukommt, also für alle Punkte einer Kugelfläche um O mit dem Halbmesser r. Auf dieser Kugelfläche findet also keine Potentialänderung statt, und daher ist zu einer Bewegung auf derselben auch keine Arbeit erforderlich. Die Fläche heisst deshalb Fläche gleicher Arbeit, Äquipotentialfläche oder Niveaufläche. Der letztere Name rührt von den Flüssigkeitsoberflächen her, welche Flächen gleicher Arbeit in Bezug auf die Schwerkraft sind. Aus

Fig. 11.



der Constanz des Potentiales folgt auch, dass längs der Niveaufläche keine Kraftwirkung besteht; daher muss die Kraftrichtung zur Niveaufläche normal sein. Die Aufeinanderfolge der Niveauflächen, welche gleichen Potententialänderungen entsprechen, versinnlicht Fig. 11.

In O seien $m = 18$ Masseneinheiten. Die gezeichneten Niveauflächen gehören zu den Potentialwerten 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6; die Radien sind der Reihe nach 1·5, 1·63, 1·82, 2, 2·25, 2·57, 3. Die Vertheilung bietet ein deutliches Bild über die Abnahme der Kraft mit der Entfernung; denn die Kraft in einem Punkte ist gegeben durch das Verhältnis dP/dr; sie ist also bei gleichbleibender Potentialdifferenz dP dem Abstande dr der Niveauflächen umgekehrt proportional. Je dichter die Flächen aufeinander folgen, desto stärker sind die Kräfte auf die Masseneinheiten. Die Verdichtung nimmt gegen m hin beständig zu.

Würde ein Massentheilchen im Raume der Kraft von m überlassen, so bewegte es sich normal zu den Niveauflächen gegen O hin. Der Weg, den es beschriebe, heisst Kraftlinie. Es lässt sich von jedem Raumpunkte aus eine Kraftlinie construieren, indem man von Niveaufläche zu Niveaufläche normale Linienelemente verzeichnet. Ein von Kraftlinien durchsetzter Raum heisst Kraftfeld[1]).

Begrenzt man auf der Kugelfläche, auf welcher die Masse m ausgebreitet ist, ein Stück und zieht von den Punkten der Grenzlinie Kraftlinien, so setzen diese eine Kraftröhre zusammen; umschliesst eine solche Kraftröhre die Masseneinheit von m, so heisst sie eine Einheitsröhre. Die Anzahl der Einheitsröhren gibt den Wert der wirkenden Masse m.

Innerhalb einer Kraftröhre ist die Kraftströmung im Felde von Niveaufläche zu Niveaufläche constant; denn betrachten wir die betreffenden Stücke S_1 und S_2 von zwei Niveauflächen als die Basen einer geschlossenen Röhre und wenden auf diese den Gauss'schen Satz an, so folgt $f_1 \cdot S_1 - f_2 \cdot S_2 = 0$, weil im Innern des gedachten Raumes keine wirkende Masse vorhanden ist. Die Kraftströmungen $f_1 S_1$ und $f_2 S_2$ sind daher wirklich gleich.

Es ist nun auch leicht zu zeigen, dass die Anzahl der Einheitsröhren, welche eine Fläche S treffen, ein Mass für die Kraftströmung der Fläche ist. Besitzt S die Flächendichte Eins, so ist die Kraftströmung Sm/R^2, wenn R die Entfernung OS ist. Denken wir für S die Kraftröhre construiert, so schneidet diese auf der Kugel vom Halbmesser Eins um m die Fläche S/R^2 aus, und auf dieser stehen $mS/4R^2\pi$ Einheitsröhren auf. Dieselben Einheitsröhren treffen auch S. Der Wert für die Kraftströmung und für die Anzahl der Einheits-

1) Maxwell, Lehrb. d. El. S. 160. Deutsch von Weinstein; u. Maxwell, die Elektr. in elementarer Behandlung. S. 47 ff. Deutsch von Grätz.

röhren sind daher proportional und können bei entsprechender Wahl der Krafteinheit für einander gesetzt werden.

Ausser der Richtung und Stärke der Kräfte kann auch noch die potentielle Energie des Kraftfeldes graphisch bestimmt werden. Es geschieht dies durch die Bildung von Zellen aus den Einheitsröhren und den auf einander folgenden Niveauflächen, die der Potentialdifferenz Eins entsprechen. Aus jeder Einheitsröhre werden so viele Zellen gebildet, als der Potentialwert eines Punktes einer gegebenen Hohlkugel m angibt, also $P = m/r$; und alle m Einheitsröhren oder das ganze Kraftfeld um m zerfällt in m^2/r Zellen. Der Ausdruck ist der doppelte Betrag der potentiellen Energie der Masse m der Hohlkugel oder des Potentials von m auf sich selbst.

Auch die algebraische Form für die potentielle Energie lässt sich auf eine Summe von Energiewerten zurückführen, die über das ganze Kraftfeld vertheilt gedacht werden können. Die Masse m einer sehr dünnen Hohlkugel vom Halbmesser r wirkt auf die Flächeneinheit mit dem Drucke $(m/r^2) \cdot (m/4r^2\pi) = p$. Auf die Masseneinheit wirkt die Kraft $f = m/r^2$, die der Kraftströmung auf die Flächeneinheit dividiert durch 4π gleich ist. Zwischen f und p besteht die Beziehung $f^2 = 4\pi \cdot p$. Mit Hilfe der Kraftströmung im Felde, beziehungsweise mittelst der Kräfte f und p, die wir auch im Felde wirksam denken, lässt sich nun das Potential der Hohlkugel auf sich selbst schreiben:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{r} = \frac{1}{2} \int_{\infty}^{r} \frac{m^2}{4\pi \cdot R^4} \cdot 4R^2\pi \cdot dR = \frac{1}{2} \int p \cdot dv = \frac{1}{8\pi} \int f^2 \cdot dv.$$

Die Werte p und f, auf die Kugelmasse m bezogen, bedeuten beziehungsweise die Kräfte auf die Flächeneinheit und auf die Masseneinheit; da sie in der vorstehenden Summe auf den unendlichen Raum des Kraftfeldes bezogen werden, so folgt, dass man sich dieselben auch im Kraftfelde fortgepflanzt denken kann, und zwar so, als ob in jedem Raumelemente $(4R^2\pi \cdot dR)$ die Masse m vorhanden wäre. Die Arbeitselemente $\frac{1}{2} p \cdot dv$ oder $\frac{1}{8\pi} f^2 \cdot dv$ stimmen, wie nachgewiesen werden wird, mit dem Arbeitswerte eines Flüssigkeitsgewichtes, eines Gases oder eines anderen elastischen Körpers überein, deren Volumen dv unter dem Drucke p steht. W. Ostwald nennt sie gelegentlich Raumenergie, speciell Volumenergie[1]). Die ermittelten Energiewerte führen demnach zu dem Satze, dass die potentielle Energie der Volumenergie im Kraftfelde gleichkommt; sie leiten zu der Faraday-Maxwell'schen Annahme hin, dass die potentielle Energie in einem Arbeitswerte des Kraftfeldes, in einem Zwangs-

1) W. Ostwald: Lehrb. d. allg. Chem. II. Chem. Energie. S. 17 u. 31 ff.

zustande des betreffenden Raummediums ihren Grund habe (vgl. § 53b). Anhaltspunkte zur experimentellen Begründung dieser Anschauung bietet erst die Lehre von der Elektricität und vom Magnetismus, und soll deshalb hier darauf nicht näher eingegangen werden. Nur mag bemerkt werden, dass die vorstehenden Werte für W für eine beliebige Massenvertheilung von m und daher ganz allgemeine Geltung haben [1]).

Sind ausser einer bisher betrachteten Masse m noch andere Massen vorhanden, so summieren sich für jeden Punkt des gemeinschaftlichen Kraftfeldes die Potentialwerte, und die Kräfte setzen sich zu Resultierenden zusammen. Die Niveauflächen und die Kraftlinien erhalten compliciertere Formen.

Constructiv kann man einen ebenen Schnitt der Niveauflächen, der auch die Massenpunkte enthält, gewinnen, z. B. für zwei gegebene Massenpunkte m_1 und m_2, wenn man um jeden derselben die auf einander folgenden, kreisförmigen Niveauflächenschnitte, denen eine constante Potentialdifferenz entspricht, verzeichnet. Jedem Schnittpunkte zweier Kreise kommt als Potentialwert die Summe der Potentiale der beiden sich schneidenden Kreise zu. Die Verbindung der Punkte mit gleichem Potential gibt die Schnittlinie mit einer Niveaufläche. Die Kraftlinien sind zu den Niveauflächenschnitten normal zu verzeichnen.

Wenn die Niveauflächen unter Umständen auch sehr complicierte Formen haben, so lässt sich im allgemeinen doch angeben, dass die höheren Potentialen entsprechenden Flächen stets den wirkenden Massen näher liegen, und dass niemals zwei verschiedene Niveauflächen einander schneiden; denn sonst müssten einem Punkte im Felde mehrere Potentialwerte zukommen, und es müsste zur Überführung der Masseneinheit von diesem Punkte in's Unendliche unter denselben Umständen zweierlei Arbeit erforderlich sein, was unmöglich ist.

Aufg. 1. Es seien zwei Massentheilchen von je 18 Masseneinheiten in der Entfernung von 4 cm gegeben. Man verzeichne einen ebenen Schnitt mit den Niveauflächen $18/r_1 + 18/r_2 = 9, 12, 15, 18$. — (Man construiere zunächst für jeden Massenpunkt die Kreisschnitte mit den Niveauflächen, welche der Reihe nach den Potentialwerten $18/r = 2{\cdot}5, 3, 3{\cdot}5, 4, \ldots 15$ entsprechen.) **2.** Es ist die potentielle Energie eines Feldes mit zwei kugelförmigen Massen m_1 und m_2, deren Abstand R sei, mit Hilfe der Kraftströmung im Felde nach der Form $\frac{1}{8\pi} \cdot \int f^2 \cdot dv$ zu ermitteln. — (Die Kraft f für jedes Volumelement im Felde ist die Resultierende der von den Massen m_1 und m_2 herrührenden Kräften $f_1 = m_1/r_1{}^2$

1) Über die bisherigen negativen Ergebnisse der Untersuchung der Frage nach der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation siehe S. Oppenheim, Progr. d. k. k. akad. Gym. in Wien. 1895.

und $f_2 = m_2/r_2^2$. Durch Einführung dieser Werte und Summierung über den unendlichen Raum erhält man $(m_1^2/2r_1 + m_2^2/2r_2 - m_1 m_2/R)$. Vergl. die Ausführung der ähnl. Aufg. in der Elasticitätslehre und in der Elektrostatik.)

§ 20. **Gestalt der Erde.** Wenn man von Bergen und Thälern absieht, so erscheint die Erde als eine runde, ebene Scheibe. So wird die Gestalt der Erde nach ihrem Scheine in den ältesten Berichten geschildert und nach der Lage des Ortes der Berichterstatter mit dem Meere in Verbindung gebracht. Homer beschreibt die Erde als eine ruhende Scheibe, die vom Okeanos umströmt werde. Thales (650 v. Chr.) hielt sie für eine auf Wasser schwimmende Scheibe, Anaximander (550 v. Chr.) für einen schwimmenden Cylinder.

Mit der Annahme einer Scheibe ist nicht erklärbar, dass der Horizont stets kreisförmig ist und umso grösser wird, je höher ein Beobachter seinen Standpunkt wählt, ferner, dass hohe Gegenstände, denen man sich nähert, und heran segelnde Schiffe zuerst in ihren obersten Theilen sichtbar werden, und dass dieselben Sterne für westlicher gelegene Orte später auf- und untergehen als für östlichere. Diese Beobachtungen mussten schon frühzeitig gemacht werden und die Idee von der Kugelgestalt der Erde anregen. In der That erklären schon Pythagoras, Eudoxus und Aristoteles die Erde für eine Kugel. Erathostenes (276—194 v. Chr.) und Ptolemäus beobachteten, dass bei Zurücklegung gleicher Strecken nach Norden der Polarstern um gleiche Höhen steigt, und sie schlossen daraus auf die Kugelgestalt der Erde. Der erstere beobachtete ferner zu Syene zur Zeit der Sommersonnenwende die Sonne, als sie gerade im Zenith stand, während sie zu Alexandrien zu derselben Zeit $7^1/_2{}^0$ vom Zenith entfernt war. Er schloss hieraus, dass die beiden Orte $7^1/_2{}^0$ von einander entfernt seien; da diese Entfernung 5000 Stadien (à 184·97 m) betrug, so berechnete er die Länge von 360⁰ zu 44 000 km und betrachtete dieselbe als den Umfang der Erde. (Nach neueren Messungen beträgt die Länge eines Meridians 40 003 km.)

Weitere Beweise für die Kugelgestalt der Erde sind: Bei Reisen von Norden nach Süden steigen immer neue Sterne über den südlichen Hoizont auf, während die auf der Nordseite immer tiefer hinab sinken, ferner Erdumsegelungen, die runde Gestalt des Erdschattens bei Mondfinsternissen, die Ergebnisse der geographischen Ortsbestimmung, geometrische Messungen und endlich der physikalische Grund, dass die Erdoberfläche eine Niveaufläche der Schwerkraft sein muss. Hiezu muss bemerkt werden, dass die runde Gestalt des Erdschattens auf dem Monde kein so beweiskräftiger Grund für die Kugelgestalt der Erde ist, als er gewöhnlich in geographischen Werken hingestellt wird; denn auch ebene Flächen werfen selbst bei geradliniger Begrenzung auf runde Körper runde Schatten; die häufige

Angabe, dass der Schatten kreisrund sei, ist völlig falsch, weil der Schattenkegel der kugelförmigen Erde mit dem kugelförmigen Monde eine Curve vierter Ordnung als Schnitt liefert, die nur in dem Augenblicke, in welchem die Kegelachse durch den Mondmittelpunkt geht, in zwei Kreise zerfällt.

Als Niveaufläche der Schwere ist die Erdoberfläche kugelförmig, wenn der Massenmittelpunkt der Erde als Convergenzpunkt der resultierenden Schwerkraft betrachtet wird. Die Schwerkräfte wirken alsdann über der ganzen Erdoberfläche radial, und die Fläche, welche zu diesen Kraftlinien normal ist, ist nur die Kugelfläche. Wäre die Erdoberfläche keine Niveaufläche, so müssten infolge einer Componente der Schwerkraft alle beweglichen Körper, wie z. B. das Wasser, sich solange bewegen, bis die Form der Niveaufläche erreicht wäre. Der angegebene physikalische Grund setzt einen Ruhezustand der Erde voraus.

Aufg. 1. Wenn die Zenithdistanz des Polarsternes an einem Orte 40^0 beträgt, wie gross ist annähernd die geogr. Breite? — (50^0.) **2.** Wie lang ist der Schatten einer $h = 10$ m hohen verticalen Stange am 21. Juni mittags in einer geogr. Br. von $\varphi = 68^1/_2{}^0$? Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^1/_2{}^0$. — ($l$ tg $(\varphi - \varepsilon) = 10$ m.) **3.** Um wie viel Minuten hat ein Ort, der um 1^0 westlicher liegt als ein anderer, später Mittag als dieser? — (Um 4 Min.) **4.** Welchen Unterschied zeigen die Uhren in London und Petersburg, wenn die geogr. Längen dieser Orte beziehungsweise $17^0\ 34'\ 3''$ und $47^0\ 58'\ 9''$ sind? **5.** Unter welchen Höhenwinkeln erscheint der Polarstern in Wien und in Berlin, wenn die geogr. Breiten dieser Orte $48^0\ 12'\ 36''$ und $52^0\ 30'\ 17''$ sind? **6.** Glaisher und Coxwell stiegen am 5. Sept. 1852 mit einem Luftballon bis zu einer Höhe von 12 000 m; welchen Bogen auf der Erdkugel hätten sie übersehen können, wenn sie nicht das Bewusstsein verloren hätten? $r = 6373$ km. — ($3^1/_2{}^0$.) **7.** Wie hoch müsste man sich erheben, um ganz Europa zu überblicken? — (262·5 Meilen.) **8.** Der Chimborazo ist 20 400 Fuss = 0·863 Meilen hoch; in welcher Entfernung von seinem Fusse verschwindet dem Seefahrer die Bergspitze? $r = 859$ Meilen. — (38·5 Meilen.) (Reis.)

§ 21. **Achsendrehung der Erde.** Nach dem geocentrischen Weltsysteme des Ptolemäus (um 140 n. Chr.) steht die Erde in der Mitte des Weltraumes ruhig, und das Himmelsgewölbe bewegt sich um eine durch die Erde gehende Weltachse. Vor Ptolemäus hatte bereits Aristarch aus Samos (279 v. Chr.) die Rotation der Erde angenommen. Diese Annahme wurde mit der Begründung des Copernicanischen Weltsystems zur Gewissheit. Beweise für die Achsendrehung der Erde sind: 1) Die grössere Wahrscheinlichkeit, dass sich die Erde um ihre Achse dreht, als dass der Mond (Entfernung 50 000 Meilen), die Sonne (Entfernung 20 Mill. Meilen) und die zahllosen übrigen Fixsterne (die Tausende von Lichtjahren weit entfernt sind), alle gleichzeitig sich täglich um die Erde, beziehungsweise um eine ge-

meinschaftliche Weltachse drehten; für letztere Annahme besteht kein physikalischer Grund; 2) Newton's Fallversuche von hohen Thürmen oder in tiefen Schachten, die eine östliche Abweichung des fallenden Körpers von der verticalen Richtung nachweisen (die gleichzeitig beobachtete geringe südliche Abweichung ist noch nicht unzweifelhaft erklärt); 3) der Foucault'sche Pendelversuch (1851), der zeigt, dass unter einem längere Zeit schwingenden Pendel der Erdboden sich dreht, und zwar proportional dem Sinus der geogr. Breite und der Zeit; 4) die Ablenkung der Südwinde gegen Osten und der Nordwinde gegen Westen hin; 5) die Fliehkraft, infolge deren die Schwerkraft gegen den Äquator hin vermindert und die Erde an den Polen abgeplattet wird.

Die Abplattung der Erde lässt sich mittelst des Energieprincipes in folgender Weise berechnen: Die Kugelfläche ist eine Niveaufläche der Schwerkraft, und die Erde müsste die Form derselben annehmen und behalten, wenn sie in Ruhe wäre. Infolge der Achsendrehung wird aber eine Fliehkraft entwickelt, die sich mit der Schwerkraft zusammensetzen lässt; die Resultierende muss dann zur Oberfläche normal gerichtet sein, wenn ein dauernder Zustand bestehen soll, d. h. die Erde muss wieder eine Niveaufläche sein. Bei der Bewegung eines Körpers auf einer solchen Fläche wird keine Arbeit geleistet; dieser Umstand gestattet, die Grösse der Abplattung zu ermitteln.

Für eine Masse m an irgend einem Orte der Erdoberfläche ist die Energie

$$W = w - \frac{Mm}{R} + \frac{1}{2} mv^2,$$

w schliesst die potentielle Energie der Schwerkraft, wenn m unendlich weit von der Erde entfernt ist, und die kinetische Energie der Erdrotation in sich; Mm/R ist das Potential in Bezug auf m an der Erdoberfläche und v die Rotationsgeschwindigkeit von m bei der Drehung um die Erdachse. Bei einer Verschiebung von m etwa längs eines Meridians ist die Energieänderung

$$dW = dw + \frac{Mm}{R^2} dR + mv \cdot dv = 0\,.$$

Bei einer gedachten Bewegung von m gegen den Pol leistet die Schwerkraft die Arbeit $Mm \cdot dR/R^2$; wäre die Erde vollkommen kugelförmig, dann wäre $dR = 0$ und damit auch die Arbeit der Schwerkraft gleich Null.

In diesem Falle würde nur eine Änderung der lebendigen Kraft von m infolge der Erdrotation eintreten. Ein Massentheilchen, z. B. ein Wassertropfen in irgend einem Punkte eines Meridians, würde die Drehung in dem betreffenden Parallelkreise vollführen; es müsste

sich aber auch infolge der Fliehkraft längs des Meridianes gegen den Äquator hin beschleunigt bewegen. Das Verhalten des Massentheilchens lässt sich mittelst einer kleinen Kugel, die an einem rotierenden Reif verschiebbar ist, leicht versinnlichen. Das Theilchen m macht demnach zwei Bewegungen, die von der Rotation der Erde, beziehungsweise von der Drehung des Centrifugalapparates herrühren.

Die Zunahmen der lebendigen Kräfte beider Bewegungen sind einander gleich; denn ist bei einer kleinen Breitenverschiebung $R \cdot d\alpha$ die Änderung der lebendigen Kraft der Drehbewegung $m \cdot v' \cdot dv'$, so ist die längs des Meridians entwickelte Kraft

$$m \cdot v' \cdot dv'/R \cdot d\alpha = m \cdot dv''/dt;$$

daraus folgt die behauptete Beziehung $m \cdot v' \cdot dv' = m \cdot v'' \cdot dv''$. Hierbei sind v' und v'' die Geschwindigkeiten beziehungsweise der Länge und der Breite nach.

Bei der Bewegung eines Massentheilchens vom Pole zum Äquator wird daher auch in der Richtung des Meridians eine lebendige Kraft entwickelt, welche jener der Rotation an Grösse gleichkommt.

Soll nun aber die Erde eine Niveaufläche sein, so muss diese kinetische Energie verschwinden. Sie wird thatsächlich durch die Schwerkraft vernichtet; denn da die Erde an den Polen abgeplattet ist, so findet während der angegebenen Bewegung längs des Meridians eine Hebung des Gewichtes von m und daher auch ein Verbrauch von lebendiger Kraft statt. Aus der Äquivalenz zwischen Arbeit und Energie entsteht nun die Gleichung

$$M \cdot m \left(\frac{1}{R_p} - \frac{1}{R}\right) = \frac{1}{2} m v^2.$$

R_p und R sind resp. die Erdradien für den Pol und den Äquator. Durch Einführung der Beschleunigung $A = M/R_p^2 = 9{\cdot}832$ m, $R = 6\,378\,000$ m, der Umdrehungszeit der Erde $t = 86\,400$ Sec. und $v = 2R\pi/t$ geht die Gleichung über in

$$\frac{R - R_p}{R} \cdot A \cdot R_p = \frac{2R^2 \cdot \pi^2}{t^2}$$

oder in

$$\left(\frac{R_p}{R}\right)^2 - \left(\frac{R_p}{R}\right) + \frac{2R\pi^2}{A \cdot t^2} = 0.$$

Hieraus erhält man für R_p/R die beiden Werte 0·00172 und 0·99828 und für die Erdabplattung $(1 - R_p/R) = (R - R_p)/R$ dieselben Werte in umgekehrter Folge. Von beiden Werten kommt der kleinere $= 1/581$ der Erdabplattung $= 1/300$ nahe. Diese wurde durch Gradmessungen, ferner durch Bestimmung der Gewichtsänderungen mittelst des Pendels und durch die Störungsgrössen der Mondbewegung ermittelt. Der Unterschied zwischen dem hier gewonnenen und in der

Natur gemessenen Werte rührt davon her, dass infolge der ungleichen Dichtigkeit der Erdmasse der Erdmittelpunkt nicht zugleich Convergenzpunkt der Schwerkraft ist, und dass die festen Theile der Erde den Bedingungen der Niveaufläche sich nicht vollständig fügen und auch die flüssigen Theile beeinflussen[1]).

Die Änderung der Schwerkraftintensität infolge der Achsendrehung der Erde ergibt sich leicht unter Vernachlässigung der Abplattung. Wenn eine Masse m längs einer lothrechten Strecke dR gehoben wird, so wird die Arbeit $(Mm/R^2)dR$ verbraucht und zufolge Änderung der Umdrehungsgeschwindigkeit die lebendige Kraft $mv \cdot dv$ gewonnen; die Energieänderung ist demnach

$$dW = \frac{M \cdot m}{R^2} \cdot dR - mv \cdot dv$$

und die bewegende Kraft

$$\frac{dW}{dR} = \frac{M \cdot m}{R^2} - m \cdot v \frac{dv}{dR}.$$

Ist die geogr. Breite des Beobachtungsortes φ und die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ω, so ist die Rotationsgeschwindigkeit $v = r \cdot \omega = \omega \cdot R \cdot \cos\varphi$ und die Kraft

$$\frac{dW}{dR} = \frac{M \cdot m}{R^2} - \frac{m \cdot v^2}{R \cdot \cos\varphi} \cdot \cos\varphi.$$

Der Einfluss der Erdrotation macht sich demnach als eine Kraft geltend, welche die Schwere vermindert; nach der gewöhnlichen Anschauungsweise ist es die verticale Componente der Fliehkraft $mv^2/R \cdot \cos\varphi$ der Drehbewegung, die in die Erscheinung tritt.

Die Beschleunigung in der Richtung von R an einem Orte mit der geogr. Breite φ lässt sich nun nach der vorstehenden Gleichung in der Form darstellen:

$$A_\varphi = A_{90} - R \cdot \omega^2 \cdot \cos^2\varphi$$

oder

$$A_\varphi = A_0 + R\omega^2 \cdot \sin^2\varphi = A_0 \left(1 + \frac{1}{289} \sin^2\varphi\right).$$

Der angeführte specielle Wert 1/289 folgt aus den obigen Angaben für den Erdhalbmesser und die Umdrehungszeit und aus $A_0 = 9{\cdot}781$ m.

Durch die Fliehkraft erfährt auch die Richtung der Schwere eine Ablenkung und zwar um den Winkel α gegen den Äquator hin. Um die bezügliche Richtung, welche etwa ein Bleiloth annehmen würde, zu erhalten, haben wir die Richtung der Resultierenden zwischen Schwerkraft und Fliehkraft oder direct die Richtung des grössten Energiegefälles zu ermitteln. Ein Element des resultierenden Weges sei ds; dann ist die Energieänderung längs ds

1) Siehe Thomson u. Tait: Theoret. Phys. § 806 ff. Deutsch v. Helmholtz

$$dW = \left(\frac{M \cdot m}{R^2} \cdot \frac{dR}{ds} - m \cdot v \cdot \frac{dv}{ds}\right) ds$$

und wenn $m = 1$

$$= \left(A \cdot \frac{dR}{ds} - \frac{v^2}{r} \cdot \frac{dr}{ds}\right) ds \qquad r = \text{Parallelkreisradius}$$

$$= [A \cos \alpha - f \cdot \cos(\alpha + \varphi)] ds;$$

f ist die Fliehkraftbeschleunigung. Der Wert in der eckigen Klammer bestimmt die resultierende Kraft, deren Richtung aus der Bedingung für das Maximum bei veränderlichem α folgt. Aus $dW/d\alpha = 0$ erhält man die Bedingungsgleichung

$$A \cdot \sin \alpha = f \cdot \sin(\alpha + \varphi) \quad \text{oder} \quad A : f = \sin(\alpha + \varphi) : \sin \alpha.$$

Dies ist der Sinussatz für das aus der Schwerkraft, der Fliehkraft und der Resultierenden gebildete Kräftedreieck.

Die Construction des Kräftenparallelogrammes aus A und f führt zu den gleichen Resultaten.

Aufg. 1. In welcher Zeit müsste die Erde ihre Achsendrehung ausführen, wenn die Schwerkraft am Äquator durch die Fliehkraft aufgehoben werden sollte? Der Äquatorhalbmesser sei 6370 km, die volle Beschleunigung der Schwere $A_{90} = 9{\cdot}8145$ m. — ($1^h\,24^m\,22^s$.) **2.** Wie stark wird die Anziehungskraft der Erde durch die Fliehkraft am Äquator vermindert? — (34 mm.) **3.** Wie viel beträgt die Verminderung der Schwerkraft durch die Achsendrehung der Erde unter der geogr. Breite von 53^0? — ($34 \cos^2 53^0$ mm.) **4.** In welcher Entfernung von der Erde wird ihre Schwerkraft durch die Fliehkraft aufgehoben? Kann die Atmosphäre über diese Höhe hinausreichen? — ($5{\cdot}629\,R = 35\,860$ km.) **5.** Eine Meridiantangente beschreibt bei der Achsendrehung der Erde einen Kegel, dessen Achse mit der Erdachse zusammenfällt; wie gross ist der Drehungswinkel der Tangente, der einem Flächenelemente des Kegelmantels entspricht, wenn der Erdradius R, die geogr. Breite φ und der kleine Drehungswinkel der Erde $= \sigma$ ist? — ($\sigma \cdot \sin \varphi$.) Wie gross ist die Summe jener Winkel nach s Stunden? — Erklärung des Foucault'schen Pendelversuches, der Ablenkung der Winde und der Meeresströme. [Aufg. 1 ist v. Budde, 2—4 von Müller-Erzbach.]

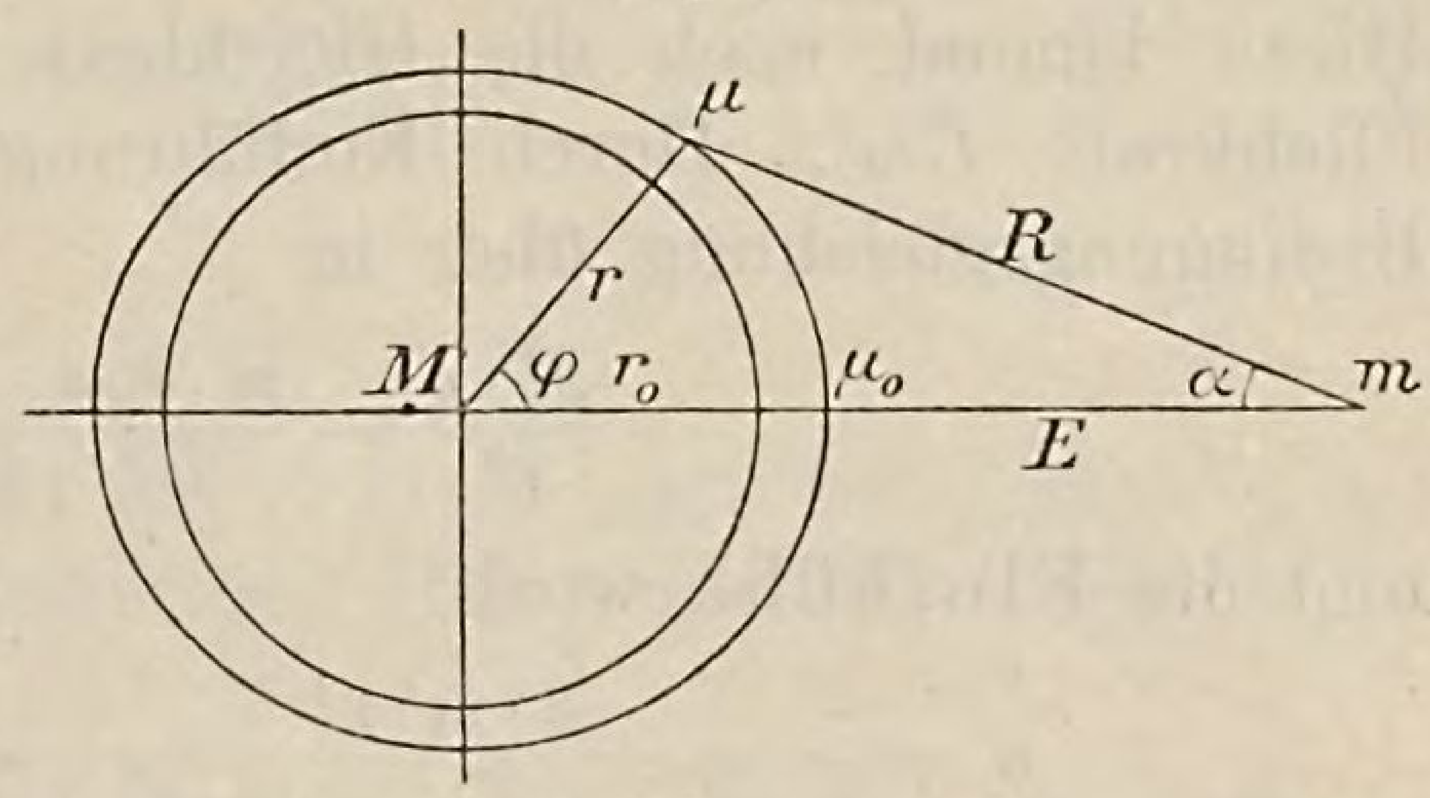
§ 22. **Ebbe und Flut.** (Newton.) Die Kugelgestalt der Erde erfährt ausser durch die Abplattung an den Polen infolge der Achsendrehung auch durch die Gravitation benachbarter Himmelskörper eine Veränderung. Die betreffende Erscheinung ist unter den Namen Ebbe und Flut bekannt. Sie macht sich besonders am Meere geltend, weil die Wassertheilchen den wirkenden Kräften leicht folgen können. Insofern dieses bei den festen Theilen der Erde nicht der Fall ist, kommt hier die Erscheinung auch nicht zur Geltung, ja sie erfährt dadurch auch am Meere eine Veränderung.

Im Folgenden soll die Fluthöhe unter der Voraussetzung ermittelt werden, dass die Massentheilchen an der Erdoberfläche den wirksamen Kräften zu folgen imstande seien.

Die ganze Erscheinung ist das Ergebnis von drei Kraftwirkungen. Ausser der Anziehung des Mondes oder der Sonne wirken noch die Schwerkraft und die Fliehkraft. Im Gleichgewichtszustande muss die Erdoberfläche eine Niveaufläche sein, d. h. die Verschiebung eines Massentheilchens auf der Erdoberfläche muss ohne Arbeitsleistung möglich sein. Diese Bedingung führt leicht zu einem Werte für die Fluthöhe[1]).

In nebenstehender Figur 12 sei die im Mittelpunkte vereint zu denkende Erdmasse M, die Masse des Himmelskörpers (Mond- oder Sonnenmasse) m, ferner E die Entfernung der beiden Körpermittelpunkte, μ ein Massentheilchen auf der Erdoberfläche, r und R dessen Abstände beziehungsweise von den beiden Massenmittelpunkten. Auf das Massentheilchen wirken: die Schwerkraft $M \cdot \mu / r^2$, die Kraft des Himmelskörpers (Centralkraft) $m \cdot \mu / R^2$ und ausserdem besitzt das Theilchen infolge der Centralbewegung der Erde um den Himmelskörper eine Geschwindigkeit $v = R \cdot \omega$, wenn μ in der Bahnebene von M liegt und ω die Winkelgeschwindigkeit der betreffenden Bewegung ist, die angenommen werden muss, um der Centralkraft das Gleichgewicht zu halten.

Fig. 12.



Befindet sich der Himmelskörper m in der Ebene des Erdäquators, so ist auch μ ein Punkt im Äquator. Wäre μ ein Punkt des durch m gehenden Meridians, der normal ist zur Bahnebene von M, dann wäre

$$v = R \cdot \omega \cdot \cos \alpha .$$

Für den ersten Fall lässt sich die Gravitationsenergie von μ in der Form darstellen

$$W = W_0 - \frac{M \cdot \mu}{r} - \frac{m \cdot \mu}{R} + \frac{1}{2} \mu \cdot R^2 \cdot \omega^2 .$$

Die Änderung dieses Wertes bei der Bewegung des Massentheilchens μ längs eines Äquatorquadranten von m hinweg setzt sich zusammen aus der positiven Arbeit der Schwerkraft, der negativen Arbeit der Gravitation des Himmelskörpers und aus dem Zuwachs an lebendiger Kraft von μ zufolge der Drehung um m. Wegen der Erhaltung der

1) Vgl. meine Schrift über das Energieprincip in der Dynamik (1884) und die Abhdlg. über die Berechn. d. Fluthöhe in Poske's Zeitsch. 1889. S. 292.

Energie muss die Änderung gleich Null sein, daher besteht mit Rücksicht auf die Werte von R und r die Bedingungsgleichung

$$-M\cdot\mu\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)-m\cdot\mu\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{2}\mu\omega^2(R_0^2-R^2)=0\,.$$

Hierin ist $r_0 - r = \sigma$ die Erhebung der Erdoberfläche oder die Fluthöhe. Ferner setzen wir folgende sehr nahe richtigen Werte ein:

$$\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}=\frac{-\sigma}{r^2}\,,$$

$$\frac{1}{R_0}=\frac{1}{E-r_0}=\frac{1}{E}\left(1+\frac{r_0}{E}+\frac{r_0^{\,2}}{E^2}\right),$$

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\sqrt{E^2+r^2}}=\frac{1}{E}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{E^2}\right),$$

$$R_0^2-R^2=(E-r_0)^2-(E^2+r^2)=-2Er_0+2r\sigma\,.$$

Hiezu kommt noch die Gleichheit der Centralkraft m/E^2 mit der Fliehkraft $E\omega^2$. Durch Einführung dieser Werte geht die obige Bedingungsgleichung über in

$$\frac{M\cdot\sigma}{r^2}-\frac{m\cdot r\cdot\sigma}{E^3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{m\cdot r^2}{E^3}$$

und die Fluthöhe wird

$$\sigma=\frac{3\cdot m\cdot r^4}{2\cdot M\cdot E^3\left[1-\dfrac{m\cdot r^3}{M\cdot E^3}\right]}=\frac{3\cdot m\cdot r^4}{2\cdot M\cdot E^3\left[1-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sigma_1}{r}\right]}\,.$$

An der dem Himmelskörper zunächst liegenden Stelle wird die Erdoberfläche um die Höhe σ gegenüber dem um 90^0 entfernten Orte gehoben. Diese Fluthöhe ist der Masse des störenden Himmelskörpers direct und der dritten Potenz der Entfernung desselben umgekehrt proportional.

Das zweite Glied in der Klammer des Nenners rührt her von der Verschiedenheit der Geschwindigkeiten, beziehungsweise der Fliehkräfte an den verschiedenen Orten der Erdoberfläche. Bezeichnet man die Fluthöhe ohne Rücksicht auf diese Verschiedenheit mit σ_1, so lässt sich jenes Glied in der Form $2\sigma_1/3r$ darstellen, die sofort auf dessen sehr geringen Wert schliessen lässt, da die Fluthöhe σ_1 gegenüber dem Erdhalbmesser, wie bald berechnet werden soll, sehr klein ist.

Führt man in der Gleichgewichtsbedingung die für den entferntesten Punkt der Erdoberfläche vom Himmelskörper giltigen Grenzwerte ein, so erhält man denselben Ausdruck für die Fluthöhe; nur das eben erläuterte Glied, das von der Verschiedenheit der Fliehkräfte bei der Centralbewegung herrührt, erscheint mit entgegengesetztem Zeichen; dies ändert aber nur unwesentlich die angegebene Fluthöhe σ.

Die speciellen Werte mit Bezug auf den **Mond** sind

$$m/M = 1/81{\cdot}5, \quad r/E = 1/60 \quad \text{und} \quad r = 6\,377\,400 \text{ m}.$$

Darnach ist die Mondflut 0·54 m. Für die Sonne erhält man aus $m/M = 340\,000$, $E/r = 23\,300$ die Fluthöhe $= 0{\cdot}26$ m.

Die Änderung infolge der verschiedenen Geschwindigkeiten der Massentheilchen bei der Drehung der Erde um den Himmelskörper beträgt bei der Mondflut 0·056 Milliontel und bei der Sonnenflut 0·027 Milliontel der angegebenen Fluthöhen[1]).

Bedeutender macht sich der Einfluss der Bewegungsverschiedenheit geltend, wenn man die Fluthöhe längs eines Meridianquadranten berechnet. Bei der Verschiebung eines Massentheilchens vom Äquator zum Pol nimmt die lebendige Kraft um $\frac{1}{2}[E^2 - (E - r_0)^2]\,\omega^2$ zu. Durch Einführung dieses Betrages in die Gleichgewichtsbedingung folgt

$$\frac{M \cdot \sigma}{r^2} = 2 \cdot \frac{m \cdot r^2}{E^3}$$

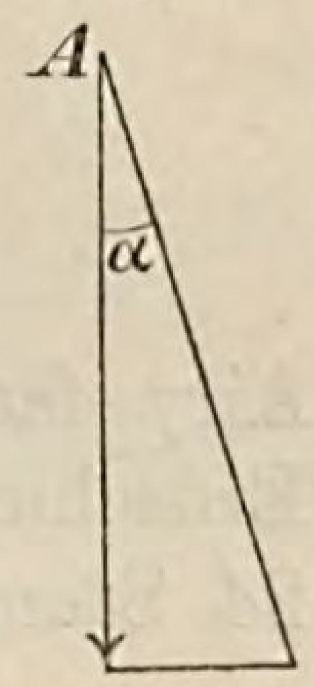
und

$$\sigma = \frac{2 \cdot m \cdot r^4}{M \cdot E^3}.$$

Darnach stellt sich die Mondflut auf 0·72 m und die Sonnenflut auf 0·35 m am Äquator gegenüber der Höhe der Niveaufläche an den Polen.

§ 23. **Dichte der Erde. Lebendige Kraft der Erde.** Eine ältere Methode zur Bestimmung der Dichte der Erde rührt von Bouguer und La Condamine her; sie machten darauf aufmerksam, dass die Richtung des Lothes durch die Nähe eines Berges geändert werde. Maskelyne (1775 und 1778) benützte dann den Berg Shehallien in Schottland, der sich sowohl wegen seiner isolierten Lage, als auch wegen seiner Form und Zusammensetzung besonders gut eignet, zu genauen Messungen und leitete die Dichte der Erde näherungsweise ab. Er fand auf der südlichen und auf der nördlichen Seite des Berges durch Vergleich der gemessenen Polhöhen mit den geographischen Breiten eine Abweichung des Lothes von der Verticalrichtung um 5·83″. Die Richtung des Lothes ist die Richtung der Resultierenden zwischen der Schwerkraft und der Anziehungskraft des Berges, daher ist (Fig. 13)

Fig. 13.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k \cdot m}{r^2} : \frac{k \cdot M}{R^2},$$

wenn m die Masse des Berges, r die Entfernung der Pendelmasse vom Bergmittelpunkte, M die Erdmasse und R den Erdhalbmesser bedeuten.

1) Vgl. hierzu M. Koppe's Abhdlg. in der Zeitsch. für den phys. u. chem. Unterr. Berlin. II. S. 199. (1889.)

Setzt man für die Massen Volumen und Dichten, nämlich

$$m = V \cdot d \quad \text{und} \quad M = \frac{4}{3} R^3 \cdot \pi \cdot D,$$

so erhält man für die Dichte der Erde

$$D = \frac{3\,V}{4\pi r^2 R \cdot \operatorname{tg} \alpha} \cdot d.$$

Maskelyne fand ungefähr $D = 5$.

Airy bestimmte (1856) die mittlere Dichte der Erde durch die Schwingungen eines Pendels an der Erdoberfläche und auf dem Boden eines tiefen Schachtes. Die Pendelschwingungen gestatten die Beschleunigung der Schwere zu ermitteln. Diese ist am Boden des Schachtes nur von dem inneren Erdkern abhängig, dessen Dichte D und dessen Radius r sei; an der Erdoberfläche ist sie abhängig von der ganzen Erde einschliesslich der oberen hohlkugelförmigen Schichte, deren Dicke h gleich der Tiefe des Schachtes, und deren Dichte d sei. Nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze erhält man für die Beschleunigung am Grunde des Schachtes

$$a' = \frac{\varkappa \cdot 4\pi \cdot r^3 \cdot D}{3 \cdot r^2} = \varkappa \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r \cdot D,$$

und die Beschleunigung an der Erdoberfläche ist

$$\begin{aligned} a &= \varkappa \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{r^3 \cdot D + [(r+h)^3 - r^3]\,d}{(r+h)^2}, \\ &= \varkappa \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \left[\frac{(D-d)r}{\left(1+\frac{h}{r}\right)^2} + (r+h)\,d\right], \\ &\doteq \varkappa \cdot \frac{4}{3}\pi\,[D(r-2h) + 3hd]. \end{aligned}$$

Im letzten Werte wurden die höheren Potenzen von h/r vernachlässigt. Aus beiden Beschleunigungen folgt nun das Verhältnis der Dichten[1]):

$$\frac{D}{d} = \frac{1}{\frac{2}{3} - \left(1 - \frac{a}{a'}\right)\frac{r}{3h}}.$$

Airy fand als mittlere Dichte der den Beobachtungsort umgebenden Erdschichte $d = 2{\cdot}75$. Das Pendel einer Uhr war im Schachte in 24 Stunden um $2^1/_4$ Secunden vorausgeeilt. Es war also

$$a/a' = 86\,400^2/86\,402{\cdot}25^2,$$

ferner $r/h = 16\,600$. Darnach wird $D = 6{\cdot}57$.

Die Dichte des inneren Erdkernes 6·57 ist also bedeutend grösser als die Dichte 2·75 der Erdrinde.

1) Violle, Lehrb. d. Ph. Deutsche Ausgabe. I. S. 278.

Sehr genaue Messungen wurden noch von Cavendish (1797) mittelst der horizontalen Drehwage, welche unter die Einwirkung sehr grosser Massen gestellt wurde, ferner mittelst der Präcisionsdoppelwage von Jolly (1877) und mittelst der verticalen Drehwage von Wilsing (1887) ausgeführt[1]). Nach den genauesten Methoden wurde die Dichte der Erde übereinstimmend zu 5·6 gefunden.

Mit Hilfe der Grösse und der Dichte der Erde lässt sich das Gewicht derselben bestimmen. Wird der Erdhalbmesser zu 6370 km gerechnet, so ist der Inhalt der Erde $1\,082\,647 \cdot 10^{18}$ dm³, und die mittlere Dichte 5·6 ergibt das Gewicht von rund 6 Quadrillionen kg.

Die lebendige Kraft der Bewegung der Erde um die Sonne ist darnach bei einer Geschwindigkeit von 30·42 km/sec.

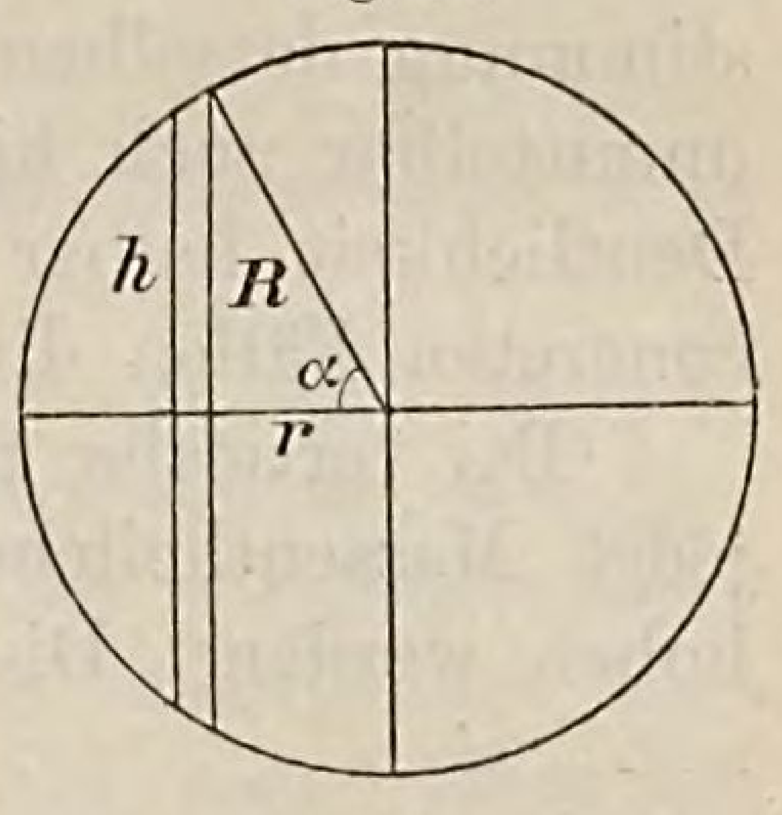
$$\frac{1}{2} \cdot 0{\cdot}6 \cdot 30420^2 \cdot 10^{24} = 277{\cdot}6 \cdot 10^{30} \text{ kgm}.$$

Die lebendige Kraft der Erdrotation kann in folgender Weise ermittelt werden: Alle Punkte in der Entfernung r von der Erdachse, die auf dem Cylindermantel $2r\pi \cdot h$ liegen, haben dieselbe Geschwindigkeit $r \cdot \omega$, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Ist die Gesammtheit der betreffenden Massentheilchen $= dm$, so ist die lebendige Kraft der rotierenden Erde

$$W = \int \frac{1}{2}\, r^2 \omega^2 \cdot dm = \frac{1}{2}\, \omega^2 \cdot \int r^2 \cdot dm.$$

Hierin heisst der Ausdruck $\int r^2 \cdot dm$ das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehungsachse. Setzt man dafür den Wert T, so erkennt man aus der Form der lebendigen Kraft $\frac{1}{2}\, T \cdot \omega^2$ alsbald die physikalische Bedeutung des Trägheitsmomentes als eine Masse, die in der Entfernung Eins von der Drehungsachse angebracht werden müsste, um dieselbe lebendige Kraft zu entwickeln, wie die Masse des rotierenden Körpers.

Fig. 14.



Es ist nun das Trägheitsmoment der Erdkugel zu berechnen. Zu diesem Zwecke bestimmen wir dm. Der Cylinder von der Wanddicke dr hat den Rauminhalt $2r\pi \cdot h \cdot dr$ und bei der Dichte D die Masse $dm = 2r\pi \cdot h \cdot D \cdot dr$. Nach Figur 14 ist

$$r = R \cdot \cos\alpha \quad \text{und} \quad h = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha.$$

Demnach wird die gesuchte Energie[2])

1) Reis, Lehrb. d. Ph. S. 760.

2) Die zur Berechnung erforderliche Summierung lässt sich nach folgender Form auch leicht elementar ausführen:

$$W = \frac{1}{2}\,\omega^2 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 4\pi \cdot D \cdot R^5 \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^3\varphi \cdot d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\,\omega^2 \cdot 4\pi \cdot D \cdot R^5 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\,(1 - \sin^2\varphi) \cdot d\sin\varphi$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{4}{3}\,\pi \cdot R^3 \cdot D\right) \cdot R^2 \cdot \omega^2$$

$$= \frac{1}{5} \cdot M \cdot R^2 \cdot \omega^2.$$

Wenn nun die Geschwindigkeit $R \cdot \omega = 40 \cdot 10^6/86\,400 = 463$ m ist, so ergibt sich für $W = 26 \cdot 10^{27}$ kgm.

§ 24. **Schwerpunkt.** (Archimedes, 220 v. Chr.) Bei der bisherigen Betrachtung der Erscheinungen, welche durch die Schwerkraft hervorgerufen werden, beim Fall nach abwärts, beim einfachen Pendel, beim Wurf u. a. wurden die Körper als materielle Punkte angenommen. Es muss jedoch auch hier ebenso wie bei den Himmelserscheinungen beachtet werden, dass alle Theilchen eines ausgedehnten Körpers der Wirkung der betreffenden Kraft unterworfen sind; es muss gezeigt werden, dass ein ausgezeichneter Punkt im Körper vorhanden ist, in dem man sich die ganze Masse des Körpers vereint denken kann, und dessen Verhalten für das Verhalten des ganzen Körpers massgebend ist. Dieser Punkt ist der Massenmittelpunkt; in Bezug auf die Schwerkraft heisst er Schwerpunkt. Zur näheren Bestimmung desselben können die allgemeinen Betrachtungen des § 17 unmittelbar auch hier geltend gemacht werden. Der Wichtigkeit und Deutlichkeit halber soll seine Lage und seine Bedeutung in einigen concreten Fällen direct aus dem Arbeitsgesetze ermittelt werden.

Bei verticaler Hebung eines schweren Körpers muss das Gewicht jedes Massentheilchens $(m \cdot a)$ etwa um die gleiche Strecke dz gehoben werden. Die Arbeit der Hebung ist somit

$$\int x^2 dx = \sum \frac{1}{3}\left(x_n^2 + x_n \cdot x_{n+1} + x_{n-1}^2\right)\left(x_n - x_{n-1}\right)$$
$$= \frac{1}{3} \sum \left(x_n^3 - x_{n-1}^3\right) = \frac{1}{3}\left(x_n^3 - x_0^3\right)$$

und

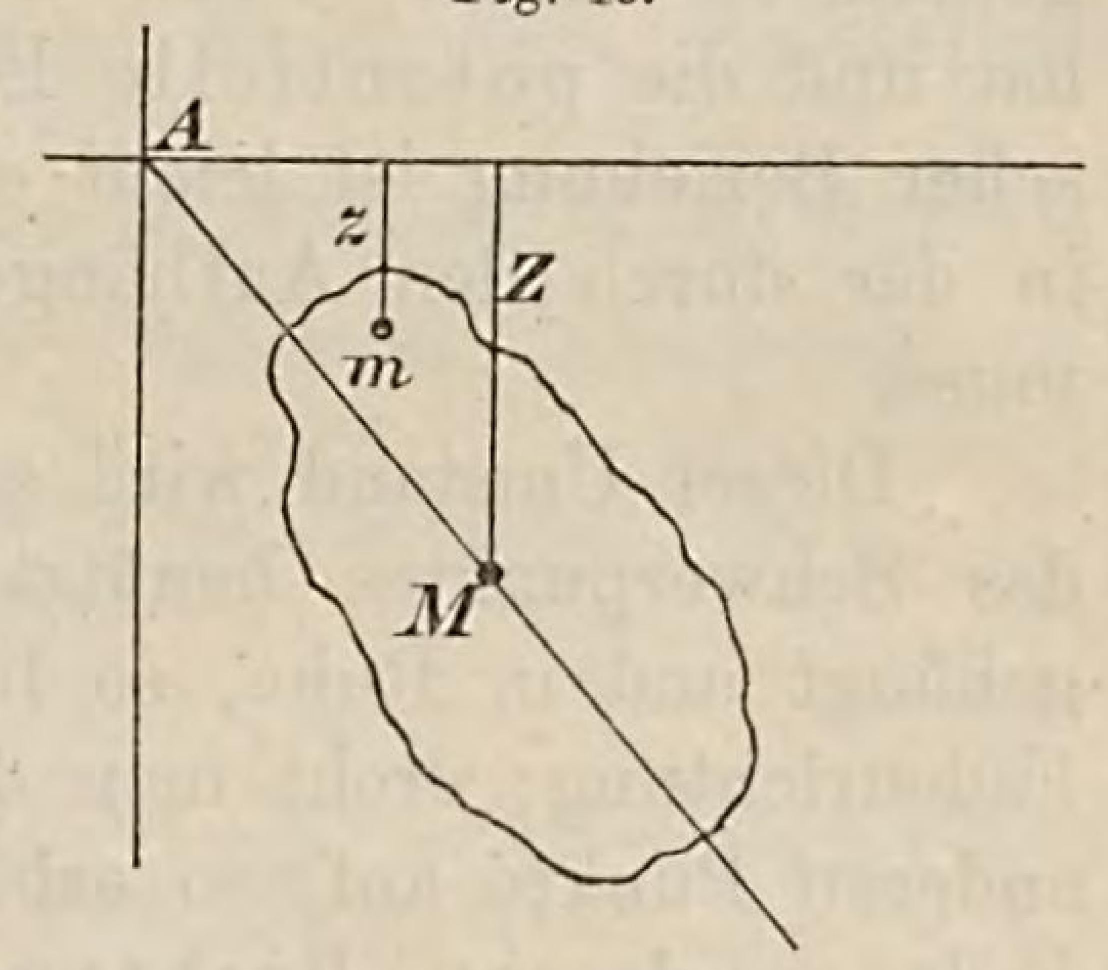
$$\int x^4 \cdot dx = \sum \frac{1}{5}\left(x_n^4 + x_n^3 \cdot x_{n-1} + x_n^2 \cdot x_{n-1}^2 + x_n \cdot x_{n-1}^3 + x_{n-1}^4\right)\left(x_n - x_{n-1}\right)$$
$$= \frac{1}{5} \sum \left(x_n^5 - x_{n-1}^5\right) = \frac{1}{5}\left(x_n^5 - x_0^5\right).$$

$$\begin{aligned} dW &= \Sigma m \cdot a \cdot dz \\ &= dz \cdot \Sigma m \cdot a \\ &= dz \cdot M \cdot a. \end{aligned}$$

Dem letzten Ausdrucke gemäss kann man statt der Summen der Gewichte der einzelnen Körpertheilchen ein einziges, resultierendes Gewicht setzen und dieses in einem Punkte angreifend denken. Der Angriffspunkt der resultierenden Schwerkraft ist der Schwerpunkt.

Seine Lage im Körper lässt sich leicht durch Betrachtung einer Drehung um eine Achse genau bestimmen. Zu diesem Zwecke sei A (Fig. 15) eine Drehungsachse, m irgend ein Massentheilchen eines Körpers und z dessen Abstand von einer durch A gehenden horizontalen Ebene. Bei einer beliebig grossen Drehung von einer Anfangslage aus wird die Arbeit geleistet

Fig. 15.



$$\varDelta W = \Sigma m \cdot a (z_0 - z).$$

Soll das im Schwerpunkte wirkende resultierende Gewicht dieselbe Arbeit leisten, so gilt auch für dieses derselbe Wert

$$\varDelta W = M \cdot a \cdot (Z_0 - Z).$$

Die Bedingung wird in jeder Lage des Körpers erfüllt, wenn zwischen den Massen M, m und den normalen Abständen Z, z stets die Beziehungsgleichung besteht

$$M \cdot Z = \Sigma m \cdot z.$$

Dieselbe Beziehung wurde auch für die Lage des Massenmittelpunktes im § 17 gewonnen.

Man nennt das Product aus der Kraft $m \cdot a$ in den Normalabstand z des Angriffspunktes von einer bestimmten Ebene das statische Moment der Kraft in Bezug auf die Ebene. Darnach lässt sich die gewonnene Gleichung in folgenden Worten ausdrücken: Das statische Moment der Resultierenden in Bezug auf eine Ebene ist gleich der Summe der statischen Momente der parallelen Componenten in Bezug auf dieselbe Ebene.

Der Satz gilt für jede beliebige Körperlage in Bezug auf eine beliebige horizontale Ebene; er lässt sich daher bei einer bestimmten Körperlage auch auf drei Coordinatenebenen beziehen, und kann dazu dienen, die Schwerpunktslage rechnungsmässig zu bestimmen, wenn die Massenvertheilung des Körpers gegeben ist.

Von praktischer Wichtigkeit ist die Ruhelage eines Körpers, der in einem Punkte oder in einer Achse aufgehängt ist. Entscheidend

für dieselbe ist der Ort des Schwerpunktes. Diesbezüglich folgt aus den vorstehenden Gleichungen für eine kleine Drehung des Körpers die Arbeit

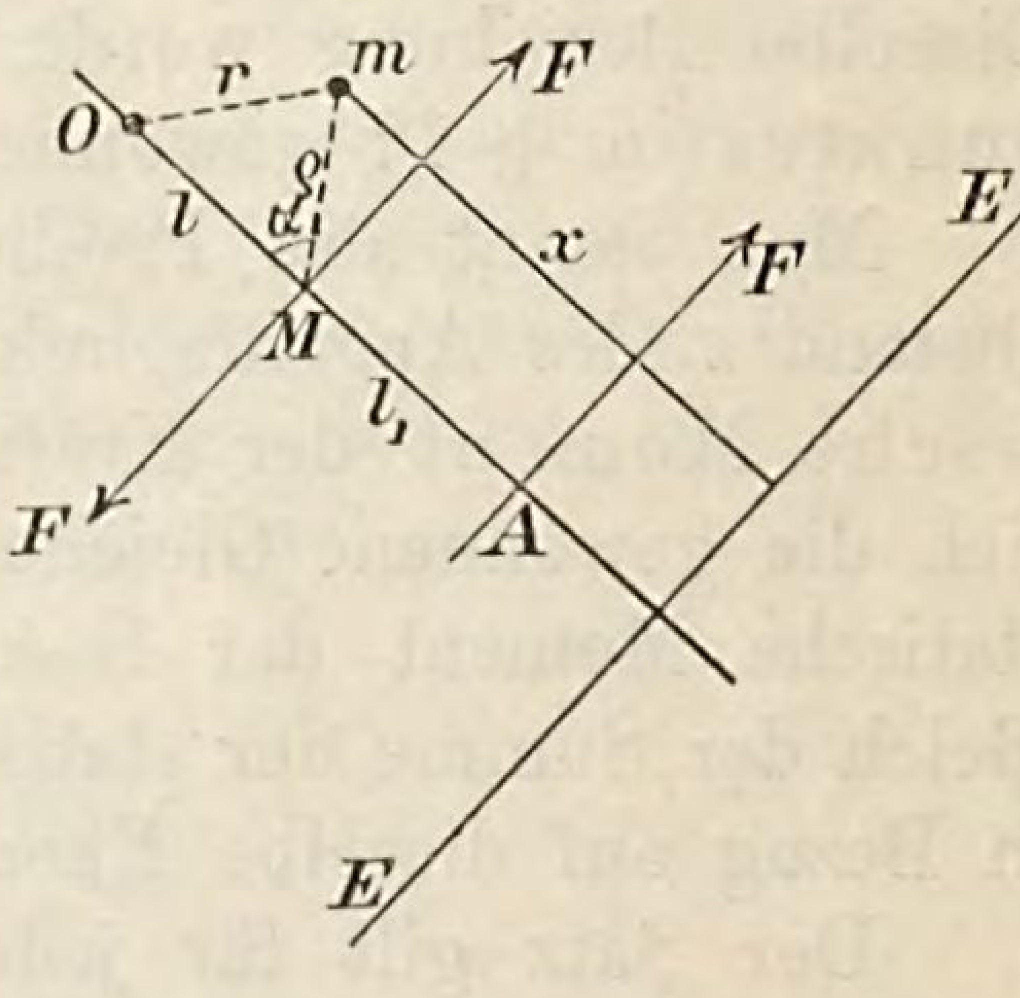
$$M \cdot a \cdot dZ = a \cdot \Sigma m \cdot dz.$$

Bei der Abwärtsbewegung wird diese Arbeit in lebendige Kraft verwandelt. Im Ruhezustande muss sie gleich Null sein. Die letztere Bedingung wird erfüllt, wenn $dZ = 0$ ist, d. h. wenn die Verschiebung des Schwerpunktes horizontal erfolgt, oder bei einem aufgehängten Körper, wenn der Schwerpunkt seine tiefste Lage inne hat und die potentielle Energie ein Minimum ist. In geometrischer Beziehung ist leicht ersichtlich, dass diesfalls der Schwerpunkt in der durch den Aufhängepunkt A gezogenen Verticallinie liegen muss.

Dieser Umstand wird zur praktischen Ermittelung der Lage des Schwerpunktes benützt: Ist ein Körper an einem Faden aufgehängt und in Ruhe, so liegt der Schwerpunkt in der verlängerten Fadenrichtung; dreht man den Körper etwas und hängt ihn in einem anderen Punkte auf, so erhält man durch den den Körper tragenden Faden noch eine Richtungslinie der Schwerkraft; im Schnitte beider Richtungen befindet sich der Schwerpunkt.

Eine ähnliche Betrachtung lässt sich anstellen an einem in einem Punkte (oder in einer Geraden) unterstützten Körper. Auch in diesem Falle befindet sich der Körper in Ruhe, wenn der Schwerpunkt in der Verticallinie liegt, die sich durch den Unterstützungspunkt ziehen lässt. Der Schwerpunkt hat alsdann seine höchste Lage erreicht und die potentielle Energie des Körpers ist ein Maximum.

Fig. 16.



Um noch für einen geworfenen Körper die Bedeutung des Massenmittelpunktes darzustellen, betrachten wir einen Körper, der durch eine Stosskraft, deren Richtung nicht durch den Massenmittelpunkt geht, in Bewegung versetzt wird[1]).

Eine Kraft F (Fig. 16) mit dem Angriffspunkt A wirke durch sehr kurze Zeit τ auf einen Körper, dessen Massenmittelpunkt M sei. Die Kraft regt zunächst die getroffenen Massentheilchen zur Bewegung an, und diese Bewegung wird nur von Theilchen zu Theilchen dem übrigen Körper mitgetheilt. Die Wirkung während eines Zeitmomentes wird zunächst

1) Vgl. meine Schrift über d. Eng.-Princip i. d. Dyn. S. 50 (1884) und dasselbe in Dressel's Lehrb. d. Phys. S. 113 (1895).

eine Drehung um eine Achse O sein. Hierbei verrichtet die Kraft F eine Arbeit, welche der entwickelten Energie des Körpers äquivalent ist. Wenn $AO = l + l_1$ der Abstand der Kraftrichtung F von der noch zu bestimmenden Momentanachse und ω die in der Zeit τ erzeugte Winkelgeschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit eines Punktes in der Entfernung Eins von der Drehungsachse O sind, dann ist der Weg von A gleich $\frac{1}{2}(l + l_1) \cdot \omega \cdot \tau$ (berechnet mit der Beschleunigung ω/τ oder mittelst der mittleren Geschwindigkeit) und die Arbeit ist $F \cdot \frac{1}{2}(l + l_1) \cdot \omega \cdot \tau$. — Die lebendige Kraft eines Massentheilchens m, das sich in der Entfernung r von O befindet, ist $\frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \omega^2$. Der Satz von der lebendigen Kraft liefert daher die Gleichung

$$\frac{1}{2} F \cdot (l + l_1) \cdot \omega \cdot \tau = \sum \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot r^2$$

oder

$$F \cdot \frac{1}{2} l \cdot \omega \cdot \tau + F \cdot \frac{1}{2} l_1 \cdot \omega \cdot \tau = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m (l^2 + \varrho^2 - 2 l \varrho \cos \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \cdot l^2 \cdot M + \frac{1}{2} \omega^2 \sum m \varrho^2 - \omega^2 l \sum m \varrho \cos \alpha .$$

In dieser Gleichung hat jedes Glied eine physikalische Bedeutung; die Beachtung derselben lehrt die Lage und die Rolle des Massenmittelpunktes kennen. Das erste Glied gibt die Arbeit der Kraft F an, wenn dieselbe im Massenmittelpunkte wirkte, indem der Factor $\frac{1}{2} l \cdot \omega \cdot \tau$ den vom Punkt M in der Zeit τ zurückgelegten Weg misst. Ihm äquivalent ist das erste Glied der rechten Seite, das die lebendige Kraft der im Massenmittelpunkte vereinten Körpermasse M angibt. Aus der Gleichstellung beider ersten Glieder folgt das Newton'sche Mass für die Kraft F, nämlich $F = M \cdot l \cdot \omega/\tau$.

Das zweite Glied links bestimmt die Arbeit der in A angreifenden Kraft F bei der Drehung um eine durch den Massenmittelpunkt gehenden Achse mit der Winkelbeschleunigung ω/τ; denn der Weg von A bei einer solchen Drehung ist $\frac{1}{2} l_1 \cdot \omega \cdot \tau$. Übereinstimmend damit ist das zweite Glied rechts, das in der Form $\sum \frac{1}{2} m (\varrho \omega)^2$ die lebendige Kraft derselben Rotationsbewegung um den Massenmittelpunkt darstellt. Die Gleichheit der zweiten Glieder links und rechts folgt auch aus der Gleichung, wenn man $l = 0$ einführt.

Die angegebenen physikalischen Bedeutungen der Glieder werden auch gewonnen, wenn man im Massenmittelpunkte zwei gleiche und entgegengesetzt wirkende Kräfte F anbringt, die im ganzen an der ursprünglichen Wirkung der in A angreifenden Kraft F nichts ändern.

Man erkennt, dass die im Punkte M nach aufwärts gerichte Kraft F die angegebene fortschreitende Bewegung der Masse M und die beiden anderen entgegengesetzt gerichteten Kräfte F in M und A die Drehung des Körpers zur Folge haben. Die beiden letzten Kräfte bilden ein Kräftepaar oder Drehpaar.

Aus der Gleichung geht demnach hervor, dass die kinetische Energie des bewegten Körpers sich zerlegen lässt in die kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung der Masse, die man sich im Schwerpunkte vereint denken kann, und in die kinetische Energie einer Rotation um eine durch den Schwerpunkt gehende zur Ebene FM normale Achse.

Die angegebene Auffassung des Massenmittelpunktes und die vorgenommene Zerlegung der Energie ist aber nur unter der Bedingung möglich, dass das letzte Glied der Gleichung verschwindet; es muss also sein

$$\Sigma m \cdot \varrho \cdot \cos \alpha = 0;$$

$\varrho \cos \alpha$ ist der Normalabstand des Massenpunktes m von einer Ebene, welche durch M normal zur Verbindungslinie AM gelegt werden kann. Vermehrt man für jeden Massenpunkt den Abstand um dieselbe aber beliebige Grösse x_0, so erhält man $\varrho \cos \alpha + x_0 = x$ den Abstand von einer in der Entfernung x_0 vom Massenmittelpunkte liegenden Ebene EE und in Bezug auf diese

$$\Sigma mx = \Sigma m(\varrho \cos \alpha + x_0) = \Sigma m x_0 = x_0 \Sigma m = M \cdot x_0,$$

d. i. die bereits oben abgeleitete Relation für die Lage des Schwerpunktes.

Der Punkt O in der Schwerlinie, durch welchen während eines Zeitmomentes die Drehungsachse hindurch geht, heisst Mittelpunkt des Stosses. Seine Lage wird bestimmt durch Gleichsetzung der beiden zweiten Glieder der Energiegleichung, nämlich durch die Gleichung

$$F \cdot \frac{1}{2} l_1 \cdot \omega \cdot \tau = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m \varrho^2$$

oder für $F = M \cdot l \cdot \frac{\omega}{\tau}$ subst.

$$M \cdot l \cdot l_1 = \Sigma m \cdot \varrho^2.$$

$\Sigma m \varrho^2$ ist das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf den Schwerpunkt; man setzt dafür auch den Ausdruck $M \cdot k^2$ und nennt k den Trägheitsradius. Mit Hilfe dessen geht die letzte Gleichung über in die Form

$$l \cdot l_1 = k^2,$$

d. h. der Trägheitsradius k ist das geometrische Mittel aus den Abständen des Massenmittelpunktes von der Richtung der Stosskraft und

dem Mittelpunkte des Stosses. Der letztere Punkt lässt sich constructiv finden, wenn der Trägheitsradius bekannt ist; er ist ganz unabhängig von der Stärke der Stosskraft F.

Wird nach dem Aufhören der Stosskraft der Körper dem Einfluss der Schwere überlassen, so beschreibt der Massenmittelpunkt eine Wurflinie und der Körper setzt die einmal begonnene Rotation um die Schwerpunktsachse infolge der Erhaltung der Energie fort.

Aufg. 1. Eine schwerlose Stange von der Länge l ist an ihren Enden mit den Gewichten P und Q belastet; wo liegt der Schwerpunkt? (Bezüglich einer durch den Schwerpunkt normal zu l gelegten Momentenebene gilt die Gleichung $P \cdot x = Q(l - x)$. Hebelgesetz?) **2.** Die Gewichte der drei Seiten eines Dreieckes seien a, b, c; wie weit ist der Schwerpunkt von den Seiten entfernt? Wie weit von den Seiten jenes Dreieckes, das durch die Halbierungspunkte der gegebenen Seiten bestimmt wird? — (Aus dem Momentensatz, bezogen auf die Seite c als Achse, folgt der Abstand $= \frac{1}{2} h (a + b)/(a + b + c)$, und in Bezug auf die zu c parallele Seitenhalbierende ist der Abstand

$$\tfrac{1}{2} h \cdot c/(a + b + c) = Fl \cdot /(a + b + c) = \text{const.})$$

3. Wo liegt der Schwerpunkt eines Kreisbogens von $\sphericalangle\, \alpha = 80^0$ und $r = 20$ cm? — (Der Abstand vom Kreismittelpunkt ist

$$r \cdot 360 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} / \pi \cdot \alpha = 18{\cdot}415 \text{ cm.})$$

4. Eine kreisförmige eiserne Platte von $F = 1$ kg Gewicht ist in drei Punkten ihres Umfanges unterstützt, die ein gleichschenkliges Dreieck mit einem $\sphericalangle\, \alpha = 30^0$ an der Spitze bilden. Welche Last hat jede Stütze zu tragen? — (Bezüglich einer Momentenebene, die durch den Kreismittelpunkt geht und normal zur Dreieckshöhe ist, gilt für die drei Kräfte F_1, $F_2 = F_1$ und $F_3 = (F - 2F_1)$ die Momentengleichung

$$2F_1 \cdot r \cdot \cos \alpha = (F - 2F_1) \cdot r;$$

daraus folgt $F_1 = F_2 = F/4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 0{\cdot}26796$ kg* und $F_3 = 0{\cdot}4641$ kg*.) **5.** Eine Steinplatte vom Gewichte $F = 1$ kg, welche die Gestalt eines Kreisausschnittes mit einem Centriwinkel $\alpha = 20^0$ hat, ist an den drei Eckpunkten unterstützt; welchen Druck hat jeder der drei Stützpunkte auszuhalten? Wie ändern sich die Druckkräfte, wenn der Centriwinkel 90^0 oder 120^0 wird? — ($F_1 = F_2 = F \cdot 120^0 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} / \alpha^0 \cdot \pi = 0{\cdot}33676$ kg, $F_3 = 0{\cdot}32648$; für $\alpha = 120^0$ wird $F_1 = 0{\cdot}55133$ kg u. $F_3 = -0{\cdot}10266$ kg.) **6.** Wo liegt der Schwerpunkt eines mit Masse gleichmässig belegten Kreisabschnittes, dessen Radius $r = 12$ cm und dessen Centriwinkel $\alpha = 60^0$? ($x = \frac{2}{3} r \cdot \sin^3 \frac{\alpha}{2} : \left(\pi \cdot \frac{\alpha}{360} - \frac{1}{2} \sin \alpha\right) = 11{\cdot}039$ cm.) **7.** Wie gross ist der Abstand des Schwerpunktes eines Trapezes von einer Grundlinie? Die Grundlinien seien L, l und die Höhe h. — ($x = h(L + 2l)/3(L + l)$.)

8. Wo liegt der Schwerpunkt einer Pyramide und eines Kegels? **9.** Wo liegt der Schwerpunkt einer Kugelzone und einer Kugelhaube? — (Aus der Fläche der Zone $2r\pi \cdot h$ und dem gesuchten Abstande X vom Kugelmittelpunkte ergibt sich nach dem Momentensatze

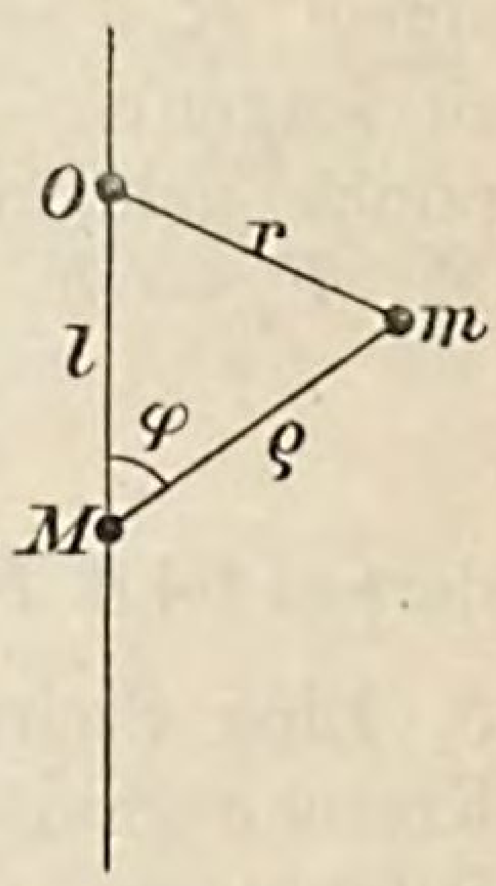
$$2r\pi \cdot h \cdot X = \int_{x_1}^{x_2} 2r\pi \cdot x \cdot dx,$$

wobei $h = x_2 - x_1$; man erhält $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.) **10.** Wie gross ist der Abstand des Schwerpunktes eines Kugelausschnittes vom Mittelpunkte der Kugel? — (Die Schwerpunkte der Elementarpyramiden liegen auf einer Kugelmütze von $\frac{3}{4} \cdot r = r'$ und $\frac{3}{4} h = h'$ und der Schwerpunkt der Kugelmütze liegt in der Mitte ihrer Höhe h', also vom Mittelpunkte $\frac{3}{4} r - \frac{3}{8} h = \frac{3}{8} r (1 + \cos \alpha / 2)$ entfernt.) [Die Aufgaben sind aus Budde's und Müller-Erzbach's Sammlungen.]

§ 25. **Energie eines rotierenden Körpers.** Es wurde bereits im Vorhergehenden die Rotationsenergie der Erdkugel und die lebendige Kraft eines Körpers, der infolge eines Stosses eine Drehung ausführt, ermittelt. Bei diesen Gelegenheiten kamen schon die für jede Rotation wichtigen Begriffe zum Ausdruck. Dieselben sollen nun noch in einem allgemeinen Falle kurz entwickelt und in einigen speciellen Fällen angewendet werden.

Irgend ein Körper sei um eine durch O (Fig. 17) gehende, zur Zeichnungsebene normal stehende Achse drehbar; m sei ein beliebiges Massentheilchen des Körpers, das von der Drehungsachse den Abstand r habe. Die Winkelgeschwindigkeit, d. i. die Geschwindigkeit eines Punktes in der Entfernung Eins von der Achse sei ω. Dann ist die lebendige Kraft eines Massentheilchens $\frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \omega^2$, und die gesammte lebendige Kraft des rotierenden Körpers

Fig. 17.



$$W = \sum \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m \cdot r^2.$$

$\Sigma m \cdot r^2 = T_0$ heisst das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Achse O; seine physikalische Bedeutung folgt aus der Form für die Energie $W = \frac{1}{2} T \omega^2$, in welcher T eine Masse in der Entfernung Eins von der Drehungsachse darstellt, die dieselbe Energie besitzt wie die ganze Körpermasse. (Vgl. § 23.)

Das Trägheitsmoment bezüglich einer willkürlichen Achse O lässt sich durch ein anderes ersetzen, das sich auf eine durch den Massenmittelpunkt M gehende parallele Achse bezieht: Wird nämlich der Abstand r aus dem Dreiecke OMm durch die Grössen $OM = l$, $Mm = \varrho$ und $\sphericalangle\, \varphi$ ausgedrückt, so erhält man

$$\begin{aligned} T_0 &= \Sigma m r^2 = \Sigma m(l^2 + \varrho^2 - 2l\varrho \cos\varphi) \\ &= l^2 \Sigma m + \Sigma m \cdot \varrho^2 - 2l\, \Sigma m\varrho \cdot \cos\varphi \\ &= M \cdot l^2 + T_M. \end{aligned}$$

T_M bedeutet das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Schwerpunktsachse und $\Sigma m \cdot \varrho \cdot \cos\alpha = 0$ als Moment der Masse des Körpers bezüglich einer durch den Schwerpunkt normal zu l gelegten Momentenebene.

Die erhaltene Relation zwischen einem beliebigen und dem auf den Schwerpunkt bezogenen Trägheitsmomente ist von allgemeiner Wichtigkeit, indem sie gestattet, die Berechnung des ersteren auf das letztere zurückzuführen, und es so ermöglicht, bei einem Körper von bestimmter Massenvertheilung unzählige Aufgaben auf eine einzige zu beschränken.

Es ist ersichtlich, dass T_M das möglichst kleinste Trägheitsmoment für einen Körper ist.

Das Trägheitsmoment wird durch den Trägheitsradius k ausgedrückt, indem man setzt

$$T_M = \Sigma m \cdot \varrho^2 = M \cdot k^2.$$

Durch Einführung dieses Wertes wird die Energie

$$W = \frac{1}{2} M(l \cdot \omega)^2 + \frac{1}{2} M(k \cdot \omega)^2,$$

d. h. die Rotationsenergie setzt sich zusammen aus der Energie der im Massenmittelpunkt vereint gedachten Masse und aus der Energie der Körpermasse, die mit derselben Winkelgeschwindigkeit in einer dem Trägheitsradius gleichen Entfernung um den Massenmittelpunkt rotierend zu denken ist [1]).

Wenn eine constante Kraft eine drehende Bewegung hervorruft, wie z. B. ein Übergewicht bei einer Rolle oder bei einem Wellrade, so lässt sich aus der Energiegleichung die Beschleunigung berechnen. Ist die Winkelbeschleunigung α, so ist die Winkelgeschwindigkeit nach t Sec. gleich $\alpha \cdot t$ und der Weg eines Punktes in der Entfernung Eins von der Drehungsachse $\frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$. Die Arbeit einer Kraft F in der Entfernung l von der Achse ist $F \cdot l \cdot \frac{1}{2}\alpha t^2$ und die äquivalente lebendige Kraft der rotierenden Masse ist $\frac{1}{2}(\alpha t)^2 \cdot T$. Wirken mehrere Kräfte F gleichzeitig, so besteht die Gleichung

$$\sum \left(F \cdot l \cdot \frac{1}{2}\alpha t^2\right) = \frac{1}{2}(\alpha \cdot t)^2 \cdot T$$

oder

$$\alpha \Sigma F l = \alpha^2 \cdot T.$$

1) Die stereometrische Bedeutung der Trägheitsmomente siehe in Holzmüller's Lehrb. d. Elem.-Math. III. S. 52 ff.

Daraus folgt

$$\alpha = \frac{\Sigma F \cdot l}{T},$$

d. h. die Winkelbeschleunigung eines beschleunigt rotierenden Körpers ist gleich der Summe der Momente der drehenden Kräfte dividiert durch das Trägheitsmoment.

Aufg.[1]) **1.** Es ist das Trägheitsmoment einer sehr dünnen Stange von der Länge l und der Masse M in Beziehung auf eine Drehungsachse zu finden, die auf ihr normal steht, a) wenn die Achse durch einen Endpunkt der Stange geht; b) wenn sie durch die Mitte der Stange geht. — (Aus der Form $\Sigma mr^2 = \int(\delta \cdot dx) \cdot x^2$ folgt a) $\frac{1}{3} Ml^2$ und b) $\frac{1}{12} Ml^2$.) **2.** Das Trägheitsmoment eines um seine geometrische Achse rotierenden Cylinders von der Masse M, der Länge l und dem Halbmesser r zu berechnen. — (Aus $\int(2r\pi \cdot dr \cdot l \cdot \delta)r^2$ folgt $\frac{1}{2} Mr^2$.) **3.** Das Trägheitsmoment einer um einen Durchmesser sich drehenden Kugel zu bestimmen. — (Nach § 23 ist es $\frac{2}{5} Mr^2$.) **4.** Eine kreisförmige Scheibe, die als fixe Rolle verwendet wird, hat das Gewicht $F = 446$ g; an beiden Seiten der über die Rolle gelegten Schnur wirken die Gewichte $f_1 = 12$ g und $f_2 = 10$ g. Wenn die Beschleunigung der Schwere $a = 9{\cdot}8$ m ist, mit welcher Beschleunigung fallen die Gewichte der Rolle? — (Das Trägheitsmoment der Kreisscheibe ist $\frac{1}{2} Mr^2$ und darnach erhält man aus einer Energiegleichung die Beschleunigung $a(f_1 - f_2)/\left(\frac{1}{2} F + f_1 + f_2\right) = 8$ cm. Wenn die Beschleunigung der Rolle bekannt ist, so lässt sich die Beschleunigung der Schwere a bestimmen. Vgl. Bewegung durch Überwucht § 3.) **5.** Ein Kreiscylinder vom Radius r und von der Masse M rolle über eine horizontale Unterlage hin und drehe sich in der Secunde n mal um; wie gross ist seine lebendige Kraft? — (Die Winkelgeschw. bezügl. der Cylinderachse ist $\omega = 2 \cdot n \cdot \pi$ und die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung ist $v = 2r\pi \cdot n$, daher die lebendige Kraft $\frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} T \cdot \omega^2 = 3M(n \cdot \pi \cdot r)^2$.) **6.** Welche Geschwindigkeit erreicht eine reibungslos über eine schiefe Ebene herabrollende Kugel (Kreiscylinder) vom Halbmesser r? In welcher Beziehung steht deren Beschleunigung a_1 zur Beschleunigung a_2 eines ohne Reibung herabgleitenden Körpers? — (Aus der Gl. f. d. lebendige Kraft $\frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{r}\right)^2 \cdot T = M \cdot a \cdot h$ folgt für die Kugel $v = \sqrt{10 \cdot a \cdot h/7} = \sqrt{2 a_1 l}$, und für einen gleitenden Körper gilt $v' = \sqrt{2a \cdot h} = \sqrt{2a_2 \cdot l}$. Daraus wird $a_1 : a_2 = 5 : 7$.) **7.** Den Schwerpunkt eines abgeschrägten Körpers (senkrechten Prismas oder Cylinders) zu finden, ferner aus der aufgestellten Beziehungsgleichung das Trägheitsmoment eines Dreieckes und einer Geraden zu ermitteln. —

1) Die zur Lösung nothwendige Summierung in elementarer Form siehe in Anm. d. § 23.

(Man bestimme nach Holzmüller den Schnitt der schneidenden Ebene mit der Basisebene und drücke die Momentengleichung des Körpervolumens durch das statische und das Trägheitsmoment der Basis, alle Momente auf jene Schnittgerade bezogen, aus. Denkt man sich die Basis in Streifen ds parallel zur Schnittgeraden zerlegt, so ist das Volumen

$$\int z \cdot ds = \int x \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot ds,$$

wenn x der Abstand eines Streifens von der gedachten Schnittlinie und α der Neigungswinkel der schneidenden Ebene gegen die Basis bedeuten. Die Momentengleichung des Körpervolumens ist nun

$$X \cdot \int x \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot ds = \int x^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot ds \quad \text{oder} \quad X \cdot \int x \cdot ds = \int x^2 \cdot ds.$$

Die beiden letzten Integrale sind bez. das stat. Moment M und das Trägheitsmoment T der Basis, daher ist die Abscisse des Schwerpunktes $X = T/M$. Seine Höhe ist die zugehörige halbe Höhe z des Körpers. — Für den Cylinderhuf ist $X = \frac{5}{4} r$. — Das Trägheitsmoment eines Dreieckes als Basis einer dreiseitigen abgeschrägten Pyramide und zugleich als Seite einer vierseitigen Pyramide lässt sich ermitteln, wenn die Schwerpunktslage dieser als bekannt vorausgesetzt wird.) [Die Aufg. schliessen sich an jene von Daurer an; bezügl. d. Aufg. 6 vgl. auch Volkmann in Poske's Zeitsch. 1894, S. 161. Aufg. 4 mit Rücksicht auf die Reibung behandelt meine Schrift über das Energie-Princip in der Dynamik S. 47. Aufg. 7 ist aus Holzmüller's math. Lehrb.]

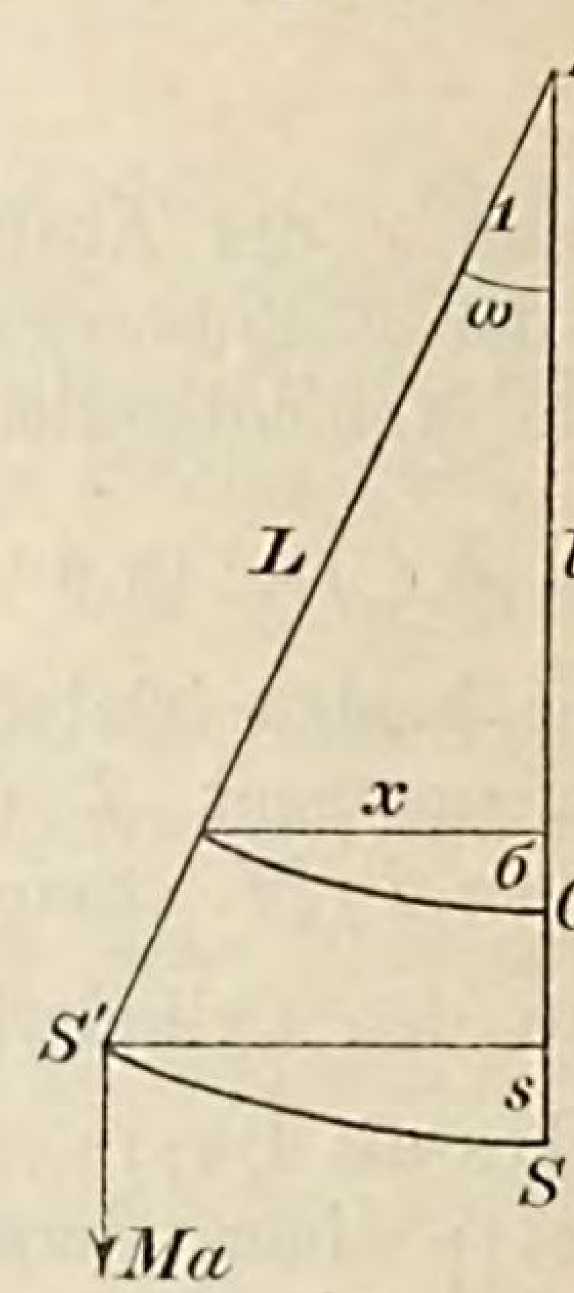
§ 26. **Physisches Pendel.** (Huygens 1673.) Jeder Körper, der um eine Achse drehbar aufgehängt ist und unter der Einwirkung der Schwerkraft Schwingungen ausführt, kann als physisches Pendel betrachtet werden. Dasselbe kann aus unzählig vielen einfachen oder mathematischen Pendeln zusammengesetzt gedacht werden. Die der Drehungsachse näheren Theilchen haben als mathematische Pendel von geringer Länge eine kurze Schwingungsdauer; den entfernteren Theilchen kommt eine grössere Schwingungsdauer zu. Wegen des festen Zusammenhanges schwingen aber alle Körpertheilchen gleichzeitig mit einer gemeinschaftlichen Schwingungsdauer von mittlerem Werte, indem die Schwingungen der oberen Theilchen durch die unteren verzögert und die Schwingungen der unteren durch die oberen beschleunigt werden. Der Punkt des Pendels, dessen Bewegung weder verzögert noch beschleunigt wird, sondern der im Körper genau so schwingt, als wenn er für sich allein als einfaches Pendel schwingen würde, heisst Schwingungsmittelpunkt und seine Entfernung von der Drehungsachse reducierte Länge des physischen Pendels.

a) Es soll nun die Schwingungsdauer des physischen Pendels ermittelt werden[1]).

1) Siehe meine Abhdlg. i. d. Wiener Realschlztsch. 1883, S. 595 u. meine

Der als physisches Pendel zu betrachtende Körper von der Masse M sei in der Achse A aufgehängt (Fig. 18). Bringt man den Körper aus seiner Gleichgewichtslage, so wird das im Schwerpunkte S angreifende Gewicht Ma die Pendelschwingungen des Körpers hervorrufen. Die beim Falle des Schwerpunktes um die Strecke s von der Schwerkraft geleistete Arbeit findet sich als kinetische Energie in den Massentheilchen m des Körpers, so dass wir haben

Fig. 18.



$$M \cdot a \cdot s = \sum \frac{1}{2} mv^2.$$

Hierin ist v die Geschwindigkeit des Theilchens m beim Passieren der Gleichgewichtslage. Ist r die Entfernung des beliebigen Massentheilchens m vom Aufhängepunkte und ω die Winkelgeschwindigkeit (Geschwindigkeit eines Punktes in der Entfernung Eins), dann ist $v = \omega \cdot r$ und es wird

$$M \cdot a \cdot s = \frac{1}{2} \sum m \cdot r^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot T,$$

wobei T das Trägheitsmoment des Pendelkörpers ist. Durch Einführung des Ausschlagswinkels α und der Schwerpunktentfernung $AS = L$ wird $s = L(1 - \cos\alpha)$ und die Energiegleichung gewinnt die Form

$$M \cdot a(1 - \cos\alpha) \cdot L = \frac{1}{2} \omega^2 T;$$

für den Schwingungspunkt O, als mathematisches Pendel gedacht, gilt ebenso

$$m \cdot a(1 - \cos\alpha) l = \frac{1}{2} m\omega^2 \cdot l^2$$

als analoge Gleichung; durch Division der Gleichungen folgt sofort für die reducierte Pendellänge

$$l = \frac{T}{ML};$$

dieselbe entspricht dem nach den Gesetzen eines mathematischen Pendels schwingenden Schwingungsmittelpunkte; durch Einsetzen des Wertes in den Ausdruck für die Schwingungszeit eines mathematischen Pendels gelangen wir bald zu dem gesuchten Werte

$$t = \pi \sqrt{\frac{T}{MLa}}.$$

Darnach ist die Schwingungsdauer des physischen Pendels direct proportional der Quadratwurzel aus dem Trägheitsmomente und um-

Schrift über d. Energiepr. i. d. Dyn. 1884, S. 91 und dieselbe Entwickelung in Dressel's Phys. 1895, S. 104.

gekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem grössten Drehungsmomente des Pendelgewichtes.

b) Kater's Reversionspendel. Wie für rotierende Körper im allgemeinen lässt sich auch für das physische Pendel der Trägheitsradius k einführen und es wird (nach § 25)

$$T = \Sigma m r^2 = M L^2 + \Sigma m \varrho^2 = M(L^2 + k^2);$$

durch Einführung dieses Wertes in den Ausdruck für die reducierte Pendellänge $l = \frac{T}{ML}$ erhalten wir

$$l = L + \frac{k^2}{L}$$

oder

$$(l - L) \cdot L = k^2 \quad \text{und für} \quad l - L = L' \text{ sbst.}$$

$$L L' = k^2,$$

d. h. das Product aus den Abständen des Aufhängepunktes und Schwingungsmittelpunktes vom Massenmittelpunkt ist für den Körper eine constante Grösse. Aus der gleichartigen Construction der Gleichung nach L und L' folgt, dass die Gleichung richtig bleibt, wenn die Bedeutungen der beiden Grössen wechseln; dies besagt physikalisch interpretiert, dass der Aufhängepunkt zum Schwingungsmittelpunkt wird, wenn der Schwingungsmittelpunkt zum Aufhängepunkt gemacht wird. Dass thatsächlich nach dieser Umkehrung des Pendels die reducierte Pendellänge und somit auch die Schwingungsdauer dieselbe bleibt, ergibt sich leicht aus der Relation für diese Pendellänge; es sind

$$l' = L' + \frac{k^2}{L'} \quad \text{und} \quad l = L + \frac{k^2}{L}.$$

Aus der Beziehung $LL' = k^2$ folgt sofort $l = l'$.

Dieser Umstand gestattet die reducierte Länge des physischen Pendels experimentell zu bestimmen und darnach dasselbe nach den Gesetzen des mathematischen Pendels zu benützen. Das Reversionspendel dient besonders zur Bestimmung der Beschleunigung der Schwerkraft.

Es verdient auch bemerkt zu werden, dass die Gleichung $LL' = k^2$ bei der Einwirkung eines excentrischen Stosses auf einen Körper erhalten wurde (§ 24); darnach werden die Bedeutungen von L und L' augenfällig; der Mittelpunkt des Stosses als Momentancentrum im Augenblicke des Stosses entspricht der Drehungsachse und der Angriffspunkt der Stosskraft dem Schwingungsmittelpunkte[1]).

Das physische Pendel findet Anwendung zu Pendeluhren, zu Mälzel's Metronom, zu den Versuchen von Foucault, Cavendish u. s. w.

1) Siehe auch Maxwell: Substanz und Bewegung, S. 116.

Aufg. 1. Die Schwingungsdauer eines Wagebalkens (ohne Schalen) ist 15/7 Sec.; wie tief liegt der Schwingungsmittelpunkt unter der Drehkante? $a = 9{\cdot}809$ m. — ($l = T/ML = a \cdot t^2/\pi^2 = 4{\cdot}5636$ m.) **2.** Die beiden Drehkanten eines Reversionspendels haben eine unveränderliche Entfernung von 1·034 m; auf welche Schwingungsdauer muss das Pendel durch ein verschiebbares Gewicht bezüglich der einen Achse reguliert werden, damit der Schwingungspunkt in der anderen Achse liege? $a = 9{\cdot}809$ m. — ($t = \pi\sqrt{l/a} = 1{\cdot}02$ Sec.) **3.** Ein dünner Stab von der Länge L wird in einem Endpunkte aufgehängt und in Schwingungen versetzt; wie gross ist die reducierte Länge dieses Pendels? — (Aus $T = \frac{1}{3} ML^2$ folgt $l = \frac{2}{3} L$.) **4.** In welcher Entfernung vom Schwerpunkte muss ein Meterstab mit einer auf seiner Längenrichtung normalen Achse versehen werden, damit er ein Secundenpendel bilde? — (Aus $1 = \pi\sqrt{[(M/12 + Mx^2)/Max]}$ folgt $x = 0{\cdot}49693 \pm 0{\cdot}40448$ m. Soll die Achse im Stabe selbst liegen, so gilt der Wert $x = 0{\cdot}09245$ m.) **5.** Wie gross ist das Trägheitsmoment eines 552·7 g schweren Pendels bezüglich einer 589 mm vom Schwerpunkt abstehenden Achse, wenn die entsprechende Schwingungsdauer 0·9861 Sec. und die Beschleunigung der Schwere 9·809 m betragen? Wie gross ist die reducierte Pendellänge? —

$$(T = M \cdot a \cdot L \cdot t^2/\pi^2 = 0{\cdot}03207, \quad l = 0{\cdot}9664 \text{ m.})$$

6. Ein physisches Pendel, das in 245 Secunden 261 Schwingungen macht, wird sowohl oberhalb, als auch unterhalb der Drehkante in einem Abstande $\lambda = 0{\cdot}2$ m von derselben mit einer Linse vom Gewichte $F = 1$ kg versehen, worauf es zu 291 Schwingungen 296 Sec. braucht; wie gross war ursprünglich sein Trägheitsmoment? $a = 9{\cdot}809$. — (Aus den Werten $t = \pi\sqrt{T/M \cdot L \cdot a}$ und $t_1 = \pi\sqrt{[(T + 2F\lambda^2/a)/M \cdot L \cdot a]}$ folgt $T = 2F \cdot \lambda^2 \cdot t^2/a(t_1{}^2 - t^2) = 0{\cdot}0468$.) **7.** Ein Metronompendel nach Mälzel wiege ohne Laufgewichte 49 g, sein Schwerpunkt befinde sich 37·2 mm unter der Achse, seine Schwingungsdauer betrage 10/27 Secunden; wie lange währt eine Schwingung, wenn das 8·1 g schwere Laufgewicht aufgesteckt wird, und zwar so, dass der Schwerpunkt desselben 1 dm oberhalb der Achse liegt? $a = 9{\cdot}809$ m. — (Es ist $10/27 = \pi\sqrt{[T/0{\cdot}049 \cdot 0{\cdot}0372]}$ und

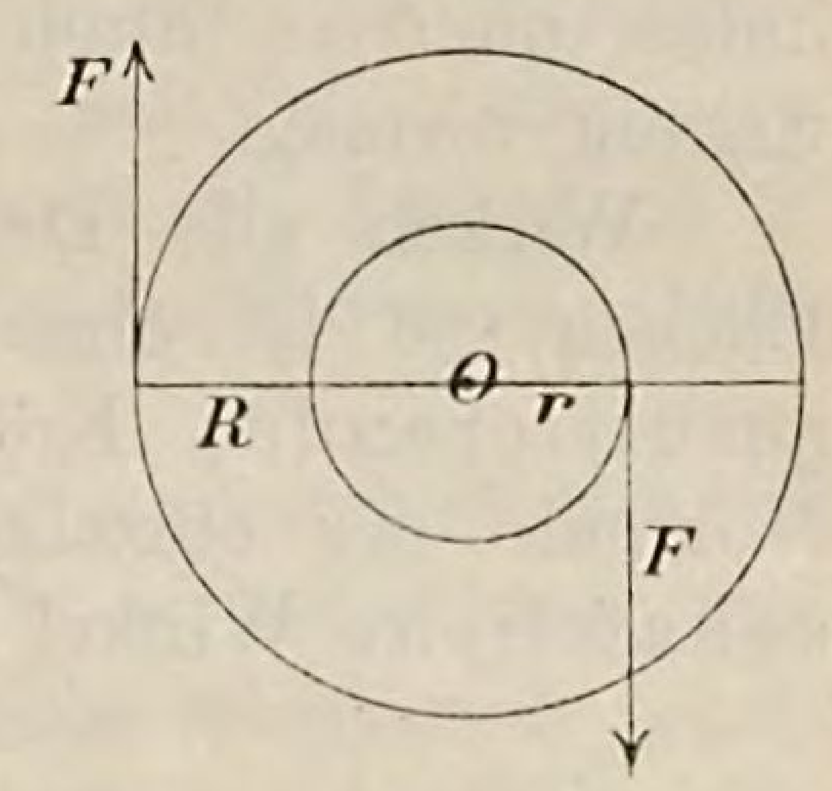
$$t = \pi\sqrt{[(T + 0{\cdot}0081 \cdot 0{\cdot}1^2/9{\cdot}809)/(0{\cdot}049 \cdot 0{\cdot}0372 - 0{\cdot}0081 \cdot 0{\cdot}1)]} = 0{\cdot}5721 = 4/7.)$$

8. Ein Pendel, das aus einem Stabe und einer Linse, die in ihrem Schwerpunkte am Stabe festgeschraubt ist, besteht, hat bei einer Temperatur $\tau_0{}^0$ C eine Schwingungsdauer t_0; bei jeder Temperaturerhöhung um 1^0 C erfahre die Längeneinheit des Stabes eine Verlängerung λ. Man ermittle daraus die Schwingungsdauer des Pendels bei τ^0 C. Das Trägheitsmoment der Linse bezüglich der durch ihren Schwerpunkt gehenden Achse soll unberücksichtigt bleiben. — ($t_0 = \pi\sqrt{\left[\left(\frac{1}{3} ML^2 + ml^2\right)/\left(\frac{1}{2} MaL + mal\right)\right]}$, wobei M die Stabmasse und m die Linsenmasse sind; bei Erwärmung um $(\tau - \tau_0)^0$ erhält jede Längeneinheit die Grösse $[1 + \lambda(\tau - \tau_0)]$; daher

wird $t = t_0 \sqrt{1 + \lambda(\tau - \tau_0)}$.) **9.** In welcher Entfernung x vom Schwerpunkt ist an einem dünnen Stabe von der Länge l eine Querachse anzubringen, damit er möglichst rasch schwinge? Wie gross ist die entsprechende Schwingungsdauer? — (Durch Auflösung der Gleichung $t = \pi \sqrt{\left[\left(\frac{1}{12} Ml^2 + Mx^2\right)/Max\right]}$ nach x folgt leicht $t_{\min} = \pi \sqrt{l/a \sqrt{3}}$ und $x = (l/6)\sqrt{3}$.) [Daurer.]

§ 27. **Kräftepaare.** Wie bereits bei der Betrachtung eines excentrisch gestossenen Körpers (§ 24) bemerkt wurde, versteht man unter einem Kräftepaar oder Drehpaar zwei gleich starke und entgegengesetzt gerichtete Kräfte, welche in verschiedenen Punkten eines Körpers angreifen. Ein deutliches Bild gewährt eine Welle mit Kreisscheibe (Wellrad), wenn an der Welle und am Rade etwa an umgewickelten Seilen gleiche Kräfte in entgegengesetzter Richtung wirken (Fig. 19). Die Resultierende solcher Kräfte ist gleich Null; ihre Wirkung besteht ausschliesslich in einer Drehung. Für die Arbeit, welche eine Kraft F leistet, ist die Arbeit der Drehung um die Winkeleinheit massgebend. Für dieselbe folgt aus dem Arbeitswerte der Drehung um $\sphericalangle\, d\alpha$, nämlich aus

Fig. 19.



$$dW_1 = F \cdot r \cdot d\alpha,$$

der Ausdruck

$$\frac{dW_1}{d\alpha} = F \cdot r.$$

Man nennt dieses Product aus der Kraft F in den Abstand r ihrer Richtung vom Drehungsmittelpunkte O das Moment der Kraft in Bezug auf den betreffenden Punkt oder auch das Drehungsmoment.

Das Kräftepaar leistet bei der Drehung um $\sphericalangle\, d\alpha$ die Arbeit

$$dW = F \cdot r \cdot d\alpha + F \cdot R \cdot d\alpha,$$

und bei der Drehung um die Winkeleinheit die Arbeit

$$\frac{dW}{d\alpha} = F(R + r) = F \cdot l.$$

Der Abstand l der beiden Kräfte F heisst Arm und das Product $F \cdot l$ Moment des Kräftepaares. Es ist aus der Figur leicht ersichtlich, dass das Moment unabhängig ist von der Lage des Drehungsmittelpunktes O.

Aus der Bedeutung des Momentes eines Kräftepaares als Arbeit einer bestimmten Drehung lässt sich unmittelbar schliessen, dass ein Kräftepaar durch ein anderes ersetzt werden kann, wenn die Momente beider Paare einander gleich sind; denn unter dieser Bedingung sind

auch die geleisteten Arbeiten einander gleich. Wenn die Angriffspunkte der Kräfte sich nicht mitdrehen, wie es bei dem gedachten Wellrade der Fall ist, so ist auch die Richtung der Kräfte beliebig. Wenn der Angriffspunkt mit den Kräften bewegt wird, wie es bei der Drehung einer Magnetnadel geschieht, dann tritt zu der angegebenen Bedingung des Ersatzes eines Drehpaares durch ein anderes noch die hinzu, dass die Kräfte längs paralleler Geraden wirken müssen. Die Drehung erfolgt alsdann nur, bis die Kräfte des betreffenden Drehpaares in derselben einander entgegen wirken und sich gegenseitig aufheben; es tritt dann Gleichgewicht ein.

Mehrere Kräftepaare lassen sich auch zusammensetzen, indem man sie durch ein einziges ersetzt, das dieselbe Arbeit zu verrichten vermag.

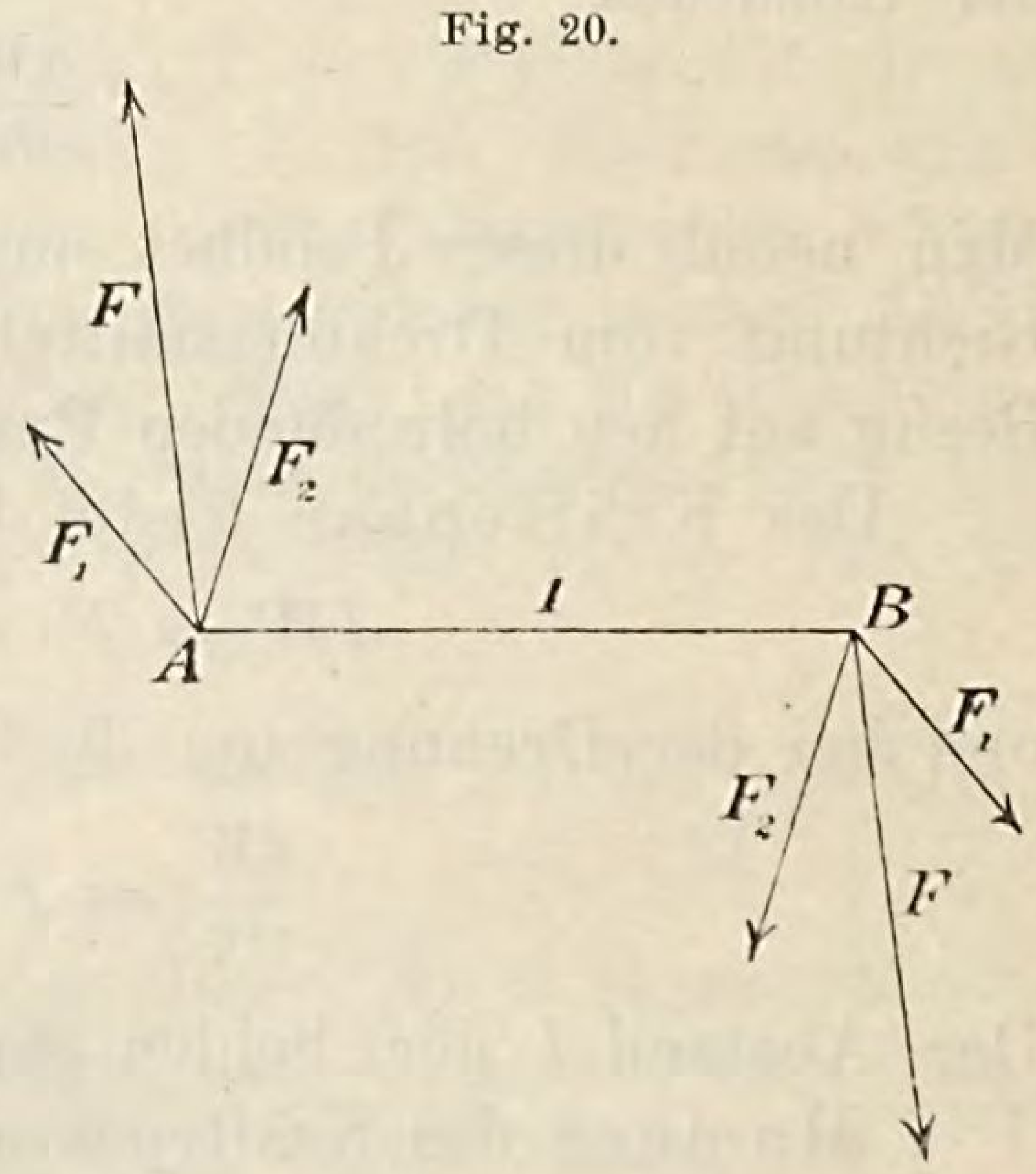
Wirken alle Drehpaare in derselben oder in parallelen Ebenen, so ist ohne weiteres ersichtlich, dass das Moment D des resultierenden Kräftepaares gleich sein muss der Summe der Momente der einzelnen Kräftepaare, weil die Drehungen gemeinschaftliche Winkel haben. Es besteht also die Bedingungsgleichung

$$D = \Sigma F \cdot l.$$

Der Ausdruck ist bei der Erklärung der Zusammensetzung eines Magnetes aus Elementarmagneten von Wichtigkeit.

Bei der Zusammensetzung von Kräftepaaren, die in verschiedenen, gegen einander geneigten Ebenen wirken, kann man wie folgt verfahren: Man verlege die Arme der Drehpaare in die Schnittgerade AB beider Ebenen (Fig. 20) und mache sie $= 1$. Die Momente der gegebenen zwei Drehpaare sind dann beziehungsweise $F_1 \cdot 1$ und $F_2 \cdot 1$. Nun lassen sich die Kräfte F_1 und F_2 zu den Resultierenden F zusammensetzen, und man erhält als resultierendes Kräftepaar die Kräfte F mit dem Arme $AB = 1$ und dem Drehungsmomente $F \cdot 1$.

Fig. 20.



Nach Poinsot stellt man jedes Kräftepaar durch eine Gerade, die Achse des Drehpaares, dar, indem man auf die Ebene des Paares eine Normale errichtet und auf dieselbe eine Länge gleich dem Momente des Drehpaares aufträgt. Der Drehungssinn des Kräftepaares wird dadurch berücksichtigt, dass man die Achse nach jener Seite hin aufträgt, von welcher die Drehung im positiven Sinne, d. h. im Sinne der Bewegung eines

Uhrzeigers erfolgt. Mit der Achse ist alsdann das Kräftepaar vollständig bestimmt. Es ist nun leicht zu erweisen, dass mit Hilfe der Achsen der Kräftepaare diese so zusammengesetzt werden können, wie einzelne Kräfte.

Für den vorliegenden Fall der Zusammensetzung zweier Drehpaare, die in zu einander geneigten Ebenen wirken, ist nach Fig. 20 ersichtlich, dass die Achse des Kräftepaares $F_1 F_1$ normal zur Ebene $(F_1 F_1)$ steht und ihre Länge durch die Zahl F_1 bestimmt wird; ebenso ist auch die Achse des Paares $F_2 F_2$ zur Ebene dieses Paares normal und der Länge nach gegeben durch die Zahl F_2. Die beiden Achsen schliessen demnach denselben Winkel mit einander ein, wie die Kräfte F_1 und F_2, und es lässt sich mit ihnen ein Parallelogramm verzeichnen, das dem aus den Kräften F_1 und F_2 construierten congruent ist. Die resultierende Achse hat somit die Länge $= F$, und ihre Richtung ist normal zur Ebene des resultierenden Drehpaares FF.

Zur Erklärung mancher Erscheinungen ist es vortheilhaft, anstatt Kräftepaare Rotationsgeschwindigkeiten zu betrachten und diese zusammenzusetzen. Man kann leicht zu diesen übergehen, wenn man für die Kräfte F die erzielten Geschwindigkeiten v einführt. Es ist $F = m \cdot v/t$ und das Drehungsmoment $D = m \cdot (v/t) \cdot l$. Bei der Zusammensetzung der Drehungsmomente sind m und t constant und l kann gleich Eins angenommen werden, daher übernimmt die Geschwindigkeit v die Rolle von F. Auf die Achsen der Kräftepaare oder auf die Drehungsachsen aufgetragen, kann man Rotationsgeschwindigkeiten ebenso zusammensetzen wie Geschwindigkeiten geradliniger Bewegungen. Anwendungen der Zusammensetzung drehender Bewegungen finden sich bei der Kreiselbewegung, bei der Präcessionsbewegung der Himmelskörper, bei der Wurfbewegung rotierender Geschosse etc. Umgekehrt kann z. B. der Foucault'sche Pendelversuch durch Zerlegung der Erdrotation in zwei Drehungen erklärt werden[1]).

§ 28. **Gleichgewichtslagen. Helm's Intensitätsgesetz.** In den vorhergehenden Paragraphen (24 und 26) wurde das Verhalten eines in einem Punkte oder in einer Achse befestigten schweren Körpers dargethan. Es wurde gezeigt, dass der Körper sich nur dann in einer Gleichgewichtslage befindet, wenn der Schwerpunkt seine höchste oder tiefste Lage einnimmt, oder wenn die potentielle Energie ein Maximum oder Minimum ist. Die erstere Gleichgewichtslage, bei welcher der Schwerpunkt sich vertical über dem befestigten

1) Siehe Wallentin's Lehrb. d. Phys. S. 57. Kreiselbeweg. ebenda S. 48. Eine ausführliche Darstellung der Kreiselbewegung hat M. Koppe in Poske's Zeitsch. IV. Jgg. S. 70—83 gegeben.

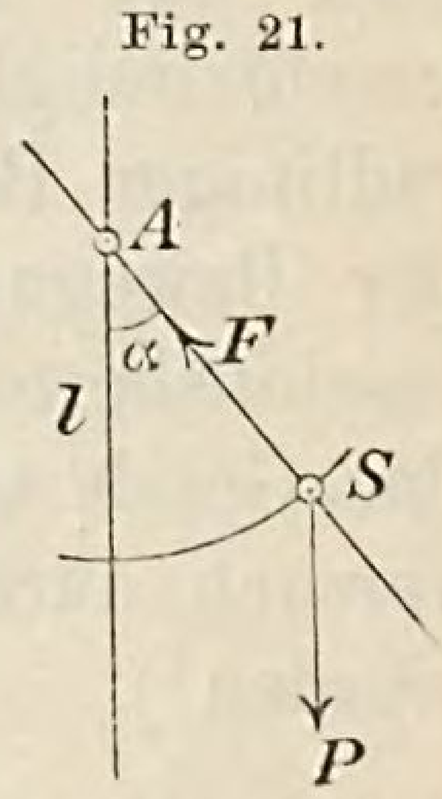
Punkte befindet, der Körper also unterstützt erscheint, heisst labil; bei einer kleinen Verschiebung schlägt der Körper um. Die letztere Gleichgewichtslage, bei der der Körper an einem Punkte oder an einer Geraden aufgehängt erscheint, heisst stabil; der Körper kehrt in dieselbe stets wieder zurück, wenn er daraus verschoben wurde.

Ist der Schwerpunkt befestigt, so ist das Gleichgewicht indifferent; das besondere Kennzeichen dieser Gleichgewichtslage ist, dass bei einer möglichen Bewegung des Körpers der Schwerpunkt weder höher noch tiefer zu liegen kommt, dass somit auch die potentielle Energie ungeändert bleibt. Es befinden sich also auch z. B. homogene Kugeln und Kreiscylinder im indifferenten Gleichgewichte, wenn sie auf horizontalen Unterlagen ruhen.

Das Verhalten eines in der zuerst angegebenen Weise befestigten Körpers ist geeignet, das Bestreben der Energie bei beschränkter Bewegung ersichtlich zu machen. Vor allem zeigt sich, dass die potentielle Energie der Schwere einem Minimum zustrebt, und dass ein stabiles Gleichgewicht nur dann eintritt, wenn die potentielle Energie den kleinsten Wert erreicht hat. Ausserdem werden die Factoren der Energie durch ihr Auftreten in der Erscheinung gut erkennbar. —

Die Arbeit der Schwerkraft bei freier Bewegung besteht aus den beiden Factoren Gewicht und Weg. Dieselben erleiden aber durch die Bewegungsbedingungen gewisse Veränderungen. Bei einem um eine Achse drehbaren Körper (Fig. 21) wirkt ausser der Schwerkraft P im Schwerpunkte noch die Widerstandskraft F der Aufhängevorrichtung. Wird der Körper um den sehr kleinen Winkel $d\alpha$ gedreht, so ist die Arbeit der beiden Kräfte beziehungsweise $P \cdot \sin\alpha \cdot l \cdot d\alpha$ und $F \cdot \cos 90^0 \cdot l \cdot d\alpha$, und die Arbeitssumme

Fig. 21.



$$dW = (P \cdot \sin\alpha - F \cdot \cos 90^0) \cdot l \cdot d\alpha .$$

Diesem Werte gemäss ist es zweckmässig, die Arbeit jeder Kraft zu zerlegen[1]) in den gemeinschaftlichen Weg $l \cdot d\alpha$ und in die Kraft längs des Weges.

Die Kräfte bestimmen die Richtung der Bewegung und bedingen das Gleichgewicht, wenn sie einander gleich sind. G. Helm nennt sie die Intensitäts-Factoren der Energie[2]); wir wollen sie auch Wirkungsgrade heissen. Den zweiten Factor nennen wir nach Helm die Extensität oder den Wirkungsraum.

Nach dieser Auffassung stellt sich nun die Erscheinung als eine

1) Siehe meine Abhdlg. zur Übereinstimmung der phys. Arbeitsgesetze. Rlschl.-Ztsch. Wien. 1892. S. 519—528.

2) G. Helm: Die Lehre von der Energie (1887) und der Vortrag auf der 67. Naturforscherversammlung (1895).

Energieverwandlung dar, und zwar bei der Bewegung nach abwärts als Übergang der potentiellen Energie von Stellen höherer zu niederer Intensität. Man findet auch bei anderen mechanischen und physikalischen Erscheinungen, dass „die Energie stets das Bestreben hat, von Stellen höheren zu Stellen niederen Wirkungsgrades überzugehen". Das Gesetz ist deshalb von allgemeiner Bedeutung und heisst das Helm'sche Intensitätsgesetz.

Im vorliegenden Falle ist es ohne weiteres klar, dass das Gesetz mit dem Principe der Kräftezusammensetzung übereinstimmt; denn die Intensitäten sind die Kräfte in der Richtung des Weges, und die Bewegung erfolgt in der Richtung von der Stelle der grösseren zur Stelle der kleineren Kraft. Die Differenz der Intensitäten gibt die Resultierende aus der wirksamen Schwerkraft und dem Widerstande der Aufhängevorrichtung; sie bestimmt den Bewegungszustand. Die Resultierende wird auch durch die in Betracht kommenden Energieänderungen in der Bewegungsrichtung angegeben; daher das in Rede stehende Gesetz auch im Energieprincipe für Energie- oder Kräftesysteme enthalten ist. Um nach demselben auch die Bewegungsrichtung zu ermitteln, hat man die Richtung des stärksten Energiegefälles zu bestimmen; diese Richtung fällt mit der der Resultierenden zusammen, längs welcher stets die grösste Arbeit geleistet wird (§ 7).

Auch die letztere Auffassung des Erscheinungsverlaufes ist allgemein verwendbar; Ostwald stellt sie in directer Weise als „Maximumprincip" auf, das er in folgende Worte kleidet: „Von allen möglichen Energieumwandlungen wird diejenige eintreten, welche in gegebener Zeit den grösstmöglichen Umsatz ergibt."[1])

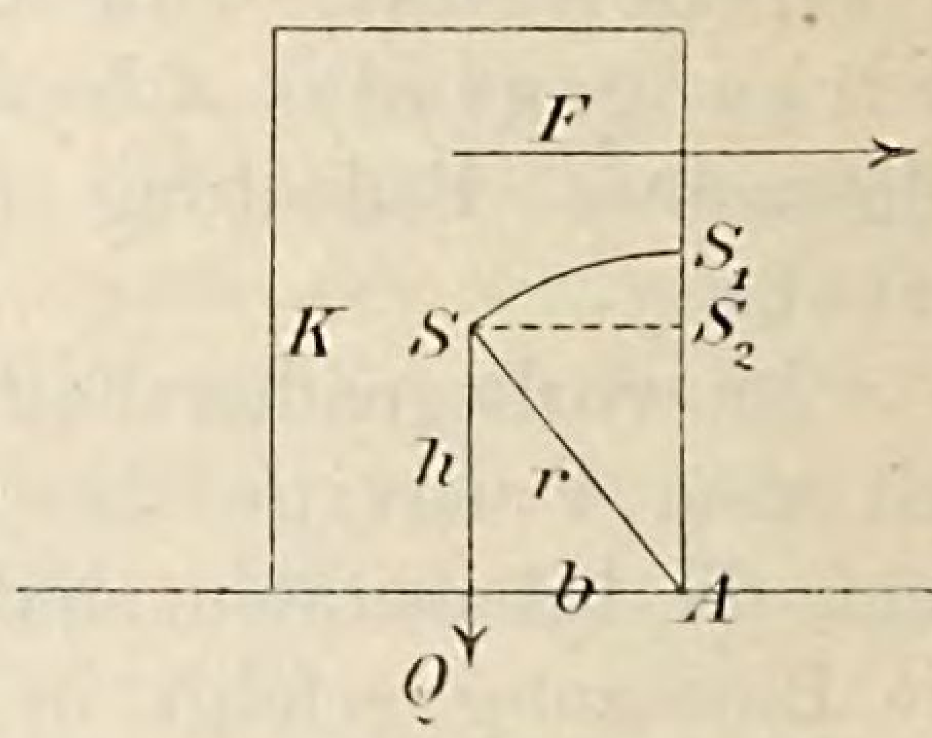
Bei Bestimmung der Aufwärtsbewegung des Körpers nach gleichen Gesetzen muss auch die vorher erlangte kinetische Energie in Betracht gezogen werden.

§ 29. **Standfestigkeit.** Ein Körper, der in einer Fläche unterstützt ist, befindet sich in der stabilen Gleichgewichtslage; denn wenn man ihn aus dieser Lage um eine Kante herausdreht, so kehrt er wieder in dieselbe zurück. Die Drehung um die Kante darf aber nicht beliebig vergrössert werden; denn ist der Massenmittelpunkt, respective der Schwerpunkt in der Verticalebene der Drehungskante angelangt, so hat der Körper eine neue, die labile Gleichgewichtslage erreicht. In der labilen Gleichgewichtslage hat der Schwerpunkt seine grösste Höhe über der Unterlage und er kehrt bei keiner Verschiebung des Körpers mehr in seine Lage zurück, sondern der Körper schlägt nach der geringsten Bewegung um. Soll der Körper durch

1) W. Ostwald, Lehrb. d. allg. Chem. — Chem. Eng. S. 37. (1893.)

Drehung um eine Kante umgeworfen werden, so muss er an die Grenze seiner Stabilität, d. h. aus der stabilen in die labile Gleichgewichtslage gebracht werden; der Widerstand, den der Körper dem Umstürzen entgegensetzt, heisst seine Standfestigkeit. Die Arbeit $W = F \cdot s$, welche von einer Kraft F geleistet werden muss, um den Körper an die Grenze seiner Stabilität zu bringen, ist uns ein Mass für die Standhaftigkeit. Um dieses Mass zu gewinnen, wählen wir in Fig. 22 die Kante A des Körpers als Drehungskante und bringen den Schwerpunkt S nach S_1; ist das Gewicht des Körpers Q, so ist die bei der Drehung durch Hebung des Gewichtes geleistete Arbeit

Fig. 22.



$$W = Q \cdot S_1 S_2 = Q(r - h) = Q\left(\sqrt{b^2 + h^2} - h\right) = \frac{Q \cdot b^2}{\sqrt{(b^2 + h^2)} + h}.$$

Die Höhe des Schwerpunktes h kann hierbei auch negativ werden, wenn der Schwerpunkt des Körpers unter die durch die Drehungskante gelegte Horizontalebene zu liegen kommt, wie z. B. bei der Hebelwage und anderen aufgehängten Körpern. Die Standfestigkeit eines Körpers ist daher nach dem zweiten Werte umso grösser, je grösser sein Gewicht, je kleiner der positive oder je grösser der negative Abstand des Schwerpunktes von der horizontalen Kantenebene ist. In dem Gesetze nach dem letzten Ausdrucke ist auch die Abhängigkeit der Standfestigkeit von der Grösse der Unterstützungsfläche enthalten, indem mit der Grundfläche b auch die Standfestigkeit grösser wird.

Anwendungen findet das Gesetz der Standfestigkeit bei der Construction von Körpern, die in einer Fläche unterstützt sind, wie Möbelstücken, Leuchtern etc., bei Lastwägen, beim Beladen derselben, bei Bauten etc.

Aufg. 1. Wie gross ist die Standfestigkeit einer geraden Mauer aus Ziegelsteinen von 3 m Höhe und 0·3 m Dicke auf einen Meter ihrer Länge, wenn 1 m^3 der Ziegelsteinmauer 1500 kg wiegt? — (Die Standfestigkeit als Arbeitswert ist 10·10 kgm und als Drehungsmoment 202·5.) **2.** Wie verhalten sich die Standfestigkeiten (als Arbeitswerte) einer Halbkugel, eines Cylinders und eines Kegels, wenn die drei aus demselben Stoffe hergestellten Körper gleiche Grundflächen und gleiche Gewichte haben? — $\left(\frac{1}{8}\left(\sqrt{73} - 3\right) : \frac{1}{3}\left(\sqrt{10} - 1\right) : \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right).\right)$ **3.** Ein beladener Wagen, dessen Vorder- und Hinterräder eine Spurweite von 1·2 m haben, wiegt 2 Tonnen, und sein Schwerpunkt liegt in der Symmetrieebene 1·5 m hoch über dem Boden; wie gross ist auf horizontaler Strasse seine Standfestigkeit gegenüber einem seitlichen Zuge oder Drucke, der in der Höhe

des Schwerpunktes angreift? — (800 kg.) **4.** Über welche Grenze darf die seitliche Neigung einer Strasse nicht hinausgehen, damit auf ihr der in der vorhergehenden Aufgabe beschriebene Wagen nicht umfalle? — ($21^0\,48'\,5''$.) **5.** Die Resultante des Druckes, den der Wind auf eine ebene Fläche ausübt, greift im Schwerpunkte derselben an. Welchen Druck des Windes vermag demnach eine 2 m hohe, 0·3 m dicke und l m lange Mauer vom specifischen Gewichte (Gewicht eines Cubikmeters) 1·5 t, die auf horizontalem Erdreich aufgeführt ist, per Quadratmeter auszuhalten? — (67·5 kg.) **6.** Ein gerades quadratisches Prisma, welches auf einer wagrechten Grundlage steht, hat die Grundkante $a = 14$ cm, die Höhe $h = 22$ cm. Der untere Theil bis zur Höhe $h_1 = 12$ cm besteht aus einem Stoffe, welcher das spec. Gew. $s_1 = 0{\cdot}7$ hat; der Stoff des oberen Theiles hat das spec. Gew. $s_2 = 11$. Um welchen Winkel muss die Säule um eine Kante der Grundfläche gedreht werden, damit sie losgelassen nicht wieder zurückfällt? — ($\operatorname{tg}\varphi = a \cdot \frac{h_1 s_1 + (h - h_1) s_2}{h_1{}^2 s_1 + (h^2 - h_1{}^2) s_2}$, $\varphi = 23^0\,20'\,38''$.) **7.** Ein schiefer Kreiscylinder habe den Basisdurchmesser 10 cm, die Seite 35 cm und die Höhe 28 cm; bleibt derselbe stehen, wenn seine Basis horizontal gestützt wird? Wo durchstösst die verticale Schwerlinie die Unterlage? — (Nein; die verticale Schwerlinie trifft den Boden in der Symmetrieebene des Cylinders 5·5 cm ausserhalb der Basis; das Resultat ist rasch constructiv zu finden.) [Aufg. 1 und 2 sind in anderer Auffassung in Müller-Erzbach's, 3, 4, 5 und 7 in Daurer's und 6 in Budde's Sammlung enthalten.]

§ 30. **Einfache Maschinen.** Menschliche Kräfte reichen oft nicht aus, um schwere Körper fortzuwälzen oder zu heben oder grosse Widerstände zu überwinden. Man verwendet deshalb besondere Vorrichtungen (Hebebäume, Rollen, Winden, Keile), welche menschliche Kraft zu ersparen, ihr eine bequemere Richtung zu geben oder sie durch andere Kräfte ganz zu ersetzen gestatten. Alle solche Vorrichtungen heissen Maschinen; sie haben das gemeinsame Merkmal, eine Kraft auf einen Punkt wirken zu lassen, welcher nicht in der Richtung der Kraft liegt. Alle Maschinen lassen sich in sechs einfache Maschinen zerlegen, von denen wieder je drei eine Gruppe bilden: Hebel, Rolle, Wellrad sind um eine Achse drehbare Körper, schiefe Ebene, Keil und Schraube vermitteln oder verhindern Bewegungen auf festen Flächen. Bei jeder Maschine kommen zwei Arten von Kräften vor; jene Kraft, welche die beabsichtigte Bewegung hervorruft, heisst bewegende Kraft oder kurz Kraft; und jene, welche dieser Bewegung Widerstand leistet, Widerstandskraft oder Last. Im Folgenden sollen die Grundgesetze der einfachen Maschinen aus dem Principe der Erhaltung der Energie entwickelt werden[1]).

1. Der Hebel. (Archimedes 220 v. Chr.) Der Hebel ist eine

1) Siehe Reis Lehrbuch der Physik und andere Werke der theoretischen Physik, ferner meine Schrift über das Energieprincip in der Dynamik. 1884.

unbiegsame Stange, welche um eine fixe Achse drehbar ist und an der mindestens zwei Kräfte wirken. Wir betrachten den einfachsten Fall des Hebels: an einer gewichtslosen Linie (mathematischen Hebel) sei eine Last durch eine Kraft zu heben oder in Ruhe zu halten. Zur Ableitung der Relation zwischen Kraft P und Last Q dienen uns gleichzeitig Fig. 23 und 24; die erstere zeigt die Drehungsachse C zwischen beiden wirkenden Kräften und stellt einen zweiarmigen Hebel vor; die letztere enthält beide Kräfte auf derselben Seite der Drehungsachse und heisst einarmiger Hebel. Wir ertheilen den

Fig. 23.

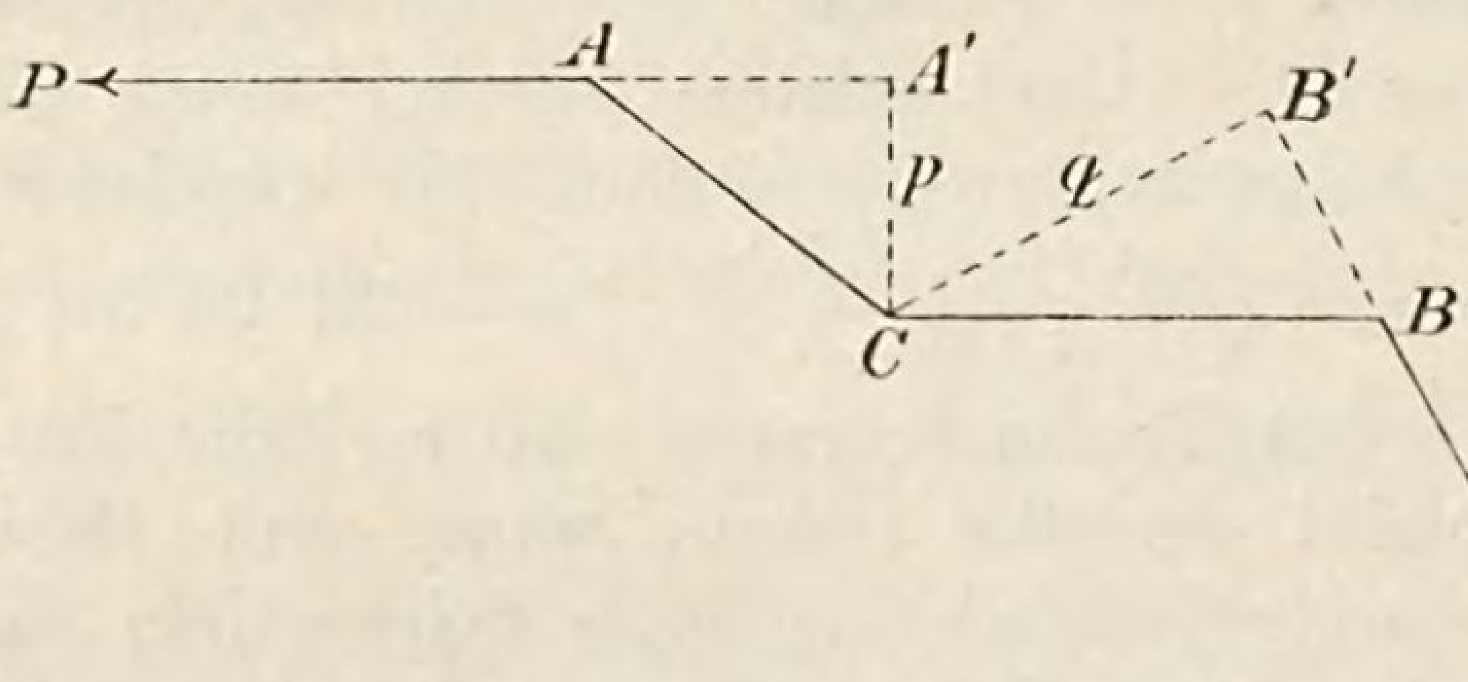
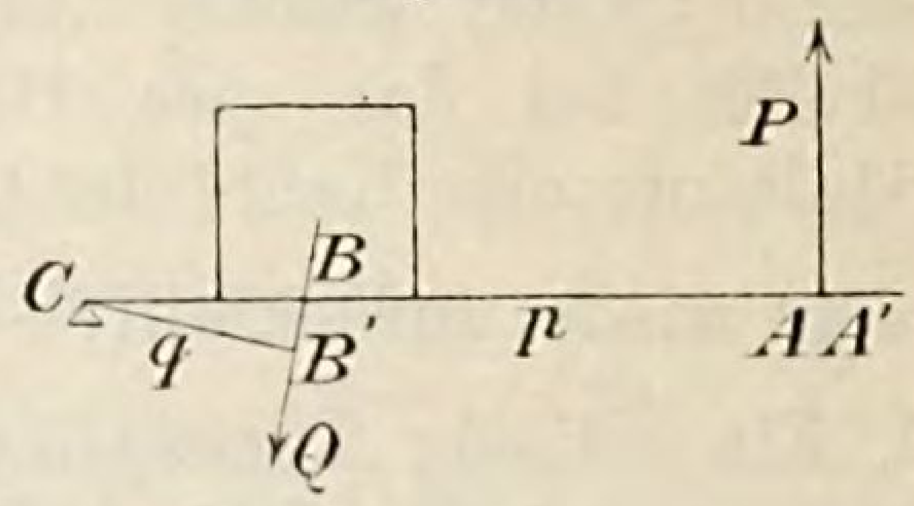


Fig. 24.



Systemen eine kleine Drehung φ um die Achse C; ist dabei die algebraische Summe der von den Kräften geleisteten Arbeiten Null, so gewinnt kein System Energie und die Kräfte halten einander das Gleichgewicht. Sind diesfalls die von C auf die Kraftrichtungen gefällten Perpendikel, beziehungsweise Kraft- und Lastarm genannt, p und q, so hat man

$$P \cdot p \cdot \varphi - Q \cdot q \cdot \varphi = 0$$

oder

$$P : Q = q : p.$$

Es gilt also ganz allgemein das Gesetz: Am Hebel herrscht Gleichgewicht, wenn Kraft und Last sich umgekehrt verhalten wie die beiden Hebelarme.

Mit Bezug auf das Intensitätsgesetz von Helm lassen sich die Arbeiten von Kraft und Last in die Intensitätsfactoren (Wirkungsgrade) $P \cdot p$ und $Q \cdot q$ und in den gemeinschaftlichen Extensitätsfactor (Wirkungsraum) φ zerlegen. Die ersteren stellen die Drehungsmomente oder auch Kräfte in der Entfernung Eins vom Drehungspunkte dar; ihre Gleichheit bedingt Gleichgewicht[1]).

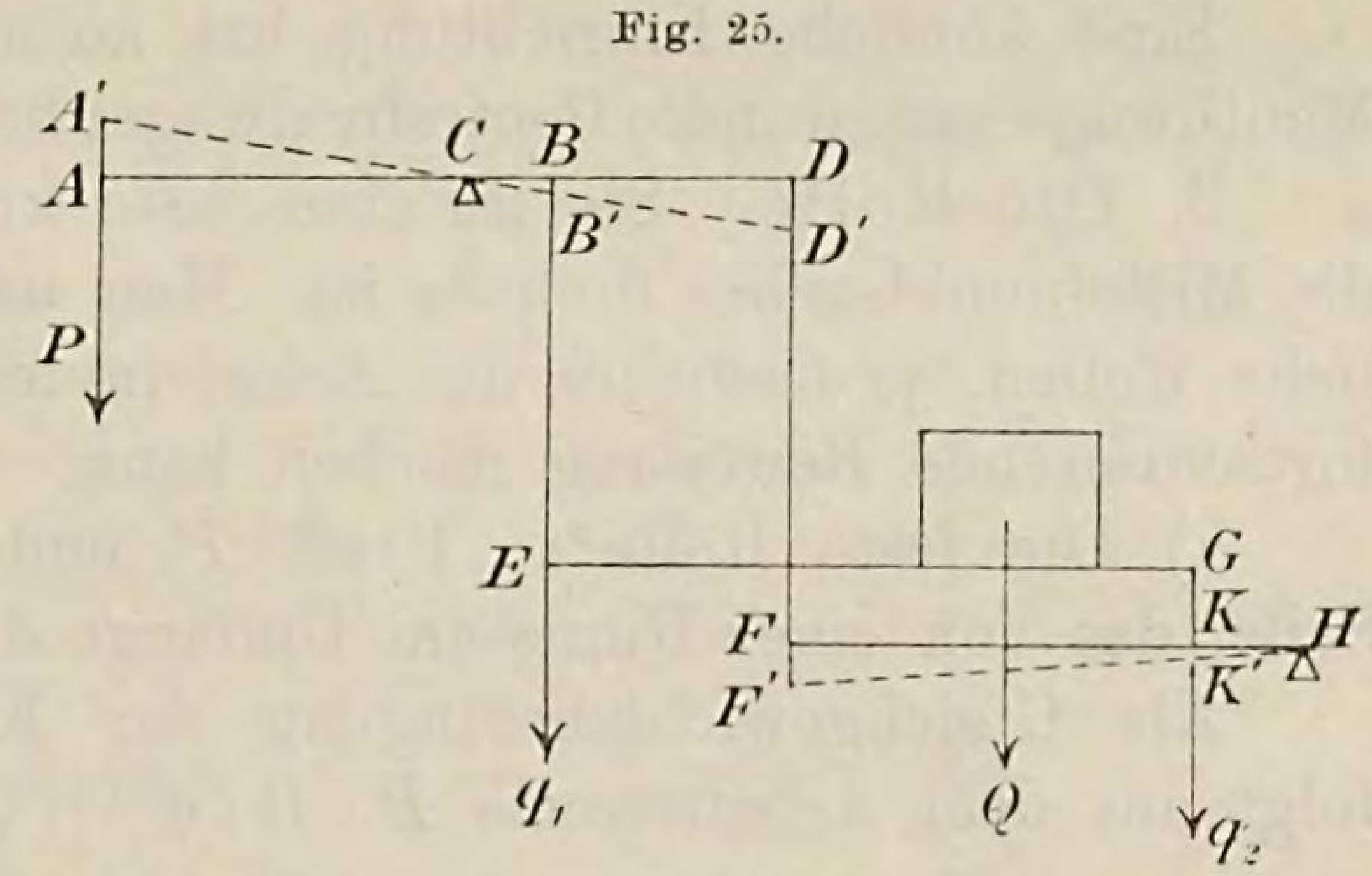
Anwendungen findet der Hebel als Zange, Scheere, Schubkarren, Hebbaum, Brechstange, Schreib- und Zeichenwerkzeuge, Thürklinken, Klingelhaken, als Leit-, Brems- und Bewegungshebel an Maschinen etc. Die willkürlich zu brauchenden Gliedmassen der Menschen und Thiere zur Bewegung sind meist einarmige Hebel. Die Hebel selbst werden

1) Siehe meine Abhdlg.: Zur Übereinstimmung der phys. Arbeitsgesetze. Realschlztsch. Wien. 1892.

von den Knochen gebildet, die in den kugel- oder walzenförmigen Gelenken ihre Stützpunkte finden; die Kraft ist als potentielle Energie in den Bewegungselementen der gestreiften Muskelfasern aufgespeichert. Das Ende eines Muskels, von Sehnen gebildet, ist meist in der Nähe des Gelenkes an den Knochen festgewachsen, so dass die Muskelkraft stets grösser als die zu bewältigende Last ist, der Weg dafür aber nur gering zu sein braucht. Je nach dem Zwecke, dem die Muskeln dienen, heissen sie Strecker, Beuger, Krümmer etc.

2. Die Decimalwage. Der Hebel findet sowohl als gleicharmiger wie als ungleicharmiger Hebel weitere Anwendung zu Wagen: Apothekerwage, Krämerwage, römische Schnellwage, Zeigerwage. Die Decimalwage ist eine Zusammenstellung von mehreren Hebeln, und für diese wollen wir die Gleichgewichtsbedingungen ableiten. Dieselbe besteht aus dem Schwanenhalse AD, einem zweiarmigen Hebel, an dessen einem Arme die Kraft P wirkt und dessen anderer Arm durch zwei Zugstangen in Verbindung steht mit der Brücke EG und der Gabel FH, einem einarmigen Hebel. Die Brücke dient zur Aufnahme der Last Q. Für den Gleichgewichtszustand des Systemes muss die algebraische Summe der Arbeiten bei einer geringen Verschiebung Null sein. Die Verschiebung werde hervorgerufen durch die Drehung des Schwanenhalses um den ausserordentlich kleinen Winkel φ; die Wege in der Richtung der Kraft und der Zugstangen fallen dann mit den entsprechenden Kreisbögen zusammen. Die Arbeit der Kraft P ist also $P \cdot AA' = P \cdot AC \cdot \varphi$. Für die Last Q setzen wir zwei Componenten $q_1 q_2$, die respective in E und G angreifen; die Arbeiten der Componenten sind zusammengenommen gleich der Arbeit der Last. Der Weg des Angriffspunktes der Kraft q_1 ist $BB' = BC \cdot \varphi$. Der Weg KK' der Kraft q_2 ergibt sich leicht aus der Bedingung, dass $FF' = DD' = CD \cdot \varphi$ und dass

Fig. 25.



$$FH : KH = FF' : KK';$$

daraus wird

$$KK' = \frac{KH}{FH} FF' = \frac{KH}{FH} CD \cdot \varphi$$

und für das Gleichgewicht muss nun

$$P \cdot AC \cdot \varphi = q_1 \cdot BC \cdot \varphi + q_2 \frac{KH}{FH} \cdot CD \cdot \varphi.$$

Hierin $q_1 = Q - q_2$ subst. gibt

$$P \cdot AC = Q \cdot BC + q_2 \left[\frac{KH}{FH} \cdot CD - BC\right].$$

Soll die Wirkung der Wage von der Lage der Last Q unabhängig sein, so muss das Glied mit q_2 verschwinden[1]); also muss

$$\frac{KH}{FH} = \frac{BC}{CD};$$

darnach wird

$$P \cdot AC = Q \cdot BC.$$

Bei der Decimalwage ist nun $AC = 10 BC$, so dass $P = \frac{1}{10} Q$ wird; d. h. die der Last das Gleichgewicht haltenden Gewichte betragen $\frac{1}{10}$ der Last.

Eine ähnliche Einrichtung hat auch die als Brückenwage oder Mauthwage angewandte Centesimalwage; bei derselben ist $AC = 100 \cdot BC$.

3. Die Rolle. Sie ist eine feste kreisförmige Scheibe, die um die Mittelpunktsachse drehbar ist. Man unterscheidet fixe und bewegliche Rollen, je nachdem die Achse in festen Lagern liegt, oder eine fortschreitende Bewegung machen kann.

a) Die feste Rolle[2]). Kraft P und Last Q wirken an einem Seile, das von einer Rinne am Umfange der Rolle aufgenommen wird.

Als Gleichgewichtsbedingung der Kräfte bei der festen Rolle folgt aus dem Arbeitswerte $P \cdot R \cdot \varphi - Q \cdot R \cdot \varphi = 0$ die Gleichung

$$P = Q,$$

d. h. Kraft und Last müssen einander gleich sein. Dass diese Bedingung richtig ist, erkennen wir sofort aus der Figur, wenn wir die Rolle als gleicharmigen Hebel auffassen.

Kraft und Last sind hier unmittelbar die Wirkungsgrade der Energie; die Wirkungsräume sind die gleichen Längen $R \cdot \varphi$.

b) Die bewegliche Rolle. Es soll die Gleichgewichtsbedingung abgeleitet werden.

Die Rolle liegt in einem Seile; ein Ende F dieses Seiles ist befestigt, am andern Ende wirkt die Kraft P; die Last Q greift in der Scheere oder dem Kloben an, in welchem die Achse der Rolle liegt. Im Gleichgewichtszustande des Systemes muss die bei einer kleinen Verschiebung von der Kraft geleistete Arbeit vollständig zur Hebung der Last verbraucht werden. Die Verschiebung, welche wir durch die geringe Bewegung in der Kraftrichtung P (Fig. 26) vornehmen, entspricht einer kleinen Drehung der Rolle von φ^0 um den Punkt C. Die Wege der Kräfte P und Q sind dann respective $\overline{CD} \cdot \varphi$ und

1) Vgl. Dr. K. Zahradniček in d. Zeitsch. f. d. phys. u. chem. Unt. 1894. S. 290.

2) Das Bewegungsgesetz siehe in § 25, Aufg. 4.

$\overline{CE} \cdot \varphi$, wenn CD und CE die von C auf die Kraftrichtungen gefällten Normalen sind. Daher wird die Gleichgewichtsbedingung

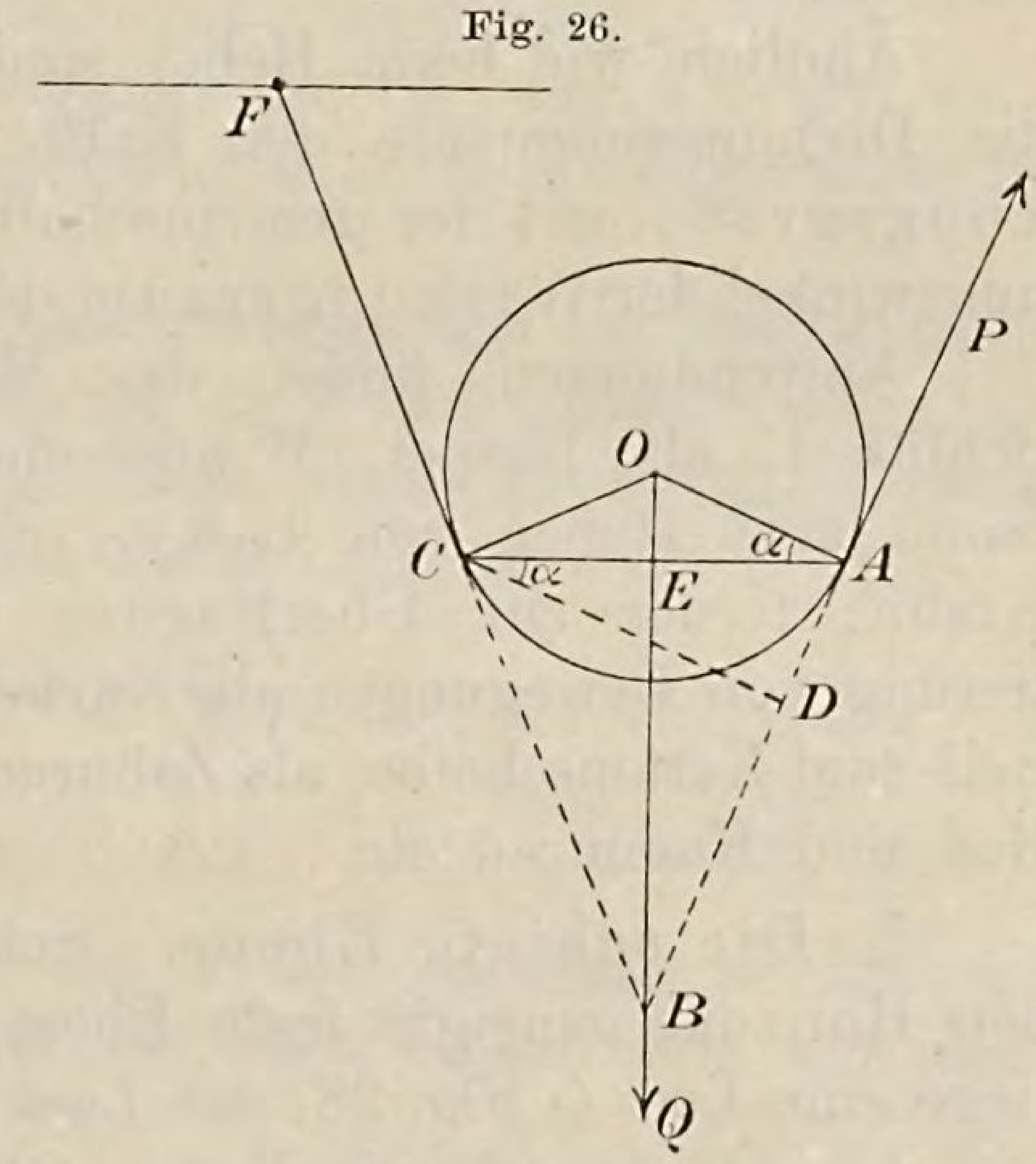
$$P \cdot CD \cdot \varphi = Q \cdot CE \cdot \varphi$$

oder

$$P : Q = CE : CD;$$

die Richtigkeit dieser Bedingungsgleichung ergibt sich direct aus der Figur, wenn man die bewegliche Rolle als einen einarmigen Hebel mit dem Stützpunkte in C auffasst. Das Verhältnis der Kraftarme lässt sich zweckmässiger ausdrücken wie folgt. Nach der Figur ist $AO \parallel CD$ und somit

Fig. 26.



$$\sphericalangle ACD = CAO = \alpha,$$

also auch

$$CE = AE = AO \cos \alpha$$

und

$$CD = AC \cos \alpha;$$

durch Division folgt

$$CE : CD = AO : AC$$

und darnach die Gleichgewichtsbedingung

$$P : Q = AO : AC,$$

d. h. an der beweglichen Rolle herrscht Gleichgewicht, wenn sich Kraft zur Last wie der Radius der Rolle zu der von der Schnur umspannten Sehne verhält.

Das Verhältnis der Kräfte in Bezug auf Kraftersparnis gestaltet sich am günstigsten, wenn AC ein Durchmesser der Rolle wird; die beiden Schnurtheile laufen dann parallel und es wird

$$P = \frac{1}{2} Q.$$

Anwendung findet die bewegliche Rolle zum Lastentransport, sowohl als solche, wie auch in Rollenverbindungen: dem gewöhnlichen Flaschenzug, dem Potenzflaschenzug und dem Differentialflaschenzug.

4. Das Wellrad. Dasselbe besteht aus einer cylindrischen Walze, der Welle, und einer damit fest verbundenen Kreisscheibe, dem Rade; das Rad kann durch eine oder mehrere Stangen, Kurbel und Speichen genannt, vertreten sein. Am Umfange des Rades Fig. 27 wirkt die Kraft P, am Umfange der Welle die Last Q. Bei einer Drehung des Systemes im Gleichgewichtszustande werden die Wege der Kräfte beziehungsweise an die Umfänge der Kreise auf- und ab-

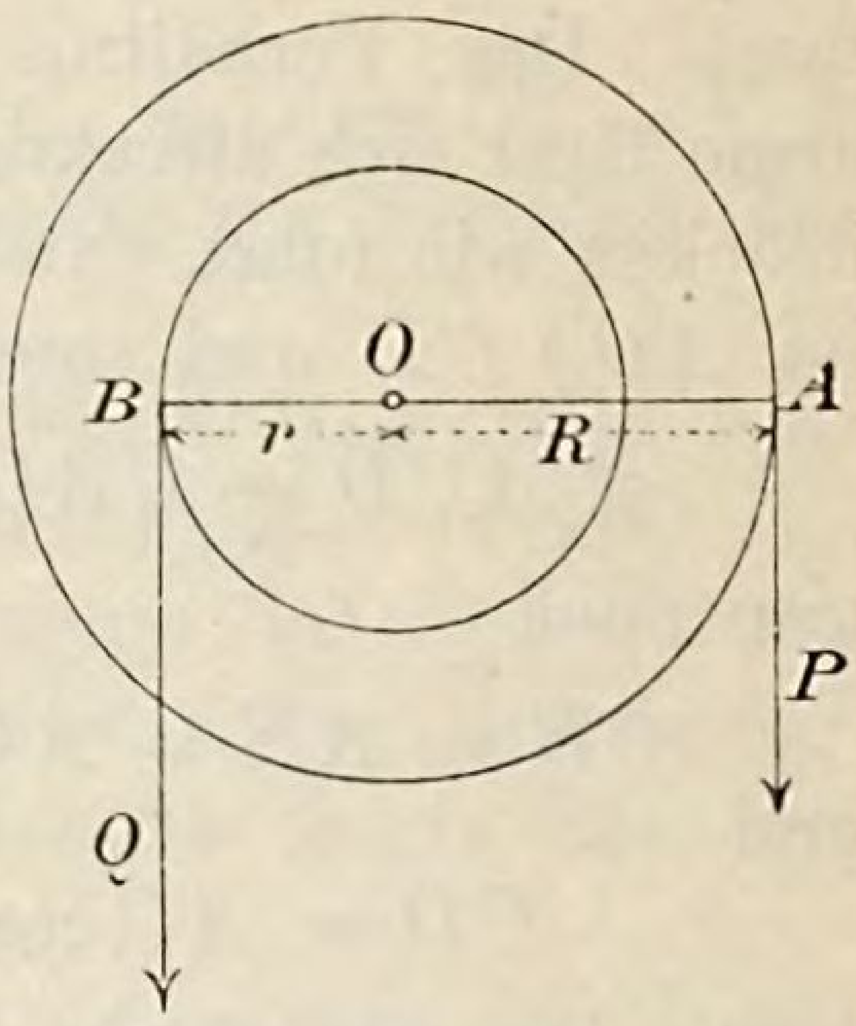
gewickelt; ist der Drehungswinkel φ, so erhalten wir sofort als Gleichgewichtsbedingungen

$$(P \cdot R \cdot \varphi - Q \cdot r \cdot \varphi) = 0,$$

$$P : Q = r : R,$$

d. h. es herrscht Gleichgewicht, wenn sich Kraft zur Last verhält, wie der Radius der Welle zum Radius des Rades. Auch dieses Gesetz hätte sich als Hebelgesetz direct aus der Figur lesen lassen.

Fig. 27.

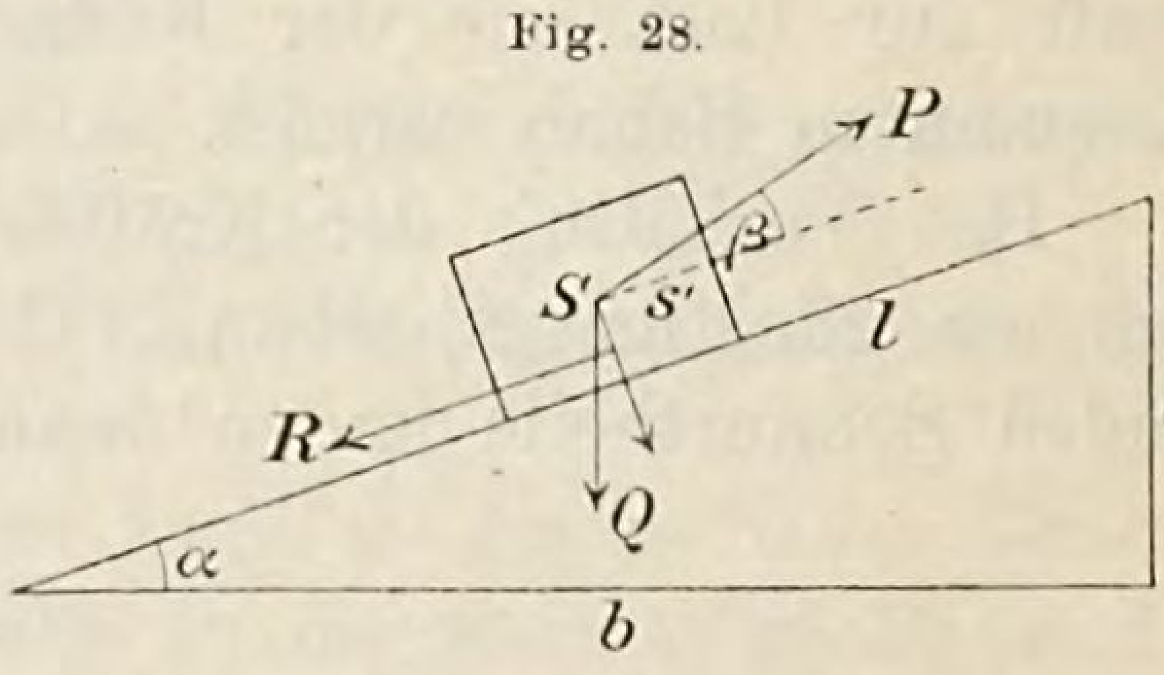


Ähnlich wie beim Hebel sind auch hier die Drehungsmomente der Kräfte die Wirkungsgrade und der gemeinschaftliche Drehungswinkel der Wirkungsraum der Energien.

Anwendungen findet das Wellrad als Schlüssel, als Haspel, Winde und Tummelbaum zum Heben von Lasten, ebenso beim Krahn; ferner zur Übertragung und Regulierung von Bewegungen als Kurbel, Riemen-, Seil- und Kettenscheibe, als Zahnrad, konisches Rad und Kammrad etc.

5. Die schiefe Ebene. Schiefe Ebene nennen wir eine gegen den Horizont geneigte feste Ebene. (Vgl. § 5 und 6.) Auf derselben liege eine Last Q Fig. 28; der Last soll mit Rücksicht auf die Reibung von irgend einer Kraft P das Gleichgewicht gehalten werden. Die Kraftrichtung P schliesse mit der Länge l der schiefen Ebene den Winkel β ein, und der Elevationswinkel der schiefen Ebene sei α. Bei Verschiebung der Last um die Strecke s ist die von der Kraft geleistete Arbeit

Fig. 28.



$$P \cdot s \cdot \cos(Ps) = P \cdot s \cdot \cos\beta;$$

die von der Last Q und durch die Reibung R consumierten Arbeiten sind beziehungsweise $Q \cdot s \cdot \cos(Qs) = Q \cdot s \cdot \sin\alpha$ und $R \cdot s$; die Reibung selbst ist dem Drucke auf der schiefen Ebene proportional, also wenn der Reibungscoefficient ϱ ist,

$$R = \varrho\,(Q \cdot \cos\alpha - P \cdot \sin\beta),$$

oder nach Einführung des Reibungswinkels φ

$$R = \operatorname{tg}\varphi \cdot (Q \cos\alpha - P \cdot \sin\beta).$$

Soll durch die Arbeiten keine Bewegung veranlasst werden, so muss die algebraische Summe derselben gleich Null sein:

$$P \cdot s \cdot \cos\beta - Q \cdot s \cdot \sin\alpha - (Q\cos\alpha - P\sin\beta) \cdot s \cdot \operatorname{tg}\varphi = 0$$

oder

$$P(\cos\beta + \sin\beta \operatorname{tg}\varphi) = Q(\sin\alpha + \cos\alpha \operatorname{tg}\varphi).$$

Nach leichter Umformung wird

$$P = Q \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}.$$

Darnach wird die Construction behufs Lastentransport am günstigsten sein, wenn $\sphericalangle \beta$ möglichst nahe gleich dem Reibungswinkel φ, und die Neigung der schiefen Ebene möglichst gering sind.

Die Wirkungsgrade der Energien sind $P \cdot \cos(\beta - \varphi)/\cos\varphi$ und $Q\sin(\alpha + \varphi)/\cos\varphi$; der gemeinschaftliche Wirkungsraum ist der Weg s.

In praktischen Fällen, wie bei Lastentransporten auf Bergstrassen, Schrottleitern, Auffahrten und Rampen ist $\beta = 0$, indem die Kraft parallel mit der Länge der schiefen Ebene wirkt; lässt man diesfalls die Reibung unberücksichtigt, nimmt als $\varphi = 0$, so wird

$$P = Q\sin\alpha = Q\frac{h}{l}$$

oder

$$P : Q = h : l, \text{ d. h.:}$$

Wirkt die Kraft zur Länge der Ebene parallel, so herrscht Gleichgewicht, wenn die Kraft sich zur Last verhält wie die Höhe zur Länge der schiefen Ebene.

In andern Fällen wird auch $\beta = \alpha$, die Kraft wirkt parallel zur Basis der schiefen Ebene; dann gilt bei Vernachlässigung der Reibung

$$P = Q \cdot \operatorname{tg}\alpha = Q \cdot \frac{h}{b}$$

oder

$$P : Q = h : b, \text{ d. h.:}$$

Im Gleichgewichtszustande verhält sich Kraft zur Last wie Höhe zur Basis. Anwendung findet dieses Gesetz bei der Schraube.

Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung enthält auch den Fall des Lastentransportes auf horizontaler Ebene; diesfalls ist $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ und es muss sein

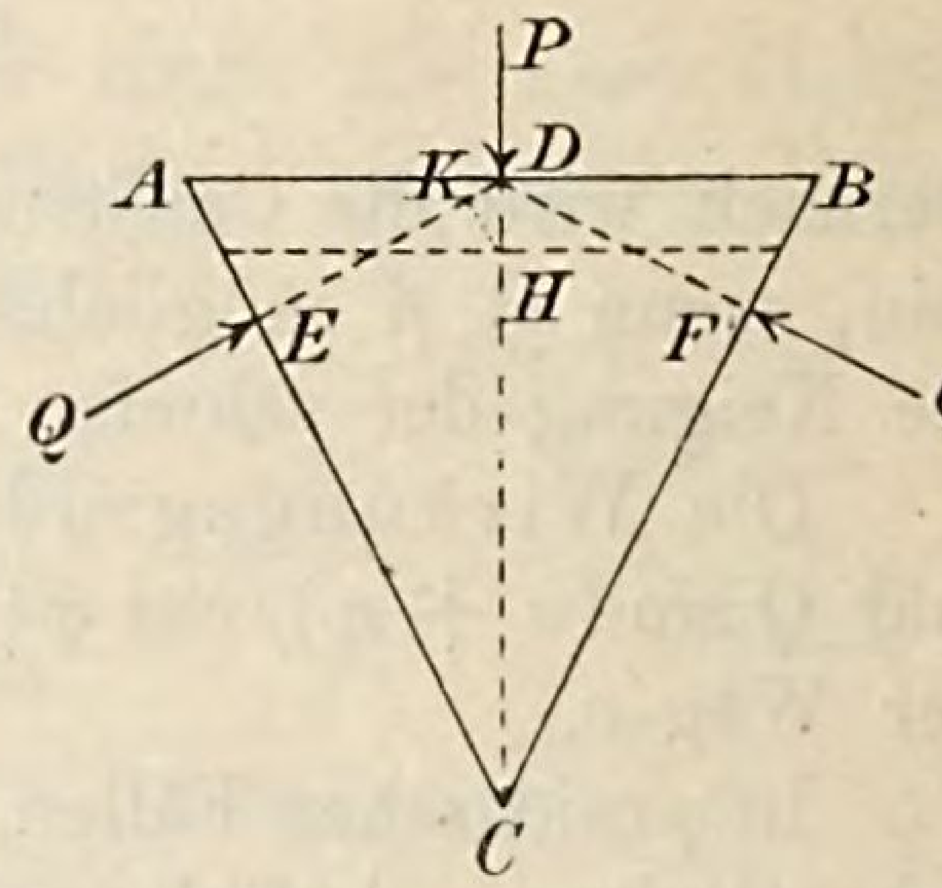
$$P = Q\operatorname{tg}\varphi,$$

d. h. die Kraft hat in diesem Falle lediglich die Reibung zu bewältigen. Die Bewegung einer rollenden Kugel (eines Cylinders) behandelt Aufg. 6 im § 25.

6. Der Keil. Ein Keil ist ein dreiseitiger prismatischer Körper, der einen besonders spitzigen Kantenwinkel besitzt. Diesem Kantenwinkel gegenüber liegt der Rücken des Keiles; die den Winkel bildenden Flächen heissen Seiten. Der Keil dient dazu, um gegeneinander wirkende Kräfte als Lasten oder Widerstände zu bewältigen.

Zur Ableitung der Gleichgewichtsbedingung sei in Fig. 29 P die gegen den Rücken wirkende Kraft und Q, Q die gegen die Seiten drückenden Widerstände. Treibt man den Keil um das Höhenelement $dh = HD$ zwischen die Lasten ein, so ist die Arbeit der Kraft $P \cdot dh$ positiv und die Arbeiten der Q nämlich $Q \cdot KD$ negativ; die Summe aller Arbeiten muss Null sein, also auch

Fig. 29.



$$P \cdot HD = 2Q \cdot KD$$

oder, da

$$\triangle HDK \sim ADC,$$

auch

$$P : Q = AB : AC, \text{ d. h.:}$$

Beim Keile findet Gleichgewicht statt, wenn sich die Kraft zur Last verhält, wie der Rücken zur Seite des Keiles.

Anwendung findet der Keil zu Schneidewerkzeugen als Messer, Scheere, Nadel, Meissel, Beil etc.

7. Die Schraube. Eine Linie auf einem Cylindermantel, welche in allen Elementen gegen die Erzeugenden gleich geneigt iet, heisst Schraubenlinie. Die Entfernung zweier auf einander folgender Schnittpunkte einer Erzeugenden und der Schraubenlinie heisst Ganghöhe. Ein Schraubengewinde können wir uns entstanden denken durch Aufwickelung eines vierseitig oder dreiseitig prismatischen Stabes längs der Schraubenlinie; der Cylinder mit dem Gewinde heisst dann Schraubenspindel mit flachem, respective scharfem Gewinde. Die Schraubenspindel passt genau in die Schraubenmutter. Spindel und Mutter bilden den Schraubensatz. Die Schraube dient dazu, um Körper zu heben, einen Druck oder Zug auszuüben etc. Wir denken uns behufs Ableitung der Gleichgewichtsbedingung an der eben charakterisierten cylindrischen Schraube die Schraubenmutter fest und an der Spindel ein Gewicht Q als Last und am Umfange derselben die Kraft P wirken. Ist die Ganghöhe h und der Radius des Spindelumfanges r, so ergibt sich für eine Umdrehung der Spindel die Arbeit der Kraft $P \cdot 2r\pi$ und die von der Last consumierte Arbeit $Q \cdot h$; fürs Gleichgewicht erfolgt kein Energiezuwachs und es müssen die beiden Arbeiten gleich gross sein; also

$$P \cdot 2r\pi = Q \cdot h$$

oder

$$P : Q = h : 2r\pi, \text{ d. h.:}$$

Bei der Schraube herrscht Gleichgewicht, wenn sich Kraft zur Last verhält wie die Ganghöhe zum Umfange der Schraubenspindel.

In der hier gedachten Form functioniert die Schraube als eine schiefe Ebene, das Gleichgewichtsgesetz entspricht auch der Gleichgewichtsbedingung auf der schiefen Ebene, wenn die Kraft parallel

der Bahn genommen wird. Je nach der Bewegung der Spindel wird die Last als Zug oder Druck auftreten. Denkt man sich die Spindel fest und die Schraubenmutter bewegt, so gilt das obige Gesetz für diese.

Die Schraube findet Anwendung als Schraubengewinde zu Pressen und zur Befestigung von Maschinentheilen, zu Bohrern, Korkziehern, als Schiffsschraube, Mikrometerschraube etc.

Aufg. 1. Bei einer unrichtigen Wage wird dadurch Gleichgewicht hergestellt, dass man in eine Wagschale das unbekannte Gewicht x eines Körpers und in die andere das bekannte Gewicht $P = 544{\cdot}994$ g legt; nach einer Verwechselung beider Körper muss zu P noch das Gewicht $p = 0{\cdot}012$ g hinzugelegt werden, um wieder Gleichgewicht herzustellen. Wie gross ist x? Wägungsmethode nach Gauss. —

$$(x = \sqrt{P(P+p)} \doteq \frac{1}{2}(2P+p) = 545 \text{ g.})$$

2. Eine Wage hat die Wagebalkenarme l; ihr Gewicht Q greift im Schwerpunkt an, der sich λ Längeneinheiten unterhalb der Drehungsachse befindet. Zu der beiderseitigen Belastung P wird auf einer Seite noch das Übergewicht p hinzugegeben; wie gross ist der Ausschlagswinkel und wodurch kann derselbe vergrössert werden? — (Wenn die Drehungsachse in der Mitte des Wagebalkens liegt, so ist $\operatorname{tg} \alpha = p \cdot l / Q\lambda$. Wenn die vom Drehungsmittelpunkte zu den Angriffspunkten der Kräfte P gezogenen Geraden l mit dem Wagebalken die $\sphericalangle \beta$ bilden, so ist

$$\operatorname{tg} \alpha = p \cdot l \cdot \cos \beta / [(2P+p) l \sin \beta + Q\lambda].$$

Bedingungen der Empfindlichkeit.) **3.** Bei einer gemeinen Wage betrage die Länge jedes der beiden Arme $l = 40$ cm, der Abstand des Schwerpunktes vom Unterstützungspunkte $d = 2$ cm, das Gewicht des Wagebalkens und der beiden Schalen zusammen $Q = 250$ g. Welches Übergewicht muss man in die eine Schale legen, um einen Ausschlag $\alpha = 1^0$ zu bewirken? — ($p = 0{\cdot}2182$ g.) **4.** Das laufende Meter eines gleichförmigen Stammes wiegt $n = 2$ kg. Der Stamm wird durch ein an einem Ende angehängtes Gewicht von $m = 24$ kg bei einem Unterstützungspunkte, welcher $a = 5$ m vom anderen Ende entfernt ist, im Gleichgewichte gehalten. Wie lang ist der Stamm? — (6 m.) **5.** Welchen Widerstand setzt eine Nuss dem Zerdrücken entgegen, wenn jeder Schenkel eines aus zwei einarmigen Hebeln bestehenden Nussknackers $a = 14$ cm lang ist, die Nuss $b = 2{\cdot}5$ cm vor dem Gelenk liegt und an jedem Schenkel eine Kraft $p = 9$ kg wirkt? — (100·8 kg.) **6.** Ein Mann schiebt eine Stange von 2 m Länge unter einen Stein und stützt sie in einem Abstande von 20 cm von der Steinmitte; welche Last kann er heben, wenn er einen Druck von 60 kg ausüben kann? — (540 kg.) **7.** Die Erde wiegt ungefähr 6 Quadrill. kg; wenn Archimedes seinen festen Punkt auf dem Monde (51800 Ml.) hätte und von der Sonne (20 Mill. Ml.) aus die Erde mit einem Hebel aus ihren Angeln zu heben versuchen wollte, welche Kraft müsste er aufwenden? — (15 600 Trill. kg.) **8.** Der zweiarmige Hebel eines Ziehbrunnens sei durch die Achse im Verhältnisse 1 : 4

getheilt und für sich im Gleichgewichte. In welcher Stärke Q überträgt sich ein auf den längeren Arm ausgeübter verticaler Zug $P = 15$ kg auf die am anderen Ende befestigte Stange des Saugkolbens? — ($Q = 60$ kg.) **9.** In einem Dampfkessel soll der Dampfdruck bis zu 9 Atmosphären anwachsen. Das Sicherheitsventil wirkt an einem 4 cm langen Hebelarm und hat einen Querschnitt von 7 cm², das Gewicht des Hebels beträgt 1·2 kg und der Schwerpunkt desselben ist vom Drehpunkte 29 cm entfernt; wo ist dieser Hebel durch ein Gewicht von 6 kg zu belasten, damit das Ventil bei zu starkem Druck sich öffnet? Der Druck einer Atmosphäre = 1·03 kg auf 1 cm². — (37·46 cm.) **10.** Wie viel vermag ein Mann mittelst einer beweglichen Rolle, an der das Seil in parallelen Richtungen zu- und abläuft, zu heben, wenn er ohne Maschine einen Zug von 90 kg auszuüben imstande ist? — (180 kg.) **11.** Welche Seilspannung P ist erforderlich, um eine an der Achse mit 100 kg belastete bewegliche Rolle im Gleichgewichte zu erhalten, wenn diese mit dem sechsten Theile der Peripherie auf dem Seile ruht? — ($P = 100$ kg.) **12.** Ein Haspel, dessen Welle im Durchmesser 2 dm misst, habe am Seile 124 kg zu tragen; welcher Druck gegen die 4 dm lange Kurbel hält dieser Last Gleichgewicht? — (31 kg.) **13.** Ein Pferd drehe einen Göpel, indem es in einer Kreisbahn von 18 m Länge herumgeht und fortwährend einen Zug von 80 kg ausübt. Man ermittle die Spannung Q, welche das Seil, das sich dabei auf die Welle von 75 cm Umfang aufwickelt, erfährt. — (1920 kg.) **14.** Mittelst eines Wellrades werde in einem Behälter vom Gewichte q eine Last Q um die Höhe $h = (h_1 - h_0)$ gehoben; beispielsweise wäre beim Wasserschöpfen q das Gewicht des Eimers, Q das zu hebende Wassergewicht, h_0 die Tiefe des Brunnens und h die Hubhöhe. Am oberen Ende des Weges werde der Behälter entleert, dann um die Höhe h gesenkt, um wieder mit einer Last Q gefüllt und gehoben zu werden. Wie gross ist die geleistete Arbeit nach einer Hebung und Senkung, und wie lässt sich dieselbe bildlich darstellen? — Kreisprocess.

Fig. 30.

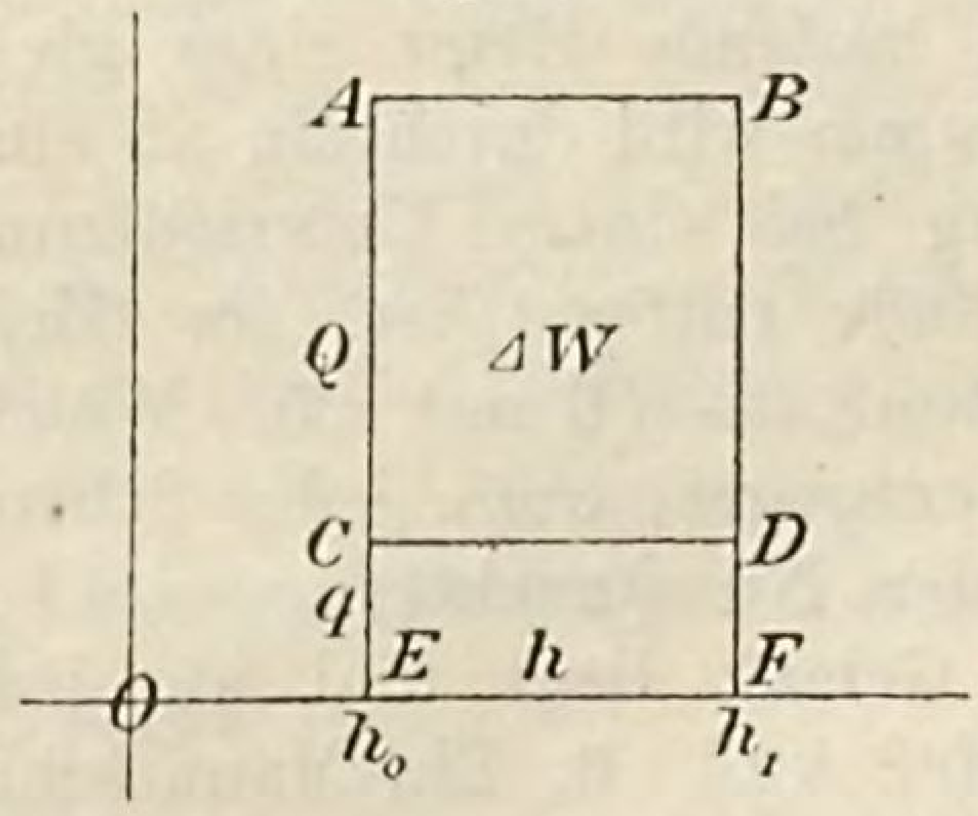
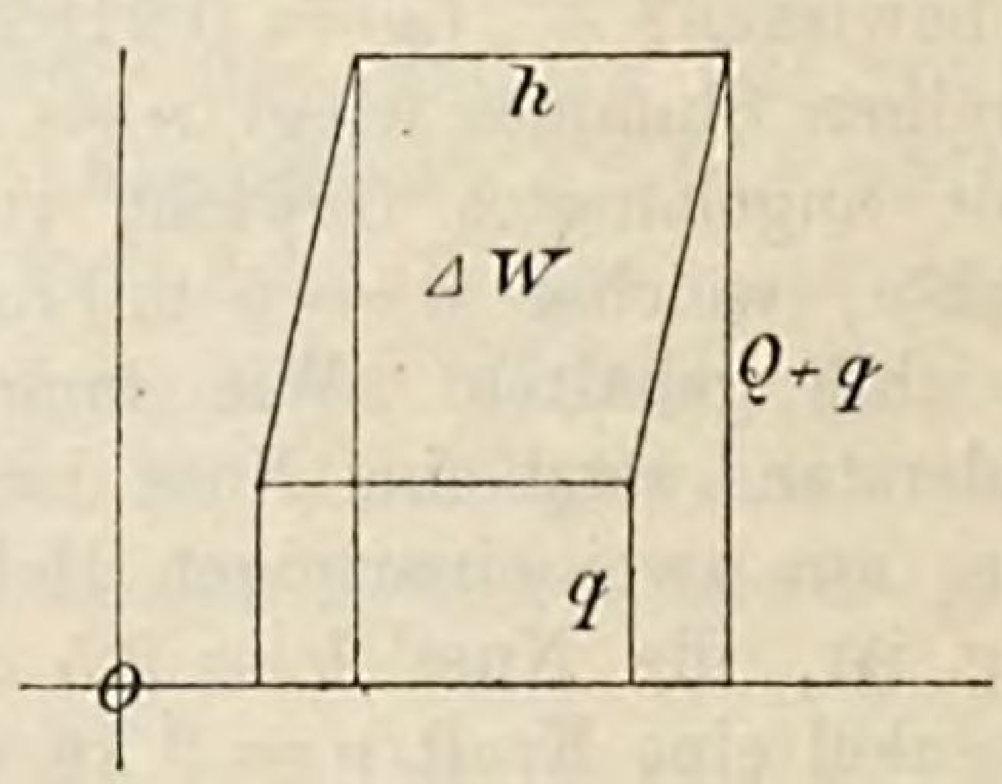


Fig. 31.



(Wenn man die Gewichte als Ordinaten und die Wege als Abscissen aufträgt, so ist nach Fig. 30 die Arbeit der Hebung

$$W_1 = (Q + q)h = \text{Fl.}\, ABEF,$$

und die Arbeit bei der Senkung $W_2 = qh = \text{Fl.}\, CDEF$. Die geleistete nutzbare Arbeit ist demnach $\Delta W = Q \cdot h = \text{Fl.}\, ABCD$.) **15.** Welche Änderung erfährt das Bild für die Arbeit, wenn berücksichtigt wird, dass

die Last Q bei der Füllung etwa durch Neigung des Behälters allmählig anwächst und dabei der Schwerpunkt steigt, und dass bei der Entleerung Q allmählig abnimmt und der Schwerpunkt fällt? (Siehe Fig. 31.) **16.** Wie gross ist das Güteverhältnis oder der ökonomische Coefficient der Maschine, d. i. das Verhältnis der Nutzarbeit zu der überhaupt aufgewandten Arbeit? — ($\alpha = \Delta W / W_1 = Q/(Q + q)$.) **17.** Aus dem Güteverhältnis der Maschine in der Form $(W_1 - W_2)/W_1 = (Q_1 - Q_2)/Q_1$ ist das Verhältnis jeder Arbeit W zur zugehörigen Intensität Q zu bestimmen; zu zeigen, dass dieses Verhältnis unabhängig ist von dem Stoffe der Maschine, und dass beim Kreisprocess die algebraische Summe der betreffenden Verhältniszahlen gleich Null ist. — (Zunächst folgt

$$W_1 / Q_1 = W_2 / Q_2 = h,$$

d. i. die Extensität oder der Wirkungsraum; ferner ist beim Kreisprocess die algebraische Summe der Höhen gleich Null.) **18.** Zwei Pferde ziehen einen 28 Zollcentner schweren Wagen auf einer Strasse mit der Steigung 1 : 70 bergan; welche Componente der Schwerkraft haben sie zu überwinden? — (20 kg.) **19.** Eine Wagenbremse werde durch eine Schraube angezogen, deren Gewindhöhe 12 mm und deren Schlüssel (Kurbel) 3 dm misst; welchen Zug übt die Schraube auf die Bremse aus, wenn der Schlüssel mit einer Kraft von 10 kg (abzüglich des auf die Reibung entfallenden Antheiles) angedreht wird? — (1571 kg.) **20.** Durch den mächtigen einarmigen Hebel einer Weinpresse gehe nahe dem freien Ende eine entsprechend starke Schraubenspindel vertical hindurch, die sammt der unten angebrachten Belastung 400 kg wiegt. Wie hoch müssen die Schraubengänge sein, damit ein horizontaler Druck von 6 kg gegen den 1 m langen Schlüssel genüge, um die Spindel ohne Mitwirkung der Reibung im Gleichgewichte zu erhalten? — (94 mm.) **21.** Ein Beil, dessen Schärfe 20^0 beträgt, treffe mit einer lebendigen Kraft von 10 kgm einen Pfahl, in den es 4 cm tief eindringt; wie gross war im Mittel der hiebei auf die Seitenflächen des Beiles ausgeübte Druck Q? — (719·846 kg.) **22.** Lastwelle und Getriebe eines Räderwerkes haben beziehungsweise 8, 10 und 6 cm, die drei zugehörigen Räder aber 40, 30 und 36 cm im Durchmesser; welche Kraft muss am Umfange des letztbezeichneten Rades angreifen, um einer Last von 45 kg Gleichgewicht zu halten? — (0·5 kg.) **23.** Bei einem (archimedischen) Potenzflaschenzuge seien ausser der fixen 4 (n) bewegliche Rollen vorhanden, deren letzte 192 kg (Q) zu tragen hat. Man bestimme a) unter Vernachlässigung des Gewichtes der Rollen, b) unter der Voraussetzung, dass jede Rolle 1·6 kg (q) wiegt, welche am freien Seilende wirkende Kraft P das Gleichgewicht zu erhalten vermag. (a) $P = 12\ (Q/2^n)$; b) $P = 13{\cdot}5$ kg $[(Q - q)/2^n + q]$.) **24.** Ein Flaschenzug bestehe aus einem fixen und einem beweglichen Kloben mit je 3 (n) Rollen, über die in der bekannten Weise ein dreimal zwischen den Kloben hin und her geführtes Seil läuft, das am unteren Ende des fixen Klobens befestigt ist. Man bestimme die Spannung P des Seiles, welche nöthig ist, um einer 72 kg (Q) betragenden Belastung des beweglichen Klobens Gleichgewicht zu halten, a) wenn das Gewicht des Klobens vernachlässigt wird, b) wenn dieser 1·8 kg (q) wiegt. — (Wenn das Seil von

der Kraft P um die Strecke l bewegt wird, so ist die Hubhöhe der Last Q gleich $l/2n$, weil sich die Verschiebung auf alle Theile des Seiles gleichmässig vertheilt, und daher ist

$$\text{a) } P = 12 \text{ kg} (Q/2n), \quad \text{b) } P = 12{\cdot}3 \text{ kg} ((Q+q)/2n).)$$

25. Der Differentialflaschenzug besteht aus einem Wellrade und einer beweglichen Rolle, die so verbunden sind, dass das Seil von der Welle um die bewegliche Rolle und dann um das Rad läuft; an dem vom Rade abgehenden Theile des Seiles wirkt die Kraft P, an der beweglichen Rolle hängt die Last 96 kg (Q). Die Halbmesser von Welle und Rad seien beziehungsweise 6 cm (r) und 10 cm (R). Es ist die Gleichgewichtsbedingung und daraus P mittelst des Arbeitsgesetzes zu ermitteln. — (Bei einer halben Umdrehung des Wellrades ist die Arbeit der Kraft $P \cdot R\pi$ und die Hubhöhe der Last $\frac{1}{2}(R\pi - r\pi)$; die Gleichung für die Arbeitswerte ist $P \cdot R\pi = \frac{1}{2} Q(R - r)\pi$; daraus folgt

$$P = Q(R - r)/2R = 19{\cdot}2 \text{ kg}.)$$

[Die Aufg. 3—5 sind von Budde, 6 und 7 von Reis, 8, 10—13, 18—24 von Daurer und 9 von Müller-Erzbach.]

§ 31. **Stoss unelastischer Körper.** Zu den Erscheinungen, die durch das Vorhandensein mehrerer Massen bedingt sind, gehört der Stoss zweier Körper. Derselbe kommt zustande, wenn ein Körper infolge seines Bewegungszustandes auf einen anderen, mit dem er zusammentrifft, einwirkt. Die erste ausführliche Behandlung der Stossgesetze wurde im Jahre 1668 durch die königliche Gesellschaft in London angeregt. Drei hervorragende Physiker entsprachen dem Wunsche der Gesellschaft, nämlich Wallis, Wren und Huygens; dieselben legten Arbeiten vor, welche die Stossgesetze ohne Ableitung enthielten. Wallis behandelte nur den Stoss unelastischer, Wren und Huygens nur den Stoss elastischer Körper. Die von Wren aus diesem Anlasse angestellten Versuche sind von grosser historischer Bedeutung, weil sich Newton bei Aufstellung seiner Principien auf dieselben bezieht[1]).

Wir betrachten zuerst den Stoss unelastischer Körper. Zwei Körper, deren Massen M und m seien, mögen sich mit den Geschwindigkeiten V und v in derselben Richtung bewegen und zusammentreffen; die Bewegungsrichtung falle mit der Stossrichtung, d. i. mit der Normalen des Berührungselementes beider Körper, zusammen — der Stoss sei gerade —, und die gemeinschaftliche Richtung gehe durch den Schwerpunkt des gestossenen Körpers, d. h. der Stoss sei central.

Der Versuch zeigt nun, dass die zusammenstossenden Körper

1) E. Mach: Die Mech. in ihrer Entwicklg. S. 282.

solange auf einander einwirken, bis sie eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit C erreicht haben, dass sie sich gegenseitig abplatten und ihre Deformation beibehalten. Da zur Gestaltveränderung eine Arbeit erforderlich ist, so steht im vorhinein zu erwarten, dass ein Verlust an lebendiger Kraft der fortschreitenden Bewegung stattfindet. Das Energieprincip wird daher nicht ohne weiteres zu verwenden sein.

Wir können nun zu dem Stossgesetze auf mehrfache Weise gelangen[1]). Am schnellsten führt die Bestimmung des Druckes, welchen ein Körper auf den anderen ausübt, zum Resultate. Nach Newton's drittem Bewegungsgesetze erscheint der Druck, den ein Körper **ausübt**, als **Action**, und der Druck, den der andere Körper erleidet, als **Reaction**. Es ist aber derselbe Druck, der, ebenso wie ein Gegenstand gleichzeitig für den Kaufmann als verkauft und für die Kunde als eingekauft gilt, für jeden Körper eine andere Bedeutung hat. Die Gleichheit von Action und Reaction führt unter der Voraussetzung, dass die sehr kleine Zeit der Stosswirkung τ sei, nach dem Newtonschen Kraftmasse zu der Gleichung

$$M \frac{V - C}{\tau} = - m \frac{v - C}{\tau}.$$

Nach **Mach** (a. a. O. S. 202 ff.) ist dieses Gegenwirkungsprincip auch im **Massenbegriff** enthalten, wenn die **Massen** mit den **Beschleunigungen**, die sie durch ihre gegenseitige Einwirkung erzeugen, gemessen werden. Nach dieser Begriffserklärung besteht die Proportion

$$M : m = (C - v) : (V - C),$$

die mit der vorhergehenden Gleichung übereinstimmt.

Nun folgt leicht

$$M \cdot V + m \cdot v = (M + m) \cdot C,$$

d. h. die Summe der Bewegungsgrössen beider Körper vor dem Stosse ist gleich den Bewegungsgrössen nach dem Stosse. Und für die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stosse erhält man den gesuchten Wert

$$C = \frac{M \cdot V + m \cdot v}{M + m}.$$

Vom Standpunkte des **Energieprincipes** gilt folgende Betrachtung: Wir fassen beide Körper als Bestandtheile **eines** Massensystemes auf, dann ist der Stoss nur eine Wirkung **innerer** Kräfte, und das ganze System, beziehungsweise der Massenmittelpunkt desselben, erfährt keine Änderung seines Bewegungszustandes. Es muss somit C bereits die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes **vor** dem Stosse sein,

1) Vgl. auch meine Schrift über d. Eng.-Princip i. d. Dyn. S. 53—66 und die Abhdlg. in d. Rlschlztsch. Wien. 1892. S. 522.

und als solche lässt sich dieselbe leicht bestimmen. Die gesammte lebendige Kraft des Systems besteht nach dieser Auffassung aus der lebendigen Kraft der relativen Theilbewegungen zum Schwerpunkte, nämlich aus $\frac{1}{2} M(V - C)^2 + \frac{1}{2} m(v - C)^2$ und aus der lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung des Systems $\frac{1}{2}(M + m) C^2$. Andererseits setzt sich die ganze lebendige Kraft zusammen aus $\frac{1}{2} M \cdot V^2$ und $\frac{1}{2} m \cdot v^2$; daher besteht die Gleichung

$$\frac{1}{2} M(V - C)^2 + \frac{1}{2} m(v - C)^2 + \frac{1}{2}(M + m) C^2 = \frac{1}{2} M \cdot V^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2,$$

woraus bald der obige Satz für die Erhaltung der Bewegungsgrössen und der Wert für die Geschwindigkeit C folgen.

Die beim Stosse geleisteten Arbeiten führen unter der Bedingung, dass das Maximum der Arbeit geleistet wird (Princip von Ostwald), zum Helm'schen Intensitätsgesetze, aus dem sich wieder die fraglichen Stossgesetze ohne weiteres ergeben. Es ist nämlich die Arbeit eines Körpers das Product aus der Kraft $M(V - C)/\tau$ in den (mit der mittleren Geschwindigkeit berechneten) Weg $\frac{1}{2}(V + C) \cdot \tau$, also gleich der Änderung der lebendigen Kraft $\frac{1}{2} M(V^2 - C^2)$. Somit sind die Arbeiten beider Körper beziehlich

$$W_1 = \frac{1}{2} M(V^2 - C^2) \quad \text{und} \quad W_2 = \frac{1}{2} m(v^2 - C^2).$$

Die Anderung der Gesammtarbeit bei einer Anderung jeder Geschwindigkeit um $\varDelta v$ ist

$$\varDelta W = [M(V - C) + m(v - C)] \cdot \varDelta v.$$

Die Bedingung fürs Arbeitsmaximum fordert das Verschwinden des eckigen Klammerausdruckes und damit das Gesetz für die Erhaltung der Bewegungsgrössen.

Im Sinne des Helm'schen Gesetzes sind $M(V - C)$ und $m(v - C)$ die Wirkungsgrade und $\varDelta v$ der Wirkungsraum der Energie. Die Summe der Wirkungsgrade gibt die resultierende Kraft, die im Gleichgewichtszustande verschwindet. Die Gleichheit der Wirkungsgrade ist also wieder die Bedingung für das hergestellte Gleichgewicht. Das Helm'sche Intensitätsgesetz bringt hier augenscheinlich das Newton'sche Gegenwirkungsprincip zum Ausdrucke.

Aufg. 1. Wie gross ist die resultierende Geschwindigkeit C beim Stosse eines unelastischen Körpers gegen eine feste Wand? — ($m = \infty$, $v = 0$, daher wird $C = 0$; d. h.?) **2.** Wie gross ist C, wenn beide Körpermassen M und m einander gleich sind? — ($C = \frac{1}{2}(V + v)$.)

3. In welcher Weise erfolgt die Einwirkung zweier unelastischer Kugeln beim schiefen Stoss, bei welchem die Bewegungsrichtung mit der Stossrichtung nicht zusammenfällt? — (Es tragen nur jene Componenten der Geschwindigkeit zum Stosse bei, welche in die Stossrichtung fallen; dieselben werden durch den Stoss geändert und setzen sich dann wieder mit den unveränderten, zu ihnen normalen Componenten zusammen.) **4.** Wie gross ist der Verlust an lebendiger Kraft beim Stosse zweier unelastischer Körper? Welches ist das Äquivalent dieses Verlustes?

$$\left(\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(M+m)C^2 = Mm(V-v)^2/2(M+m).\right)$$

5. Wie gross wäre der Verlust an lebendiger Kraft der fortschreitenden Bewegung, wenn Erde und Mond in entgegengesetzter Richtung zusammenstossen würden? Geschwindigkeit der Erde sei 4·1 Meil. à 7420 m, die des Mondes 0·14 Meil., die Erdmasse 6 Quadrill. kg schwer, die Mondmasse 1/81 der Erdmasse. — ($3{\cdot}612 \cdot 10^{30}$ kgm gegenüber der lebendigen Kraft der Erde von $277{\cdot}6 \cdot 10^{30}$ kgm.) **6.** Robinson's ballistisches Pendel besteht aus einem mit Eisen zusammengehaltenen Holzblock, der auf einem Seile aufgehängt ist. Mit Hilfe eines solchen Pendels soll die Geschwindigkeit v einer Flintenkugel, die gegen den Schwerpunkt des Blockes geschossen wird, bestimmt werden. Der Ausschlags∢ des Pendels sei φ, die Schwingungsdauer t und die Gewichte von Block und Kugel seien Q und q. — (Nach dem Stossgesetze gilt $q \cdot v = (Q+q)C$, für die Arbeit der Pendelhebung $\frac{1}{2a}(Q+q)C^2 = (Q+q) \cdot l(1-\cos\varphi)$, und für die Schwingungszeit $t = \pi\sqrt{l/a}$. Daraus erhält man

$$v = \frac{2}{\pi} \cdot a \cdot t \cdot \sin\varphi/2 \cdot (Q+q)/q.)$$

§ 32. **Gesetze des Stosses elastischer Körper.** Vollkommen elastische Körper kehren nach einer erlittenen Deformation wieder in ihr ursprüngliches Volumen zurück. Treffen demnach zwei solche elastische Körper im geraden Stosse zusammen, so wird zunächst wie bei unelastischen Körpern eine Deformation derselben eintreten; infolge der geweckten Elasticität wird aber die Deformation wieder ausgeglichen, so dass keinerlei Änderung in der Configuration der Körper, also auch kein Verlust an Energie der fortschreitenden Bewegung eintritt. Somit muss die Summe der kinetischen Energien beider Körper vor dem Stosse gleich der Summe der Energien der Körper nach dem Stosse sein. Sind nun wieder beziehungsweise die Körpermassen M und m, die Geschwindigkeiten vor dem Stosse V und v, und nach dem Stosse V_1 und v_1, so gilt

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}MV_1^2.$$

Zur Berechnung der Geschwindigkeiten V_1 und v_1 ist noch eine weitere Gleichung nöthig. Wir gewinnen dieselbe aus der Betrachtung der bereits angedeuteten Abschnitte, in welche die Erscheinung des

Stosses zerfällt. Der erste Abschnitt besteht in der Abplattung der Körper und ist beendet, wenn beide Körper die gemeinsame Geschwindigkeit C erreicht haben; wie für unelastische Körper gilt auch hier die Relation

$$(M + m)\, C = MV + mv.$$

Der zweite Abschnitt ist gewissermassen die Umkehrung des ersten: Die Elasticität leistet die Arbeiten wieder zurück, welche früher zur Änderung der Configuration consumiert wurden und verwandelt die gemeinsame Geschwindigkeit C in die respectiven Geschwindigkeiten V_1 und v_1; durch Anwendung der analogen Schlussweisen wie beim Stosse unelastischer Körper folgt wieder

$$(M + m)\, C = MV_1 + mv_1;$$

die beiden letzten Gleichungen geben dann

$$mv + MV = mv_1 + MV_1,$$

eine Gleichung, die direct den Ausdruck für die Gleichheit der Action und Reaction beim Stosse elastischer Kugeln erkennen lässt. Die gewonnenen Gleichungen in der Form

$$M(V^2 - V_1^2) = m(v_1^2 - v^2)$$

und

$$M(V - V_1) = m(v_1 - v)$$

geben durch Division

$$(V + V_1) = (v_1 + v)$$

und darnach erhält man einfach

$$V_1 = \frac{2mv + V(M - m)}{M + m} \quad \text{und} \quad v_1 = \frac{2MV - v(M - m)}{M + m}.$$

Bei entgegengesetzter Bewegungsrichtung ist v negativ.

Specielle Fälle: 1) Sind die Massen gleich, also $M = m$, so wird $V_1 = v$ und $v_1 = V$, d. h. beim Stosse werden die Geschwindigkeiten vertauscht. (Anwendung beim Percussionsapparate von Mariotte.)

2) Hat der gestossene Körper eine unendliche Masse, also $m = \infty$ und $v = 0$ (feste Wand), so wird $V_1 = -V$, d. h. der Körper prallt nach dem Stosse (gegen die Wand) mit der ursprünglichen Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung zurück.

3) Beim schiefen Stosse wirken Kugeln nur infolge ihrer centralen Geschwindigkeitscomponenten; die daraus resultierenden Geschwindigkeiten nach dem Stosse setzen sich mit den unveränderten tangentialen Componenten wieder zusammen. Die bei diesem Stosse auftretende Reibung veranlasst die Kugeln zur Drehung wie beim Stosse unelastischer Körper. Anwendung der Stossgesetze elastischer Kugeln finden wir beim Billardspiele.

Aufg. 1. Eine elastische Kugel wird mit einer Geschwindigkeit v unter dem Einfallswinkel α, d. i. der Winkel der Bewegungsrichtung mit

der Stossrichtung oder dem Einfallslothe, gegen eine feste Wand geworfen; mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Winkel prallt die Kugel wieder zurück? — (Mit der Geschwindigkeit v unter dem $\sphericalangle\, \alpha$.) **2.** Eine elastische Kugel von der Masse M bewege sich mit der Geschwindigkeit V in normaler Richtung gegen eine Wand, welche mit der Geschwindigkeit v verschoben werde; welchen Verlust an lebendiger Kraft erleidet die Kugel beim Stosse und wie gross ist die hierbei geleistete Arbeit, die zur Verschiebung der Wand dient? Was lehrt die Rechnung, wenn die Geschwindigkeiten V und v einander entgegengesetzt gerichtet sind? — (Die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stosse ist $(2v - V)$, daher der Verlust an lebendiger Kraft

$$\frac{1}{2} M V^2 - \frac{1}{2} M (V - 2v)^2 = 2 M v (V - v).$$

Für die geleistete Arbeit erhält man denselben Wert. Bei entgegengesetzter Richtung der Geschwindigkeiten tritt eine Vermehrung der lebendigen Kraft ein. Diese Ergebnisse sind in der kinetischen Gastheorie von Wichtigkeit.) **3.** Ein Körper, welcher das Gewicht $p = 24$ g und die Geschwindigkeit $v = 15$ m hat, wird von einem zweiten Körper, welcher die Geschwindigkeit $V = 20$ m hat, eingeholt und mit centralem Stosse getroffen. Beide Körper sind vollkommen elastisch. Der erste Körper hat nach dem Stosse die Geschwindigkeit $v_1 = 21$ m. Welche Geschwindigkeit hat der zweite Körper nach dem Stosse und welches ist sein Gewicht? — ($v_1 = 16$ m, $P = 36$ g.) **4.** Es sind drei vollkommen elastische Kugeln von $p_1 = 1$ kg, $p_2 = {}^1/_2$ kg, $p_3 = {}^1/_4$ kg Gewicht so aufgehängt, dass sie sich berühren und ihre Mittelpunkte in einer geraden Linie liegen. Welche Geschwindigkeit erhält die dritte Kugel, wenn die erste gegen die zweite mit einer Geschwindigkeit $v_1 = 1$ cm stösst? — ($v_2 = {}^4/_3$ cm, $v_3 = {}^{16}/_9$ cm.) **5.** Zwei Pendel von gleicher Länge $l = 1{\cdot}25$ m tragen am Ende zwei elastische Kugeln von $p = 20$ g und $P = 30$ g Gewicht. Das erste Pendel wird um einen Winkel $\alpha = 60^0$ gehoben und sich selbst überlassen, worauf es central gegen die zweite Kugel stösst. Wie weit schlagen die Pendel nach dem Stosse aus? —

$$(\sin \alpha_1/2 = 0{\cdot}1, \quad \alpha_1 = 11^0\, 28'\, 42''; \quad \sin \alpha_2/2 = 0{\cdot}4, \quad \alpha_2 = 47^0\, 9'\, 22''.)$$

[Aufg. 3—5 sind von Budde; Aufg. 2 wurde von mir bereits in der Zeitsch. f. phys. u. chem. Unterr. IV. S. 189 mitgetheilt.]

II. Von dem Gleichgewichte und der Bewegung der Flüssigkeiten.

§ 33. **Eigenschaften der Flüssigkeiten.** Von allen Flüssigkeiten kommt in der Natur das *Wasser* am häufigsten und in grössten Mengen vor und spielt auch die wichtigste Rolle. Dasselbe wird deshalb als *Vertreter* aller vollkommenen Flüssigkeiten betrachtet, und die Mechanik der Flüssigkeiten wird *Hydromechanik* genannt. Seine wichtigste Eigenschaft, durch die es sich von den *festen* Körpern unterscheidet, ist bald aus den Erscheinungen ersichtlich; es ist die *leichte Verschiebbarkeit* seiner Theilchen: das Eintauchen fester Körper, das Ablaufen auf schiefen Flächen und alle Versuche, das Wasser zu theilen, lassen auf die angegebene Eigenschaft unzweifelhaft schliessen. Die leichte Verschiebbarkeit der Theilchen erklärt das Verhalten der Flässigkeiten unter verschiedenen Umständen; so ihre unselbständige Gestalt, — sie nehmen die Form der Gefässe an —, und die gleichmässige Fortpflanzung des Druckes nach allen Richtungen. Nur die Tropfenform ist selbständig. Ihr Volumen ist immer ein bestimmtes.

Um einen Irrthum, der sich in vielen Lehrbüchern findet, zu vermeiden, mag hier ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass die in Rede stehende *Verschiebbarkeit* der Flüssigkeitstheilchen nicht mit einer *Trennung* zu verwechseln ist. Bei allen bezüglichen Erscheinungen findet nur eine Verschiebung der Theilchen innerhalb des constanten Flüssigkeitsraumes statt; es wird nichts anderes als die Arbeit der *Oberflächenvergrösserung* geleistet. Es ist demnach auch ein Schluss auf die *Zusammenhangskraft* (Cohäsion) der Theilchen unnöthig und unstatthaft. Ein späterer Paragraph soll hierüber zahlenmässige Bestimmungen bringen.

Ursprünglich hielt man die Flüssigkeiten für unzusammendrückbar. Erst Bacon (1561—1626) stellte über die *Zusammendrückbarkeit* der Flüssigkeiten Versuche an. Eine hohle Bleikugel wurde ganz mit Wasser gefüllt und gut verschlossen, alsdann mit einem schweren Hammer und mit einer Presse zusammengedrückt, bis das Wasser durch das feste Blei in Form eines feinen Thaues durchschwitzte.

Die Raumverminderung bei der Abplattung der Kugel wurde der Zusammendrückung des Wassers zugeschrieben[1]).

Im Jahre 1761 stellte John Canton folgenden Versuch an: Eine Art Wasserthermometer mit grossem kugelförmigen Gefäss und engem Haarröhrchen wurde nach dem Kochen des Wassers oben zugeschmolzen. Da sich das Wasser beim Abkühlen zusammenzog, so entstand am oberen Ende des Haarröhrchens ein luftleerer Raum. Canton brachte dann die Vorrichtung unter die Glocke einer Luftpumpe, so dass das obere Ende des Röhrchens in die Luft herausragte, pumpte aus und brach die Spitze der Röhre ab. Die Wasseroberfläche sank. Liess er dann Luft in die Glocke strömen, so stieg das Wasser, aber nicht bis zu seinem ursprünglichen Stande. Aus der Volumverminderung des Wassers berechnete er die Compressibiltät 0·000046 für die Volumeinheit und für den Druck einer Atmosphäre. Die neueren Versuche haben kein wesentlich verschiedenes Resultat ergeben.

Die ersten genaueren Versuche rühren von Oerstedt (1822) her. Derselbe benützte ähnlich wie Canton eine thermometerähnliche Vorrichtung, Piëzometer genannt, füllte sie mit der zu untersuchenden Flüssigkeit, gab einen Tropfen Quecksilber darauf und stellte sie neben einer Skala und einer als Druckmesser dienenden, mit Luft gefüllten Röhre in ein dickwandiges Glasgefäss; dieses füllte er mit Wasser und übte mittelst einer angeschraubten Druckpumpe starke Drücke aus. Weitere genaue Versuche mit verschiedenen Flüssigkeiten wurden von Regnault, Grassi, Caillet u. a. angestellt.

Um den Compressibilitätscoefficienten zu ermitteln, wird ein Volumen V unter den Druck P gestellt. Die Volumsänderung sei ΔV; dann ist $\Delta V = \varkappa \cdot V \cdot P$ und daraus $\varkappa = \Delta V / VP$. Die Dimension ist $[M^{-1} \cdot L \cdot T^2]$. Auch der reciproke Wert $1/\varkappa$ wird Compressibilitätscoefficient genannt; dieser bedeutet einen Druck auf die Flächeneinheit oder eine Spannung.

Im ersteren Sinne genommen gelten nach Grassi folgende Compressibilitätscoefficienten:

für Wasser bei 18° C u. 1 Atm. $\varkappa = 46{\cdot}2 \cdot 10^{-6}$ oder bei 1 Megadyne auf 1 cm^2 $45{\cdot}5 \cdot 10^{-6}$,

für Äther bei 14° C u. 1 Atm. $\varkappa = 140 \cdot 10^{-6}$ oder bei 1 Megadyne auf 1 cm^2 $138 \cdot 10^{-6}$,

für Alkohol bei 13·1° C u. 1 Atm. $\varkappa = 99 \cdot 10^{-6}$ oder bei 1 Megadyne auf 1 cm^2 $97{\cdot}8 \cdot 10^{-6}$,

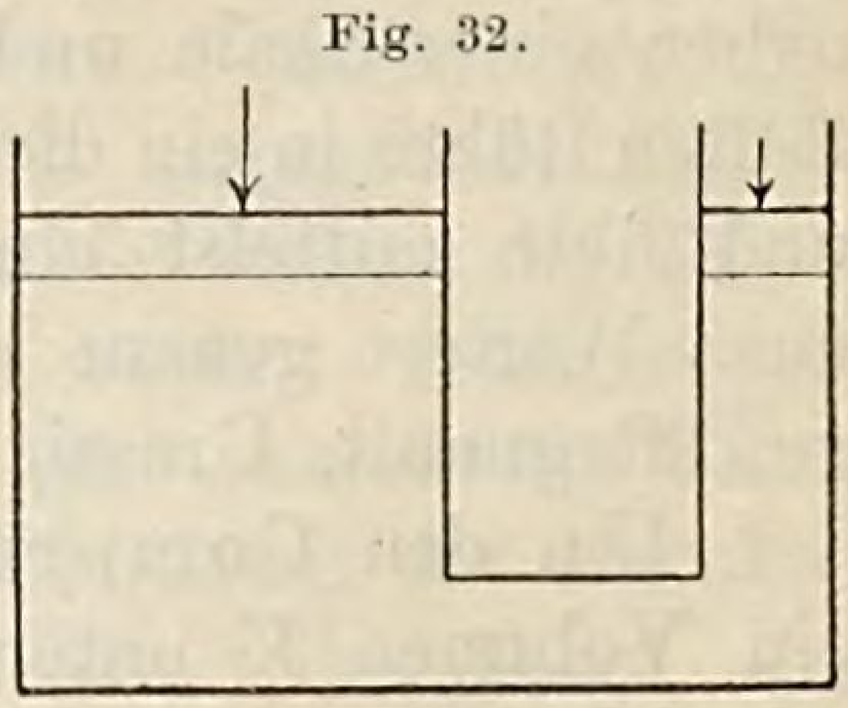
für Quecksilber bei 0° C u. 1 Atm. $\varkappa = 3 \cdot 10^{-6}$ oder bei 1 Megadyne auf 1 cm^2 $2{\cdot}91 \cdot 10^{-6}$.

Eine Megadyne = 10^6 Dyne.

1) Violle: Lehrb. d Phys. I. S. 497 ff.

Das Gesetz von der gleichmässigen Fortpflanzung des Druckes hat Stevin (1600) für den Bodendruck und Pascal (1650) ganz allgemein ausgesprochen. Taucht man nach Pascal's Idee mehrere Glasröhrchen, von denen eines vor der unteren Öffnung gar nicht, eines nur einmal und eines zweimal rechtwinklig gebogen ist, theilweise ins Wasser, so dringt kein Wasser ein, solange man die obere Öffnung geschlossen hält; öffnet man, so steigt in jedem Röhrchen das Wasser empor. Da die unter dem Wasser befindlichen Öffnungen der drei Röhren beziehungsweise nach unten, nach seitwärts und nach aufwärts gekehrt sind, so muss man schliessen: Der Druck des Wassers wirkt nach allen Seiten, und derselbe ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Grundfläche die gedrückte Fläche und deren Höhe gleich dem Abstande dieser Fläche vom Flüssigkeitsspiegel ist[1]). Stevin construierte cylindrische, conische und gebogene Gefässe und zeigte, dass der Bodendruck nicht von der Form des Gefässes, sondern nur von der Grösse der Bodenfläche und der Höhe der Flüssigkeitssäule abhängt. Pascal sprach das Gesetz mit folgenden Worten aus: „Wenn ein allseitig verschlossenes, mit Wasser gefülltes Gefäss zwei Öffnungen hat, deren eine 100mal so gross als die andere, und wenn man in jede Öffnung einen gut schliessenden Kolben einpasst, so kann ein Mann, der auf den kleinen Kolben drückt, der Kraft von 100 Männern, welche auf den grossen Kolben drücken, das Gleichgewicht halten, und er wird 99 Männern überlegen sein. Welche Dimensionen diese Öffnungen auch haben mögen, die Kräfte sind im Gleichgewichte, wenn sie sich wie die Öffnungen verhalten.“

Fig. 32.



In der Form der Fig. 32 gibt ein solches Gefäss eine hydraulische Presse in der einfachsten Gestalt.

Von besonderem Interesse ist es, dass Pascal auch die Giltigkeit des Principes der virtuellen Bewegungen für Flüssigkeiten feststellte er sagt: „Man kann nur bewundern, dass bei dieser neuen Maschine sich dasselbe Gesetz wieder findet, wie bei den schon bekannten, z. B. beim Hebel, der Rolle, der Schraube u. s. w., nämlich, dass der Weg in demselben Verhältnisse wächst, wie die Kraft abnimmt, ein Gesetz, das man sogar als die wahre Ursache der hier besprochenen Wirkung betrachten kann.“

In der einfachen Form, die das Princip ersichtlich zu machen geeignet ist, ist die genannte Presse für den technischen Gebrauch noch zu unvollkommen; erst durch die Einrichtungen, welche der Presse durch Brahma (1749—1814) gegeben wurde, wird dieselbe

1) Poske in seiner Zeitsch. VI. S. 273.

gut verwendbar. Die Vorrichtungen beziehen sich auf den Wasserabschluss durch Lederringe im grossen Cylinder und auf ein Ventil im kleinen Cylinder, das dieselbe Function hat, wie das Ventil einer Druckpumpe.

Im Folgenden soll das Princip der virtuellen Bewegung als Grundlage zur Ableitung der wichtigsten hydraulischen Gesetze dienen. Die Flüssigkeiten sollen dabei als unzusammendrückbar vorausgesetzt werden.

Aufg. 1. In einem von allen Seiten geschlossenen Gefässe befinden sich an beliebigen Stellen der Wände 2 Röhren, die mit Kolben versehen sind. Der Querschnitt einer Röhre sei s, der der anderen $n \cdot s$; die Drücke der Kolben auf die Flächeneinheit, die sich das Gleichgewicht halten, wenn das Gefäss mit Flüssigkeit gefüllt ist, seien beziehungsweise P und p. Welche Beziehung zwischen diesen Drücken ergibt sich aus dem Arbeitsgesetze? — (Bei einer Verschiebung der Kolben um die Strecken L und l sind die Arbeiten $P \cdot n \cdot s \cdot L - p \cdot s \cdot l = 0$ und die Volumen $n \cdot s \cdot L = s \cdot l$, folglich $P = p$. Gesetz der gleichmässigen Druckfortpflanzung nach allen Seiten.) **2.** In einer hydraulischen Presse ist der Durchmesser des Druckkolbens 1·5 cm, der des Presskolbens 15 cm; ein Mann drückt an einem Hebel von 2 m Länge, der die Stange in 15 cm Entfernung vom Stützpunkte trägt, mit 40 kg; wie gross ist der Druck des Presskolbens? — (53 333$^1/_3$ kg.) **3.** Wie gross musste an der Menei-Brücke der Nutzeffect der Dampfmaschine sein, wenn die Kolbenstange derselben direct auf den Druckkolben wirkte, und wenn ein Stück von 1 Mill. kg in jeder Stunde 9 m gehoben werden sollte. — (33$^1/_3$ Pferdekräfte.) [Reis.]

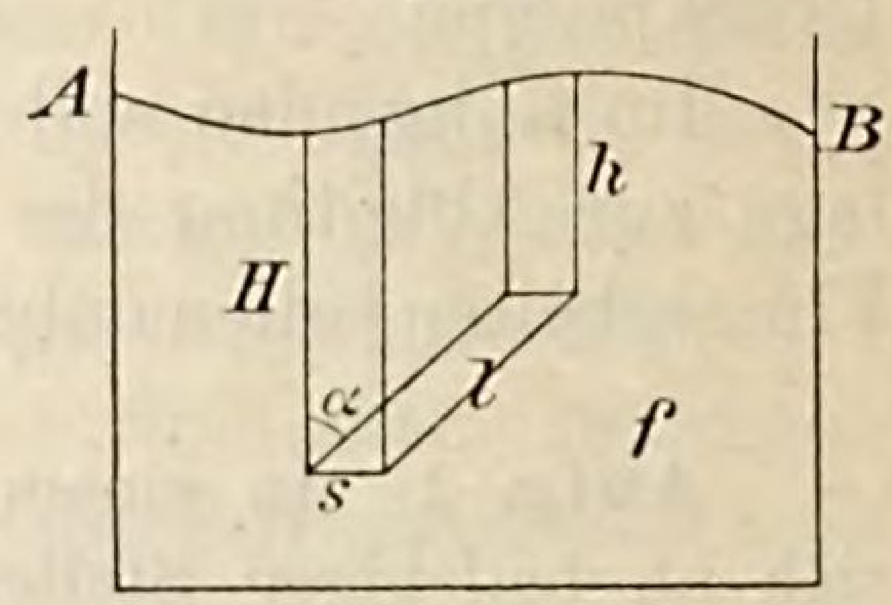
§ 34. **Niveauflächen.** (Clairault 1743.) Die Gleichgewichtsbedingungen einer Flüssigkeit unter dem Einfluss der Schwerkraft wurden von Newton und Huygens anlässlich der Berechnung der Erdabplattung studiert. Einer allgemeinen Lösung wurde dieses Problem von Clairault zugeführt, indem er zeigte, dass — nach der heutigen Bezeichnungsweise ausgedrückt — die Flächen gleicher Arbeit zugleich die Flächen gleichen Druckes sein müssen. Die Flächen heissen Niveauflächen.

Bei Untersuchung der Erdgestalt (§§ 20 und 21) haben wir bereits von dem Satze Gebrauch gemacht, dass die Erdoberfläche eine Niveaufläche sein muss, wenn die Massentheilchen auf derselben als leicht beweglich vorausgesetzt werden; es war nämlich im vorhinein klar, dass die Schwerkraft normal zur Oberfläche wirken muss, weil sonst die beweglichen Theilchen auf geneigter Fläche nach dem Gesetze der schiefen Ebene herabliefen.

Wir wollen nun nach dem Grundgedanken Clairault's die Gleichgewichtsbedingung einer Flüssigkeit in einem Gefässe ermitteln. Fig. 33 sei das bis zur Oberfläche AB mit Flüssigkeit gefüllte Gefäss; das spec. Gewicht der Flüssigkeit sei f. Nach Clairault muss im Gleichgewichtszustande die Flüssigkeit in einem gedachten, in sich

geschlossenen Kanale für sich im Gleichgewichte sein. Wir wählen der Einfachheit halber einen aus den verticalen Röhren H, h und aus den unter dem Winkel α gegen H geneigten Rohr l bestehenden Kanal und ermitteln für die darin enthaltene Flüssigkeit die Gleichgewichtsbedingung. Zu diesem Zwecke denken wir uns in dem Kanale eine virtuelle Verschiebung der Flüssigkeit, deren Arbeitsleistung gleich Null ist. Es werde z. B. die Flüssigkeitssäule in H um λ herabgedrückt und dadurch in l und h um λ gehoben. Die Basen beider verticalen Röhren seien gleich s. Darnach besteht die Gleichung der Arbeiten

Fig. 33.



$$(H \cdot s \cdot f)\lambda = (h \cdot s \cdot f)\lambda + (l \cos\alpha \cdot s \cdot f)\lambda.$$

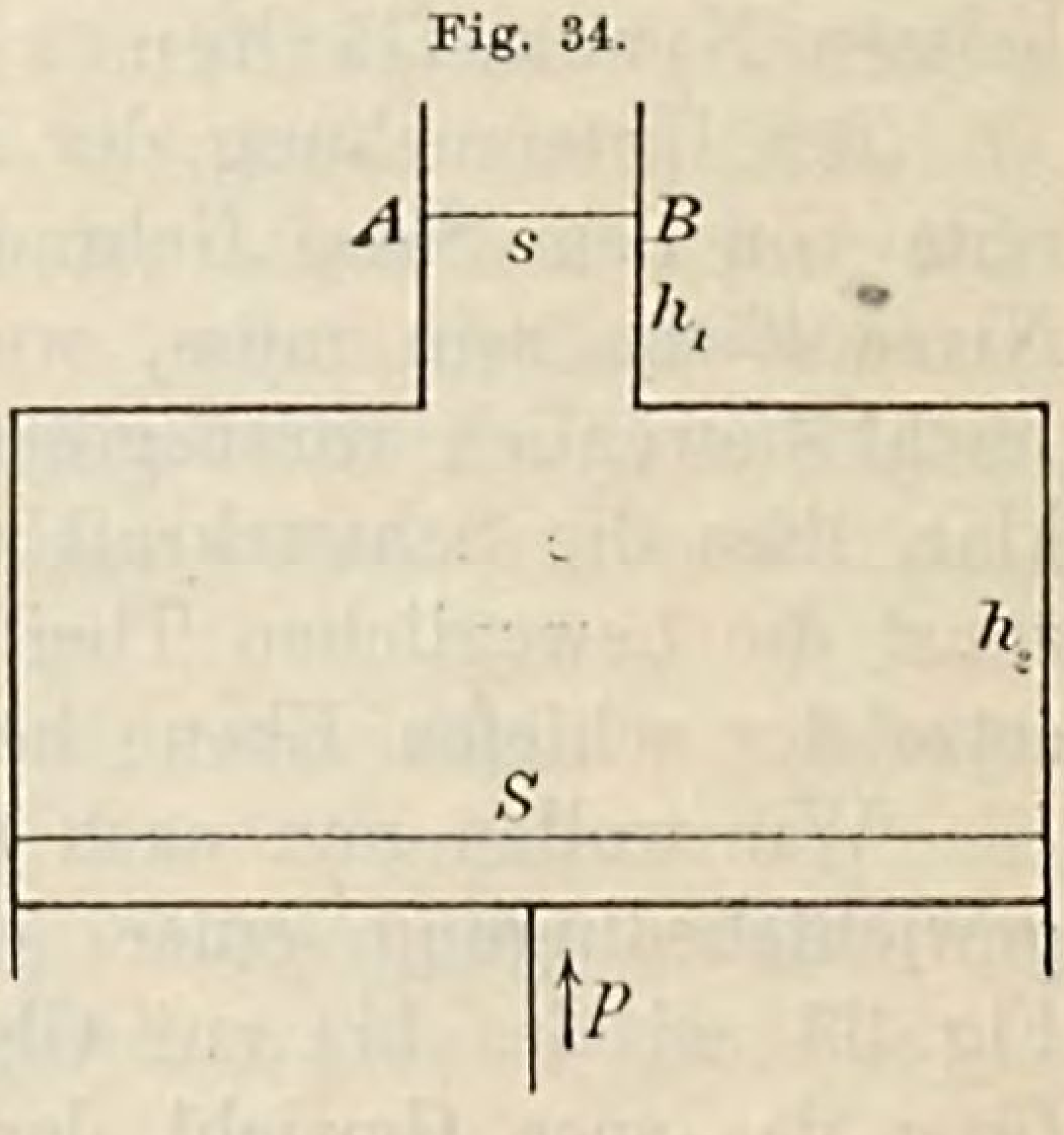
Daraus folgt $H \cdot f = h \cdot f + l \cdot \cos\alpha \cdot f$ oder $H = h + l \cdot \cos\alpha$.

Ist $\sphericalangle \alpha = 90^0$, so ist $H = h$, d. h. die Oberflächenpunkte müssen von einer Horizontalen gleich weit abstehen, die Oberfläche selbst muss also horizontal sein; ferner muss $H \cdot f = h \cdot f$, d. h. der Druck in einer horizontalen Ebene muss constant sein. Die horizontale Fläche, die wegen ihrer Normalstellung zur Richtung der Schwerkraft eine Fläche gleicher Arbeit ist, muss daher auch eine Fläche gleichen Druckes sein. Die Oberfläche ist ebenfalls eine Niveaufläche; diesem Umstande verdanken die Niveauflächen ihren Namen.

In der Form $H \cdot f - l \cos\alpha \cdot f = h \cdot f$ besagt die Gleichung, dass die Basis der Röhre h von oben und unten gleich stark gedrückt wird; dieses Ergebnis bestätigt den Satz von der gleichmässigen Fortpflanzung des Druckes.

§ 35. **Das hydrostatische Paradoxon.** (Stevin 1600.) Dasselbe gibt das Gesetz für den Bodendruck einer Flüssigkeit in einem Gefässe; es lässt sich wie folgt ableiten[1]). Das in Fig. 34 angedeutete Gefäss habe in seinem untern Theile den Querschnitt S und oben den Querschnitt s und sei bis AB mit einer Flüssigkeit vom specifischen Gewichte f gefüllt. Dem Drucke p auf die Bodenfläche werde durch den Gegendruck eines Kolbens das Gleichgewicht gehalten. Wird nun der Kolben um die verschwindend kleine Strecke λ nach aufwärts bewegt, so hat die Kraft p, welche unterdessen nicht geändert wird,

Fig. 34.



1) Siehe meine Abhdlg. in d. Zeitsch. f. d. Realschulw Jahrgg. 1883 p. 458.

die Flüssigkeitssäule im untern Gefässtheile um λ und die obere Säule um λ' zu heben; da die unten verdrängte Flüssigkeit nach oben tritt, so muss

$$S \cdot \lambda = s \cdot \lambda'$$

sein.

Soll die Energie der Flüssigkeit unverändert bleiben, so muss die Arbeit der Kraft p vollständig consumiert, also zur Hebung der Flüssigkeit verwendet werden; demnach gilt die Gleichung:

$$p \cdot \lambda = S \cdot h_2 \lambda f + s \cdot h_1 \lambda' f,$$

wir substituieren für $s\ \lambda'$ und kürzen durch λ; dann wird

$$p = S \cdot (h_1 + h_2) \cdot f.$$

Der Bodendruck einer Flüssigkeit ist also gleich dem Producte aus der Bodenfläche, der totalen Höhe der Flüssigkeitssäule und dem specifischen Gewichte; er ist unabhängig von der Form der Seitenwände. Der Satz heisst das hydrostatische Paradoxon. Der experimentelle Nachweis desselben geschieht mit dem Haldat'schen Apparate.

Auf dem Bodendrucke beruhen: Real's Extractivpresse, der anatomische Heber, das Verderben von Thieren, Fahrzeugen und anderen Gegenständen am Meeresboden etc.

Aufg. 1. Eine Real'sche Presse besteht aus einem cubischen Gefässe von 30 cm Kante und einer Röhre von 30 m Höhe; wie gross ist der Bodendruck? — (2727 kg.) **2.** Welchen Druck hat ein Mann von 120 dm^2 Oberfläche in einer Taucherglocke oder in einem Skaphander zu ertragen, wenn er 30 m tief eingetaucht ist? — (36 000 kg.) **3.** Wie gross ist der Seitendruck auf eine rechteckige, 20 cm breite Wand, an welcher Wasser 50 cm hoch steht? — (25 kg.) **4.** Wie gross ist der Seitendruck von Quecksilber auf ein gleichseitiges Dreieck von 10 cm Seite, wenn die obere Seite dem Spiegel parallel und 6 cm von demselben entfernt ist? Specifisches Gewicht des Quecksilbers = 13·6. — (5·233 kg.) [Reis.] **5.** Welchen Druck erfährt 1 m^2 in einer Meerestiefe von 8096 m, wenn die Dichte des Meerwassers 1·029 ist? — (8 330 784 kg.) **6.** Das Wasserleitungsrohrnetz einer Stadt liege um 20 m tiefer als der Wasserspiegel im Speisereservoir; welchem Druck müssen die Röhren pr. 1 cm^2 Widerstand leisten können? — (2 kg.) [Daurer.]

§ 36. **Arbeitswert eines Flüssigkeitsgewichtes. Communicierende Gefässe**[1]. Fliesst eine Flüssigkeitssäule aus der Bodenöffnung ihres Gefässes aus, so sinkt ihr Gewicht Q um die Schwerpunktshöhe $\frac{1}{2} h$, wenn h die Höhe der Säule bedeutet. Der Arbeitswert des Flüssigkeitsgewichtes ist demnach:

1) Siehe meine Abhdlg.: Zur Übereinstimmung der phys. Arbeitsgesetze. Rlschlztsch. Wien. 1892.

$$W = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot h;$$

durch Einführung des spec. Gewichts f, des Volumens v und des Druckes P auf die Einheit der Bodenfläche erhält man

$$W = \frac{1}{2} \cdot v \cdot f \cdot h = \frac{1}{2} \cdot P \cdot v,$$

d. h. die Arbeit ist gleich dem Producte zweier Factoren, die nach Helm als Wirkungsgrad $\left(\frac{1}{2} \cdot P\right)$ und als Wirkungsraum (v) bezeichnet werden können. Der erstere wird bestimmt durch den mittleren Druck, unter welchem sich das Volumen v befindet. Theilt man die Flüssigkeit in kleine horizontale Schichten, so kann man für jede derselben das Product aus dem Druck in das Volumen berechnen und alle Producte summieren; die Summe kommt dem angegebenen Arbeitswerte W gleich. Es gilt demnach allgemein, dass der Arbeitswert durch das Product aus dem Druck auf die Flächeneinheit in das Volumen, das diesem Drucke unterworfen ist, bestimmt wird. J. Stefan hat in diesem Sinne auch die hydrostatischen Grundgleichungen der analytischen Mechanik gedeutet.

Die allgemeine Bedeutung des gewonnenen Arbeitswertes folgt aus der Arbeit, die geleistet wird, wenn ein Massentheilchen aus einer Flüssigkeitsschichte infolge eines Überdruckes in eine Nachbarschichte bewegt wird. Ist der Druckunterschied beider Schichten Δp und das Volumen des Massentheilchens $v = s \cdot \lambda$, so muss die Kraft $\Delta p \cdot s$ längs des Weges λ wirken, um den Körper von einer in die andere Schichte zu schaffen, und es wird die Arbeit geleistet

$$w = \Delta p \cdot s \cdot \lambda = \Delta p \cdot v.$$

Diese Form der hydrostatischen Grundgleichung gibt somit die Arbeit an, die verrichtet wird, wenn ein Körper vom Volumen v einer Druckänderung Δp unterworfen wird.

Als ein System betrachten wir zwei Flüssigkeitssäulen in den Schenkeln eines communicierenden Gefässes. Die Arbeitswerte, bezogen auf das Niveau der Trennungsfläche, sind

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot v_1 = \frac{1}{2} \cdot (h_1 \cdot f_1) \cdot v_1$$

und

$$W_2 = \frac{1}{2} \cdot P_2 \cdot v_2 = \frac{1}{2} \cdot (h_2 \cdot f_2) \cdot v_2.$$

Im Gleichgewichtszustande muss die Summe der Werte ein Minimum sein. Als Bedingung gilt, dass bei möglichst kleiner, etwa durch Verschiebung der Trennungsfläche der Flüssigkeiten geleisteten Arbeit der gesammte Arbeitswert keine Änderung erleidet. Bei solcher Verschiebung ist $\Delta v_1 = - \Delta v_2 = \Delta v$ und

$$\Delta W_1 = \frac{1}{2} \cdot (h_1 \cdot f_1) \cdot \Delta v,$$

$$\Delta W_2 = -\frac{1}{2} \cdot (h_2 \cdot f_2) \cdot \Delta v.$$

Aus der Gleichheit von Δv folgt die Gleichheit der Wirkungsgrade als Gleichgewichtsbedingung, nämlich $h_1 \cdot f_1 = h_2 \cdot f_2$ oder $h_1 : h_2 = f_2 : f_1$, d. h. zwei Flüssigkeiten, die sich nicht mischen, stellen sich getrennt in zwei Schenkeln eines communicierenden Gefässes so auf, dass die Abstände ihrer Oberflächen von der gemeinschaftlichen horizontalen Trennungsebene sich umgekehrt wie ihre specifischen Gewichte verhalten. Für ein und dieselbe Flüssigkeit sind in beiden Schenkeln die specifischen Gewichte einander gleich, und es folgt, dass $h_1 = h_2$, d. h. dass die Flüssigkeitshöhen in beiden Schenkeln dieselben sind.

Anwendungen finden die communicierenden Gefässe zu Wasserleitungen, Springbrunnen, Wasser- und Kanalwagen, Wasserstandsanzeigern bei Dampfkesseln, zur Erklärung der ungefähr gleichzeitigen Niveauschwankungen des Grundwassers und des benachbarten Flusswassers, ferner zur Bestimmung des specifischen Gewichtes und der Ausdehnung der Flüssigkeiten.

Aufg. 1. Es ist der Arbeitswert der Schwerkraft für eine Wassermasse in einem cylindrischen Gefässe, das längs des Höhenstückes H den Querschnitt S und längs des Höhenstückes h den Querschnitt s besitzt (siehe Fig. 34), zu bestimmen und darnach die Änderung des Arbeitswertes bei einer kleinen Hebung der Flüssigkeit anzugeben. — (Die Wassergewichte (HS) und (hs) multipliciert mit ihren Schwerpunktshöhen geben den Arbeitswert $W = \frac{1}{2} S \cdot H^2 + hs\left(H + \frac{h}{2}\right)$. Bei einer kleinen Hebung bleiben die Gewichte unverändert, und ihre Wege sind dH und dh, wobei $S \cdot dH = s \cdot dh = dv$. Daher folgt $dW = (H + h) \cdot S \cdot dH = p \cdot dv$.) **2.** Ein communicierendes Gefäss bestehe aus zwei der vorigen Aufgabe entsprechenden Gefässen; es ist die Gleichgewichtsbedingung für den Stand einer Flüssigkeit zu ermitteln. **3.** Wenn in einem Schenkel eines communicierenden Gefässes eine Quecksilbersäule 76 cm hoch ist, welche Höhe muss eine Wassersäule haben, um das Gleichgewicht zu halten. — (10·33 m.) **4.** Wie lässt sich mittelst eines communicierenden Gefässes die Dichte einer Flüssigkeit bestimmen? **5.** Es ist nachzuweisen, dass der Arbeitswert $\int p \cdot dv = P \cdot V$ den Momentensatz für eine Flüssigkeit in einem beliebigen Gefässe in Bezug auf die Flüssigkeitsoberfläche als Momentenebene zum Ausdruck bringt. — $\left(\int p dv = \int z \cdot f dv = Z \cdot f \cdot V = P \cdot V.\right)$

§ 37. **Das Archimedische Gesetz.** (220 v. Chr.) Dieses wichtige Gesetz wurde entdeckt anlässlich der Auffindung einer Methode, um die Echtheit der Krone des Königs Hiëron II. von Syrakus zu prüfen. Archimedes soll zu der Idee der Lösung dieses Problems gekommen

sein, als er sich in ein Bad begab und beim Eintauchen ins Wasser den Gewichtsverlust seines Körpers beobachtete. Er stellte darnach allgemein den Gewichtsverlust eines Körpers, der in eine Flüssigkeit getaucht ist, gesetzlich fest.

Unter Voraussetzung der leichten Verschiebbarkeit der Flüssigkeitstheilchen kann das Gesetz mittelst des Ausdruckes für die Arbeit durch folgenden Vorgang gewonnen werden[1]): Wird ein schwerer Körper durch eine aufwärts wirkende Kraft P in einer Flüssigkeit im Gleichgewichte gehalten und in diesem Zustande um die Höhe h gesenkt, so herrscht darnach wieder Gleichgewicht und die Summe der verrichteten Arbeiten ist gleich Null. Die Arbeit von P ist $(-P \cdot h)$, die Arbeit des fallenden Körpergewichtes Q ist $(+Q \cdot h)$ und die Arbeit des Gewichtes q der Flüssigkeit, welche vom Körper in seiner schliesslichen Lage verdrängt wird und in den Raum seiner ersten Lage aufsteigt, ist $(-q \cdot h)$. Folglich besteht die Gleichung

$$-P \cdot h + Q \cdot h - q \cdot h = 0$$

oder die Relation

$$P = Q - q,$$

welche unmittelbar das Archimedische Gesetz ausdrückt, nämlich lehrt, dass der Körper in der Flüssigkeit so viel von seinem Gewichte verliert, als die verdrängte Flüssigkeit wiegt.

Die Gewichtsabnahme des Körpers geht nicht verloren, sondern sie findet sich in der Gewichtszunahme der Flüssigkeit wieder. Zu diesem Ergebnisse führt der Satz von der virtuellen Verschiebung, wenn man den Körper Q durch die Kraft p weiter in Ruhe erhält und das Gefäss sammt der Flüssigkeit um eine Wegstrecke h bewegt. Bei dieser Bewegung, welche mittelst einer Kraft P' nach aufwärts gedacht werden soll, werden folgende Arbeiten geleistet: Die Arbeit der Kraft P' von der Grösse $P'h$ und die Arbeit des Gewichtes R von Gefäss und Flüssigkeit $(-Rh)$; die Flüssigkeit q, welche ursprünglich in der Entfernung h unterhalb des Körpers liegt, ist durch die Anwesenheit des Körpers verhindert, nach der Hebung in dessen Raum einzudringen und wird durch die Wirkungen des Systemes gezwungen, noch um die Strecke h emporzusteigen, wo sie dann den Raum der vom Körper anfänglich verdrängten Flüssigkeit ausfüllt; die Arbeit dieser Hebung ist $(-qh)$. Die verrichteten Arbeiten liefern die Gleichgewichtsbedingung

$$P'h - Rh - gh = 0.$$

Daraus folgt die behauptete Vermehrung des Flüssigkeitsgewichtes, nämlich

$$P' = R + q.$$

1) Siehe meine Abhdlg. in Poske's Zeitsch. II. S. 74.

Aufg. 1. Es ist der Arbeitswert der Schwerkraft eines Systems, das aus einer in einem Gefässe befindlichen Flüssigkeitsmasse und einem eingetauchten Körper besteht, zu bestimmen und daraus das Archimedische Gesetz abzuleiten. Die Basis des Cylindergefässes sei S, die Flüssigkeitshöhe H, das Volumen des eingetauchten Körpers V, dessen specifisches Gewicht F, das specifische Gewicht der Flüssigkeit f. — (Wenn h die Entfernung des Körperschwerpunktes von der Bodenfläche ist, so ist der gesuchte Arbeitswert $W = \frac{1}{2} SH^2 + V \cdot F \cdot h - V \cdot f \cdot h$ und darnach die Schwere des eingetauchten Körpers $P = dW/dh = V(F - f)$.) **2.** Es ist mittelst des Satzes über die statischen Momente der Resultierenden und ihrer Componenten zu beweisen, dass der Auftrieb bei einem in eine Flüssigkeit getauchten Körper im Mittelpunkte der verdrängten Flüssigkeit angreift. **3.** Es ist das Verhalten eines Körpers in einer Flüssigkeit in Bezug auf seine verticale Bewegung nach dem Archimedischen Gesetze zu erklären. **4.** Es ist die Gleichgewichtsbedingung eines auf einer Flüssigkeit schwimmenden Körpers aus dem Arbeitsgesetze zu ermitteln. — (Der Arbeitswert eines schwimmenden Körpers darf durch eine kleine Verschiebung nicht geändert werden. Eine verticale Verschiebung führt zum Archimedischen Gesetz und fordert die Gleichheit des Körpergewichtes Q und des Gewichtes der verdrängten Flüssigkeit; beide Kräfte setzen ein Kräftepaar zusammen. Die Arbeit einer Drehung um 1^0 ergibt das Drehungsmoment des Kräftepaares, also $dW/d\alpha = Q \cdot l = 0$, wenn l der Arm des Kräftepaares ist; im Gleichgewichte muss dieser gleich Null sein; d. h.?) **5.** In welcher Beziehung stehen die stabile und labile Gleichgewichtslage zu den Arbeits- oder Energiewerten? — (Vgl. § 26.) **6.** Metacentrum nennt man den Punkt, in welchem eine durch den Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit gezogene Verticale die Mittellinie oder die Schwimmachse des Körpers schneidet; wo liegt das Metacentrum eines stabil und wo jenes eines labil schwimmenden Körpers? **7.** Es sind Beispiele von indifferent schwimmenden Körpern aufzuzählen. **8.** Forster hat im nördlichen Eismeere schwimmende Eismassen von 2000 Fuss Länge, 400 Fuss Breite und 200 Fuss Höhe über der Oberfläche des Wassers gesehen; wie gross musste das Volumen derselben unter dem Wasser sein, wenn man annimmt, dass sich die Gewichte gleicher Volumen von Eis und Meerwasser wie 9 : 10 verhalten? — (1440 Mill. Cubikfuss.) **9.** Um ein versunkenes Schiff vom Meeresgrunde heraufzuheben, hat man 20 leere und wasserdicht gemachte Fässer, jedes von 1·2 m^3 Inhalt und 150 kg Gewicht an demselben befestigt und es dadurch gerade zum Aufsteigen gebracht. Wie gross ergibt sich daraus das Gewicht des Schiffes im Wasser? — (21 000 kg.) **10.** Es soll das Gewicht eines korkenen Schwimmpanzers berechnet werden, der einen Menschen von 65 kg Gewicht im Wasser trägt, das specifische Gewicht des Menschen zu 1·1 und das des Korkholzes zu 0·24 gerechnet. — (1·87 kg.) **11.** Wie tief wird eine Holzkugel von $r = 5$ dm Halbmesser und dem spec. Gew. $f = 0{\cdot}4$ im Wasser einsinken? — (4·33 dm.) **12.** Die Krone des Königs von Syrakus wog 20 Pfd. und verlor im Wasser $1^1/_4$ Pfd. Wie gross musste Archimedes, der vermuthete, dass das Gold der Krone mit Silber gemischt sei, die Gewichte der beiden Metalle finden, wenn er das spec. Gew. des Goldes

= 19·26, das des Silbers = 10·47 kannte? — (15·146 Pfd. Gold, 4·854 Pfd. Silber.) **13.** Ein Platinwürfel verliert im Wasser 2 g, im Quecksilber 27·2 g; wie gross ist das spec. Gew. des Quecksilbers? — (13·6.) **14.** Eine Glaskugel verliert in Wasser 8·325 g, und in Weingeist 5·86 g; spec. Gew. des Weingeistes? — (0·8.) **15.** Ein Stück Platin von 1 kg verliert im Wasser 45 g; spec. Gew.? — ($22\frac{2}{9}$.) **16.** Ein Stück Eisen von 3 kg wiegt im Wasser 2·6 kg; spec. Gew.? — (7·5.) **17.** Ein Aräometer wiegt 13·5 g; beim Einsinken in Wasser bis zur Marke muss man 7 g, in Spiritus 2·9 g zulegen; spec. Gew. des Spiritus? — (0·8.) **18.** Ein Fläschchen, das 1000 Gran Wasser fasst, fasst 13 598 Gran Quecksilber, 1848 Gran Schwefelsäure, 1272 Gran Schwefelkohlenstoff, 715 Gran Äther; welches sind die spec. Gew.? — (13·598, 1·848, 1·272, 0·715.) **19.** Mittelst Kopp's Volumenometer fand man das Volumen von 1000 g gepulvertem Bimsstein 465 cm³, Stärkemehl 641 cm³, Baumwolle 787 cm³; spec. Gew.? — (2·15, 1·56, 1·27.) **20.** Wie lässt sich das spec. Gewicht eines Körpers mittelst einer Briefwage bestimmen? [Aufg. 8—12 sind von Fliedner und Krebs, 13—19 von Reis.]

§ 38. **Torricelli's Theorem.** (1644.) a) Torricelli wurde durch die Beobachtung und zahlenmässige Feststellung der Ausflussmenge einer Flüssigkeit aus der Bodenöffnung eines Gefässes der Begründer der Lehre von der Flüssigkeitsbewegung oder der Hydrodynamik. Er fand, dass die in den auf einander folgenden gleichen Zeittheilen ausgeflossenen Flüssigkeitsmengen sich verhalten wie die ungeraden Zahlen in umgekehrter Reihenfolge, oder dass die Ausflussmengen, nach den einander vorausgehenden gleichen Zeittheilen geordnet, sich direct verhalten wie die ungeraden Zahlen. Torricelli bemerkte, dass die Theilchen vom Boden bis in die Höhe des Flüssigkeitsspiegels zu steigen vermögen, und dass ihre Geschwindigkeit daher sein muss

$$v = \sqrt{2ah},$$

d. h. gleich der Geschwindigkeit eines Körpers, der in verticaler Bewegung nach aufwärts die Flüssigkeitshöhe zurückzulegen vermöchte, oder gleich der Geschwindigkeit eines Körpers, der frei die Höhe h von der Flüssigkeitsoberfläche bis zur Bodenöffnung herabgefallen ist.

Vom Standpunkte des Energieprincipes ist das Gesetz ohne weiteres einleuchtend, wenn man annimmt, dass beim Ausströmen von Flüssigkeitstheilchen aus der Bodenöffnung die Flüssigkeit im Gefässe ihre Energie nicht ändert, und dass nur für die in der Höhe h verschwundene, oberste Flüssigkeitsschichte die ausfliessenden Theilchen zum Vorschein kommen. Die Erhaltung der Energie fordert für die letzteren die lebendige Kraft, beziehungsweise die Geschwindigkeit eines von der Höhe h herabgefallenen Körpers.

In mathematischer Form folgt das Gesetz aus dem Arbeitswerte der Flüssigkeit (§ 36), deren Höhe h, Querschnitt S und specifisches Gewicht f seien, nämlich aus

$$W = \frac{1}{2} S \cdot h^2 \cdot f$$

oder in ganz allgemeiner Form

$$= \int_0^h f \cdot z \cdot S \cdot dz .$$

Infolge des Ausflusses eines Massentheilchens $m = S \cdot dh \cdot f/a$ ist die Änderung

$$dW = \frac{1}{2} mv^2 = h \cdot S \cdot f \cdot dh,$$

aus der nach Einführung des Wertes m sofort das angegebene Gesetz für die Ausflussgeschwindigkeit v folgt.

Die rechte Seite der letzten Gleichung entspricht in Bezug auf die allgemeine Form des Arbeitswertes W dem Arbeitswerte der obersten Flüssigkeitsschichte; das Ergebnis gilt daher ohne jede Einschränkung für jede beliebige Gefässform.

Zu den Ableitungsbedingungen muss bemerkt werden, dass die Flüssigkeit im Gefässe thatsächlich für sich Energie verbraucht, indem z. B. seitliche Strömungen gegen die Ausflussöffnung eintreten und eine Einschnürung des Flüssigkeitsstrahles verursachen; auch später zu behandelnde Molecularwirkungen (Reibung, Oberflächenspannung) ändern die Ausflussgeschwindigkeit.

Das gewonnene Gesetz gestattet, bei gegebener Druckhöhe die Ausflussgeschwindigkeit und umgekehrt aus der Geschwindigkeit die Druckhöhe zu bestimmen; der letztere Fall tritt bei Druckbestimmungen in Flüssen und Canälen ein.

b) Das Volumen V der in der Secunde ausfliessenden Flüssigkeitsmenge ist gleich dem Producte aus der Fläche der Ausflussöffnung in die Ausflussgeschwindigkeit, also ist

$$V = s \cdot \sqrt{2ah}.$$

Diese theoretisch berechnete Ausflussmenge wird in der Wirklichkeit modificiert durch den vernachlässigten Arbeitsverbrauch im Innern der Flüssigkeit und durch die Contraction des ausfliessenden Strahles; um den wahren Wert der Ausflussmenge zu erhalten, hat man den Wert für V noch mit einem Contractions-Coefficienten (0·6—0·8) zu multiplicieren. Bei Anwendung von dickem Boden oder Ansatzröhren werden die Verzögerungen theilweise paralysiert durch die Adhäsion zwischen Flüssigkeit und Röhrenwand, daher der Contractions-Coefficient etwas grösser ist. Die wirkliche Ausflussmenge durch die Öffnung eines dünnen Bodens ist daher in der Zeit t

$$V = 0{\cdot}6 \cdot s \cdot t \cdot \sqrt{2ah}.$$

Ist die Druckhöhe nicht constant, so ändert sich auch die Ausflussgeschwindigkeit; die Ausflussmenge kann dann mittelst der mitt-

leren Ausflussgeschwindigkeit gefunden werden. Ebenso lässt sich auch die Ausflusszeit der Flüssigkeit aus der mittleren Geschwindigkeit bestimmen; wir erhalten dafür aus

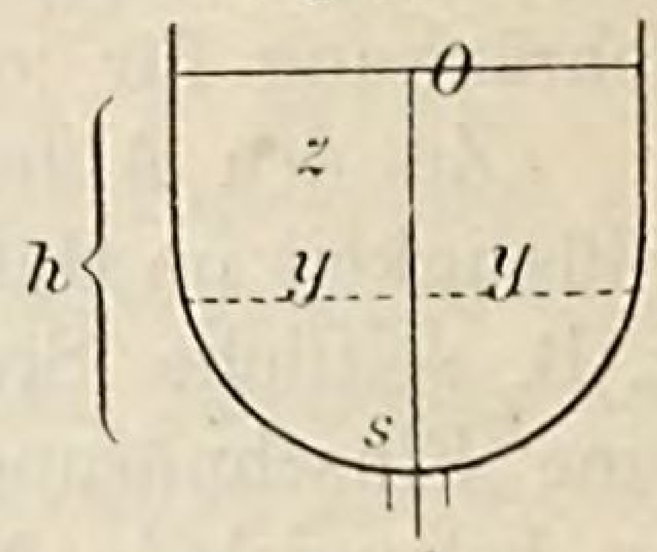
$$S \cdot h = 0{\cdot}5 \cdot 0{\cdot}6 \cdot s \cdot t \cdot \sqrt{2ah}$$

$$t = \frac{S}{0{\cdot}3 \cdot s} \cdot \sqrt{\frac{h}{2a}}.$$

Mit dem Weissbach'schen Apparate lassen sich diese Gesetze experimentell bestätigen.

c) Wasseruhren. Wenn aus einem Gefässe das Wasser so ausfliesst, dass die Wasseroberfläche sich gleichförmig senkt, so lässt sich die Vorrichtung zur Zeitmessung, also als Uhr benützen; es braucht bloss ein Schwimmer eine entsprechende Zeigervorrichtung in gleichförmige Bewegung zu setzen. Es ist zu diesem Zwecke die Form des Gefässes zu bestimmen[1]). Wählen wir hierzu einen horizontal liegenden Cylinder Fig. 35, dessen Erzeugenden normal zur Zeichenebene stehen und die Länge b haben, so ist der horizontale Schnitt des Gefässes überall ein Rechteck von constanter Breite b, und es bleibt uns bloss die Form der Leitlinie respective die Form der vordern und hintern Wandfläche zu ermitteln. Ist die ursprüngliche Wasserhöhe h um die Strecke z gesunken, so entspricht der Wasserdruck noch der Höhe $(h - z)$ und für die Ausflussgeschwindigkeit gilt

Fig. 35.



$$v^2 = 2a(h - z);$$

durch das Ausfliessen des Wassers durch die Bodenöffnung kommt auch das Wasser im Gefässe zum Sinken; ist die dieser Bewegung entsprechende Geschwindigkeit U, so gilt $S \cdot U = s \cdot v$. Mit Bezug auf das in Fig. 35 skizzierte Coordinatensystem wird $S = 2yb$ und demnach

$$v = \frac{2y \cdot b}{s} \cdot U;$$

durch Substitution dieses Wertes geht der Ausdruck für die Ausflussgeschwindigkeit über in

$$2(b^2 \cdot U^2) \cdot y^2 = s^2 \cdot a(h - z),$$

hierin muss die Geschwindigkeit U, mit welcher sich die Flüssigkeit im Gefässe senkt, constant sein. Die Gleichung, als eine Relation zwischen den Coordinaten y und z, bestimmt somit die Leitlinie des Cylinders zu einer Parabel, deren Scheitel am Boden des Gefässes und deren Parameter gleich $\frac{s^2 \cdot a}{b^2 \cdot U^2}$ ist.

1) Siehe F. Neumann: Einleitung in die theoretische Physik, S. 232.

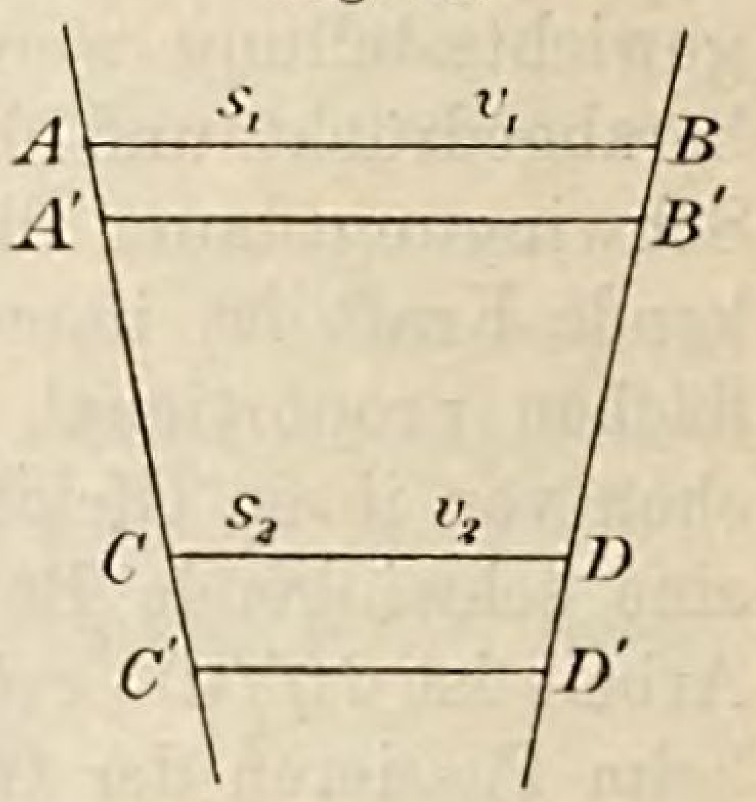
Aufg. 1. Ein Flüssigkeitstheilchen vom Volumen dV steht unter dem Drucke p pro Oberflächeneinheit; welche Arbeit wird geleistet, wenn das Theilchen durch seine Bewegung ins Freie von dem Drucke entlastet wird? — ($dW = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} (f/a) dV \cdot 2ah = p \cdot dV$. [1]) **2.** In einer U-förmig gebogenen Heberröhre vom Querschnitte Eins befinde sich eine Flüssigkeit von der Länge l und dem spec. Gewicht f; nach der Gleichgewichtsstellung werde die Flüssigkeit in einem Schenkel um die Höhe h herabgedrückt und dann dem Einfluss der Schwere überlassen. Es ist die Schwingungsdauer dieses Flüssigkeitspendels abzuleiten. — (Die wirkende Kraft ist immer der Niveaudifferenz $2h$ der freien Flüssigkeitsoberflächen proportional, also auch der Entfernung h der schwingenden Theilchen von ihren Gleichgewichtslagen proportional; somit entsteht nach § 12 eine schwingende Bewegung. Die während eines Zeitelementes geleistete Arbeit ist $l(f/a) \cdot v\,dv = 4h \cdot f \cdot dh$; folglich gilt für die Geschwindigkeit beim Passieren der Gleichgewichtslage $(l/a) \cdot v^2 = 4h^2$, wobei h die Amplitude. Denkt man mit dieser einen Kreis beschrieben, so wird derselbe mit der Geschwindigkeit v in gleicher Zeit zurückgelegt, als eine Doppelschwingung; daher $2h\pi = 2 \cdot vt$ und die Schwingungsdauer $t = \frac{1}{2} \pi \sqrt{l/a}$.) **3.** Aus einer 5 m unter dem Wasserspiegel befindlichen Öffnung soll das Wasser mit einer Geschwindigkeit von 15 m ausfliessen; welcher Druck ist auf die Wasseroberfläche auszuüben? — (Ein Druck von 6·25 m Wasserhöhe oder 0·625 kg auf den cm².) **4.** Wie viel Wasser fliesst in einer Stunde aus einer 10 cm² grossen Öffnung, welche unverändert 5·1 m unter dem Wasserspiegel bleibt? — (Theoretisch 36 m³.) **5.** In welcher Zeit wird ein cylinderförmiger Wasserbehälter von 3 m³ Querschnitt und von $2\frac{1}{2}$ m Höhe durch eine 10 cm² grosse Öffnung am Boden entleert, wenn nur 62% der theoretischen Angabe als die wirklich ausfliessende Wassermenge angesehen werden kann? — (3454 Sec.) **6.** Wo muss man bei einer cylinderförmigen Wasseruhr von 0·08 m³ Inhalt, von 40 cm Höhe und mit einer Öffnung am Boden von 0·079 cm² die Marken anbringen, damit sie die ganzen und halben Stunden anzeigt? — (Die Zeit der Entleerung beträgt 2 Std.; die Höhen der Marken verhalten sich wie 16 : 9 : 4 : 1; sie selbst sind 22·5 cm, 10 cm, 2·5 cm.) [Aufg. 3—6 sind von Müller-Erzbach.]

§ 39. **Der hydraulische Druck.** (Daniel Bernoulli 1738.) Daniel Bernoulli wies nach, dass der Druck der bewegten Flüssigkeiten je nach Umständen grösser oder kleiner sein kann, als der Druck der ruhenden Flüssigkeiten in denselben Gefässen. Wenn die Gefässe so gestaltet sind, dass der Flüssigkeitsdruck an gewissen Stellen eine Beschleunigung in der Bewegung hervorbringen kann, dann wird eine Druckverminderung eintreten; bei Flüssigkeitsstauungen wird der Druck

1) Der in einem Volumen V, das unter dem Drucke p pro Flächeneinheit steht, aufgespeicherte Arbeitswert $p \cdot V$ ist für die Bestimmung der Arbeitswerte im Felde der fernwirkenden und Cohäsionskräfte von grundlegender Bedeutung. Vgl. § 19.

vermehrt werden. Bernoulli nennt den Druck bewegter Flüssigkeiten hydraulischen oder hydrodynamischen Druck zum Unterschiede von dem hydrostatischen Drucke ruhender Flüssigkeiten. Das betreffende Gesetz entwickelte er aus dem Principe der lebendigen Kraft. Es ergibt sich in folgender einfachen Weise[1]: Figur 36 sei ein Theil eines Gefässes von der Form eines Rotations-Körpers; in demselben herrsche eine reibungslose stationäre Flüssigkeitsströmung. In der verschwindend kleinen Zeit dt habe sich das Flüssigkeitsvolumen $(ABCD)$ nach $(A'B'C'D')$ bewegt; dabei wird dieselbe Arbeit verrichtet, als wenn Flüssigkeit aus den Verhältnissen, die im Raume $(ABA'B')$ herrschen, unmittelbar in jene des Raumes $(CDC'D')$ versetzt würden, weil die Strömungs- und Energieverhältnisse im Zwischenraume $(A'B'CD)$ bei der betrachteten Bewegung unverändert bleiben.

Fig. 36.



Sind in den beiden Raumelementen die Querschnitte des Gefässes beziehungsweise s_1, s_2, die Geschwindigkeiten v_1, v_2, die Drücke auf der Flächeneinheit p_1, p_2 und die Tiefen unter dem Flüssigkeitsspiegel z_1, z_2, dann sind ihre Volumen $s_1 \cdot v_1 \cdot dt$ und $s_2 \cdot v_2 \cdot dt$ einander gleich, und mit Benützung der Flüssigkeitsdichte ϱ gibt der Satz der lebendigen Kräfte die Gleichung

$$\frac{1}{2} s_1 \cdot v_1 \cdot dt \cdot \varrho (v_2^2 - v_1^2) = s_1 \cdot v_1 \cdot dt \cdot \varrho \cdot a (z_2 - z_1) \\ + p_1 s_1 \cdot v_1 \cdot dt - p_2 s_2 \cdot v_2 \cdot dt,$$

d. h. der Zuwachs der lebendigen Kraft ist gleich der Arbeit der Schwere vermehrt um die Arbeit der Druckkräfte in der Flüssigkeit. Durch Abkürzung geht die Gleichung über in die Bernoulli'sche Form

$$\frac{1}{2} \varrho (v_2^2 - v_1^2) = \varrho \cdot a \cdot (z_2 - z_1) - (p_2 - p_1).$$

Unter den für das Torricelli'sche Gesetz giltigen Annahmen nimmt die Gleichung die Gestalt dieses Gesetzes an; wenn $v_1 = 0$, $z_1 = 0$, $p_2 = p_1$, so wird die Form

$$v^2 = 2ah$$

erhalten.

Dieser Wert für die Ausflussgeschwindigkeit v bei der Druckhöhe h soll dazu benützt werden, um in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung das Gesetz für den hydrodynamischen Druck p_2 in irgend einem Querschnitte s_2 des Gefässes zu gewinnen. Wir

1) F. Neumann, Einleitung in d. theor. Phys.; Mach, Entwicklg. d. Mech. S. 389; Poincaré, Thermodynamik. S. 113.

betrachten s_1 als die Fläche des Flüssigkeitsspiegels, p_1 als den daselbst herrschenden Druck und s als Fläche der Ausflussöffnung.

Die erstere Gleichung lässt sich leicht auf die Form bringen

$$\frac{1}{2}\varrho v_2^2\left(1-\frac{v_1^2}{v_2^2}\right)=\varrho a z_2-(p_2-p_1)\,.$$

Schreibt man für z_2 kurz z und berücksichtigt das Flüssigkeitsvolumen $s_1 v_1 = s_2 v_2 = s \cdot v$, so erhält man

$$\varrho\cdot a\cdot h\cdot\frac{s^2}{s_2^2}\left(1-\frac{s_2^2}{s_1^2}\right)=\varrho\cdot a\cdot z+p_1-p_2\,;$$

p_2 ist der im mittleren Querschnitte s_2 herrschende Druck; wird davon der auf der Oberfläche lastende Druck p_1 abgezogen, so erhält man den von der Flüssigkeit herrührenden Druck $p_2 - p_1$. Derselbe ist aus der vorstehenden Gleichung

$$p_2-p_1=\varrho\cdot a\left[z-h\frac{s^2}{s_2^2}\left(1-\frac{s_2^2}{s_1^2}\right)\right].$$

Die Gleichung erlangt deshalb praktische Wichtigkeit, weil sie zur Berechnung des Druckes in Röhren, welche entweder vom Boden oder von der Seitenwand des Gefässes ausgehen, verwendbar ist. Für eine solche vom Boden ausgehende seitliche Röhre ist $z = h$ und $\frac{s_2}{s_1}$ meist sehr klein, so dass das Quadrat dieses kleinen Bruches vernachlässigt werden kann; der Flüssigkeitsdruck wird dann

$$p_2-p_1=\varrho a h\left(1-\frac{s^2}{s_2^2}\right).$$

Darnach ist der hydraulische Druck in den Seitenröhren von der Röhrenlänge unabhängig, und nur abhängig von der Druckhöhe h und dem Verhältnisse der Querschnitte an den beiden Enden der Seitenröhre.

Diesem Gesetze ordnen sich eine Reihe specieller Fälle unter. Wird $s = 0$, d. h. die Ausflussöffnung der Röhre verschlossen, dann geht der hydraulische Druck in den hydrostatischen über.

Der hydraulische Druck kann auch negativ werden. Bei einer Seitenröhre, durch welche das Wasser ausfliesst, ist dies dann der Fall, wenn $s > s_2$, also wenn sich die Röhre nach aussen erweitert. (Bestätigung mittelst des Weissbach'schen Apparates.) Aber auch in einem verticalen Röhrensysteme lässt sich dies erreichen. Nach der vorstehenden allgemeineren, vorletzten Gleichung werden die Seiten und mit ihnen der hydraulische Druck negativ, wenn $s = s_2$ und $h > z$ sind, wenn also die mit einem Wasserbehälter in Verbindung stehende verticale Abflussröhre cylindrisch ist. Nach diesem Principe hat z. B. Venturi mittelst des Abflusswassers aus einem See in den Appeninen Sümpfe trocken gelegt.

Der negative Druck bewegter Flüssigkeiten äussert sich als Saugwirkung und wird deshalb auch anderweitig zum Saugen von Flüssig-

keiten und Gasen, wie z. B. bei Wassertrommelgefässen, Wasserluftpumpen etc. verwendet.

Aufg. 1. Ein weiter Wasserbehälter, in dem 1 m hoch Wasser steht, ist mit einer verticalen, cylindrischen Abflussröhre von 11 m Länge versehen; wie gross ist der hydrodynamische Druck in der Bodenöffnung des Gefässes? — ($p_2 - p_1 = -1$ kg, d. h.?) **2.** In einem Wasserbehälter befindet sich 2 m hoch Wasser; vom Boden geht eine seitliche Röhre aus, deren Öffnung in der Gefässwand 4 cm² und deren Ausflussöffnung 8 cm² sind. Wie gross ist der hydrodynamische Druck in der Wandöffnung? — ($p_2 - p_1 = -0{\cdot}6$ kg.) **3.** Wie gross ist der Druck, wenn die Seitenröhre cylindrisch ist? — ($p_2 - p_1 = 0$.) **4.** Ein Wasserstrahl vom Querschnitte s cm² (4) stosse mit der Geschwindigkeit v m (9·81) normal gegen eine feste Wand. Welchen Stoss übt der Wasserstrahl aus? — (Es ist die Kraft p zu bestimmen, welche jede auffallende Wasserschichte von der Dicke vdt äussert, indem sie ihre Geschwindigkeit v verliert; da p im Schwerpunkte der Schichte angreift, so ist nach dem Satze der lebendigen Kraft $p \cdot \frac{1}{2} vdt = \frac{1}{2} 0{\cdot}01 \cdot s \cdot v \cdot 10 \cdot \frac{1}{a} \cdot dt \cdot v^2$, daher $p = 0{\cdot}1 \cdot s \cdot v^2/9{\cdot}81 = 3{\cdot}924$ kg.) **5.** Ein Gefäss mit einer Seitenöffnung vom Querschnitte s (25 cm²) sei bis zur Höhe h (10 m) über dieser mit Flüssigkeit von der Dichte ϱ (0·8) angefüllt; wie gross ist bei Beginn des Ausflusses die Reaction P auf das Gefäss? — (Gemäss der vorhergehenden Aufgabe $P = 0{\cdot}2 \cdot h \cdot s \cdot \varrho = 40$ kg.) [Aufg. 5 ist von Daurer.]

§ 40. **Bewegung der Flüssigkeiten in engen Röhren.** In den vorstehenden Fällen, welche die Bewegung der Flüssigkeiten in weiten Gefässen behandeln, wurde angenommen, dass die von den wirkenden Druckkräften geleistete Arbeit stets in kinetische Energie der bewegten Flüssigkeitsmasse umgewandelt werde. Diese Annahme ist für enge Röhren unstatthaft, indem hier das Gesetz von der vollkommen leichten Verschiebbarkeit der Flüssigkeitstheilchen nicht mehr gilt, sondern Kräfte zwischen den kleinsten Körpertheilchen (Molecularkräfte) sich geltend machen, die deren Freibeweglichkeit hindern. Das Wasser haftet an den Wänden und wird daselbst zurück gehalten, und die zurückgebliebenen Wasserschichten wirken auf die voraneilenden hemmend; es macht sich ein Zusammenhalt der Flüssigkeitstheilchen, die sogenannte Cohäsion geltend. Die angedeuteten Bewegungshindernisse werden als Flüssigkeitsreibung bezeichnet.

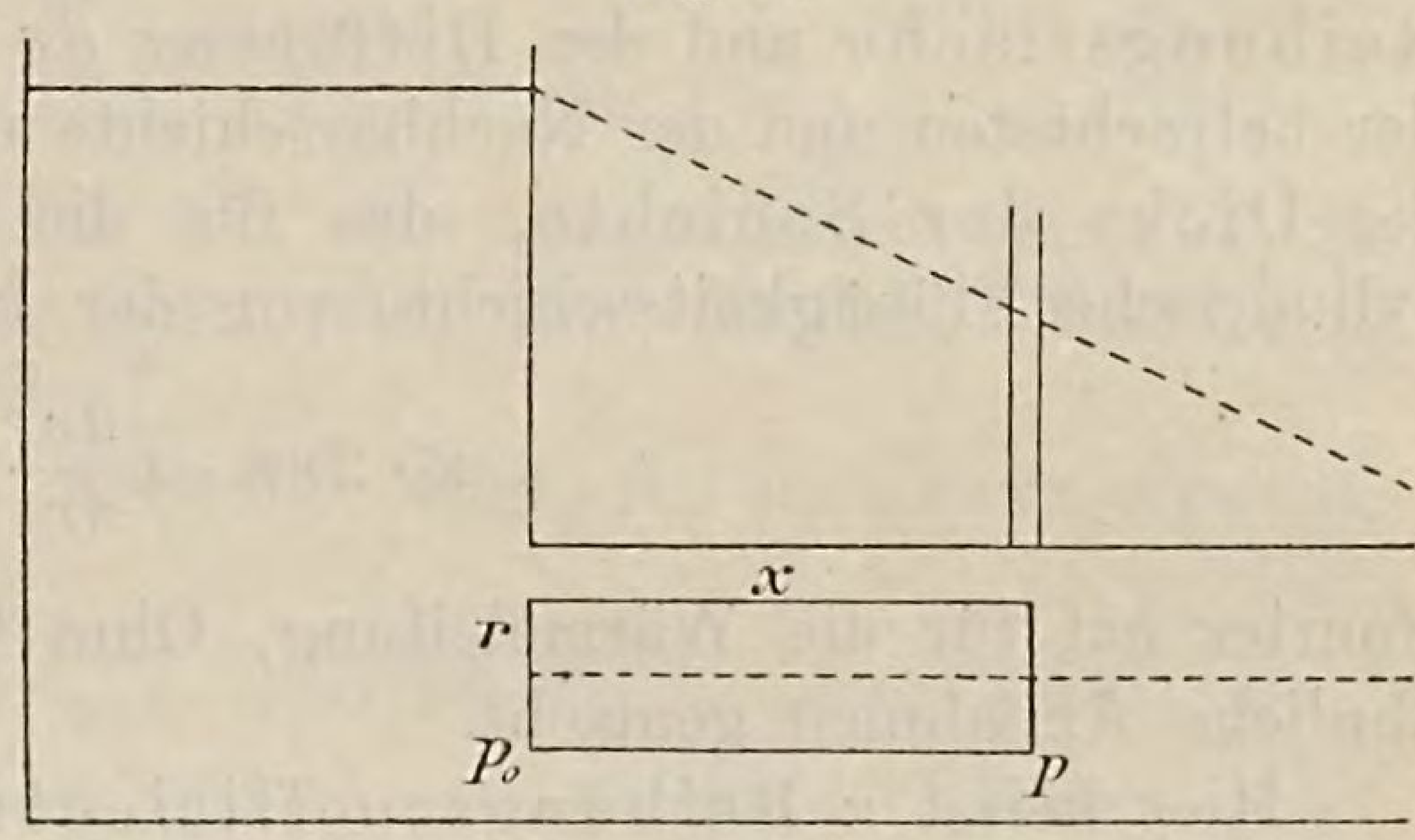
Unter Berücksichtigung der angegebenen Umstände betrachten wir eine Flüssigkeitsbewegung in einer engen horizontalen Röhre, welche mit einem Wasserbehälter in Verbindung steht[1]). An beigemischten Bernsteinkörnern beobachtet man, dass die Flüssigkeits-

1) Siehe auch Tait, Eigenschaften d. Materie. Deutsch von Siebert, S. 272; Ryšanek, der hydraul. Druck; Violle, Lehrb. d. Phys. II. S. 725.

theilchen horizontal und gleichförmig sich in der Röhre bewegen, und dass die Bewegung um so schneller erfolgt, je näher die Theilchen der Achse liegen. Bei Benetzung der Röhrenwand findet an dieser gar keine Bewegung statt. Aus der horizontalen Richtung der Bewegung kann man schliessen, dass die Querschnitte der Röhre Flächen gleichen Druckes sind; denn sonst müsste zum Zwecke der Ausgleichung der Drücke auch eine Bewegung in verticaler Richtung erfolgen. Von einem zum anderen Querschnitte werden aber die Drücke verschieden sein. Die gleichförmige Bewegung in horizontaler Richtung ist auch eine Bedingung der stationären Strömung, weil durch alle Querschnitte stets gleich viel Wasser fliessen muss.

Aus der gleichförmigen Bewegung der Theilchen, welche von der Röhrenachse dieselbe Entfernung r haben, die also auf einer zur Röhre concentrischen Cylinderfläche liegen, folgt, dass die lebendige Kraft der Theilchen während ihrer Bewegung nicht geändert wird, und dass daher die von dem Flüssigkeitsdrucke geleistete Arbeit der zur Überwindung der Reibung verbrauchten Arbeit gleich sein muss. Diese Beziehung gestattet, den in den einzelnen Querschnitten der Röhre herrschenden Flüssigkeitsdruck zu bestimmen. Wir betrachten (Fig. 37) von der Flüssigkeit einen sehr dünnen Hohlcylinder mit der ringförmigen Basis

Fig. 37.



$$ds = 2r\pi \cdot dr$$

und der Länge x, von der Gefässwand an gerechnet, und stellen die Arbeit auf für die Verschiebung des Cylinders um die Strecke dx. Der Überdruck an der Wandöffnung $(p_0 - p)$, bezogen auf die Fläche ds, leistet die Arbeit $(p_0 - p) \cdot ds \cdot dx$, und die Reibung, für deren Verzögerung wir α setzen, verzehrt die Arbeit $(ds \cdot x \cdot \varrho) \alpha \cdot dx$, wenn ϱ die Flüssigkeitsdichte angibt. Durch Gleichstellung beider Arbeitswerte erhält man

$$(p_0 - p) \cdot ds \cdot dx = ds \cdot x \cdot \varrho \cdot \alpha \cdot dx,$$

oder abgekürzt und ϱ mit der Constanten α verbunden gedacht,

$$p = p_0 - \alpha \cdot x.$$

Mit Rücksicht auf den bekannten Flüssigkeitsdruck an der Ausflussöffnung, nämlich $p = 0$ für $x = l$, wird $\alpha = p_0 / l$. Der dort herrschende Luftdruck, der sich auch in der Flüssigkeit fortpflanzt,

wird von dem auf der Flüssigkeit im grossen Gefässe lastenden Luftdruck aufgehoben. Somit wird der Druck

$$p = p_0 \frac{l - x}{l},$$

d. h. der Flüssigkeitsdruck p in der Röhre nimmt im linearen Verhältnisse mit der Entfernung vom Reservoir ab oder ist direct proportional der Entfernung von der Ausflussöffnung. Derselbe kann durch Flüssigkeitshöhen in verticalen Röhrchen, die an dem Seitenrohre angebracht sind, gemessen werden. Sind mehrere solcher Röhrchen vorhanden, so liegen die Enden aller Flüssigkeitshöhen in einer geraden Linie.

Wegen der Ähnlichkeit der Flüssigkeitsströmung in einer engen Röhre mit dem elektrischen Strome soll noch die Ausflussmenge, beziehungsweise die in einer Zeiteinheit durch jeden Querschnitt strömende Flüssigkeitsmenge (Stromintensität) berechnet werden. Zu diesem Zwecke benützen wir für die Reibung einen von Newton aufgestellten Wert, der durch die Übereinstimmung der Rechnungsresultate mit den Versuchsergebnissen hinreichend bestätigt wurde. Wir setzen die Reibung in einer Flüssigkeitsschichte proportional der Reibungsfläche und der Differenz dv der Geschwindigkeiten der betrachteten und der Nachbarschichte und umgekehrt proportional der Dicke der Schichte, also für die in der Figur angedeutete cylindrische Flüssigkeitsschichte von der Länge x gleich

$$\varkappa \cdot 2 r \pi \cdot x \frac{dv}{dr}.$$

Fourier hat für die Wärmeleitung, Ohm für den elektrischen Strom ähnliche Annahmen gemacht.

Hier heisst $\varkappa$ Reibungscoefficient; seine Dimension ist

$$[M L^{-1} T^{-1}].$$

Die Bewegung der betrachteten Flüssigkeitsschichte wird infolge der Reibung von der benachbarten inneren Schichte beschleunigt, von der benachbarten äusseren Schichte verzögert; die resultierende Wirkung der Reibung ist die Differenz beider Einwirkungen und daher gegeben durch die Form

$$\varkappa \cdot 2 \pi x \cdot \frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr}\right) dr.$$

Diese verzögernde Kraft muss der bewegenden Kraft $(p_0 - p) \cdot 2 r \pi \cdot dr$ oder der ihr gleichen Grösse $- \alpha \cdot x \cdot 2 r \pi \cdot dr$ gleich sein; somit gilt die Gleichung

$$\varkappa \cdot 2 \pi x \frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{dv}{dr}\right) dr = - \alpha \cdot x \cdot 2 r \pi \cdot dr,$$

daraus erhält man[1])

$$r\frac{dv}{dr} = -\frac{\alpha}{2\varkappa}\cdot r^2.$$

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil für $r = 0$, d. i. für einen unendlich dünnen Faden in der Achse der Reibungswert dv/dr keine constante unendliche Grösse sein kann.

Wenn nun r_0 der Halbmesser der Bohrung des Rohres ist, und wenn vorausgesetzt wird, dass die Flüssigkeitstheilchen an der Rohrwand fest haften und sich nicht bewegen, so wird die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsschichte

$$v = \frac{\alpha}{4\varkappa}\cdot(r_0^2 - r^2);$$

die Flüssigkeitsmenge, welche in der Zeiteinheit jeden Querschnitt passiert, ist

$$M = \int_0^{r_0} v\cdot 2r\pi\cdot dr = \frac{\pi\cdot\alpha}{8\cdot\varkappa}\cdot r_0^4,$$

d. h. die Ausflussmenge aus einem engen Röhrchen ist der 4. Potenz des Röhrchenhalbmessers proportional. Dieses Gesetz wurde von Poiseuille (1846) aufgestellt. Dasselbe lässt sich in der Form

$$M = \frac{(p_0 - p)r_0^2\cdot\pi}{8\pi\cdot\varkappa/r_0^2\cdot\pi} = \frac{P}{R},$$

wobei P als bewegende Kraft für die Längeneinheit und R als Widerstand betrachtet werden kann, mit dem Ohm'schen Gesetze in der Elektricitätslehre verglichen[2]).

Aus den Versuchen von Poiseuille folgt, im cm-gr-sec.-Systeme ausgedrückt, für Wasser bei

$$0^0\text{ C},\ \varkappa = 0{\cdot}018;\quad 10^0\text{ C},\ \varkappa = 0{\cdot}013;\quad 20^0\text{ C},\ \varkappa = 0{\cdot}010,$$

d. h. wenn der Zwischenraum zwischen zwei parallelen Ebenen, deren Abstand 1 cm ist, mit Wasser von 0^0 C gefüllt ist, und eine Ebene bewegt sich parallel zur anderen mit einer Geschwindigkeit von 1 cm in der Secunde, so wirkt eine Kraft von 0·018 Dyn auf 1 cm². Man bemerkt, dass die Reibungscoefficienten mit wachsender Temperatur rasch abnehmen.

1) Behufs elementarer Summierung vgl. die Anm. § 2 und § 23.

2) Riecke, Über einige Beziehungen zwischen hydrodynamischen und elektrischen Erscheinungen. Kgl. Gesellsch. d. W. Göttingen 1887. Nr. 1.

III. Von dem Gleichgewichte und der Bewegung der Gase.

§ 41. **Eigenschaften der Gase.** Der wichtigste und am meisten verbreitete gasförmige Körper ist die Luft. Insoferne dieselbe bei den mechanischen Erscheinungen als Vertreter der Gase betrachtet wird, heisst die Mechanik der gasförmigen Körper auch Aëromechanik.

Die Gase haben mit den Flüssigkeiten die Schwere und die leichte Verschiebbarkeit der Theilchen gemeinsam; sie unterscheiden sich von diesen durch die vollkommene Elasticität, indem sie leicht zusammendrückbar und stets ausdehnsam sind. Infolge der Ausdehnsamkeit haben die Gase das Bestreben, sich nach allen Seiten hin auszubreiten; sie müssen deshalb in ringsum geschlossenen Gefässen aufbewahrt werden, und sie üben auf die Wände desselben einen Druck aus, welcher Spannkraft oder Expansivkraft genannt wird.

a) Das Gewicht der Luft. Die Eigenschaft der Schwere der Luft wurde erst in neuerer Zeit klar erkannt[1]). Aristoteles zählte die Luft zu den leichten Körpern, die ihren Platz oben suchen und nach unten keinen Druck ausüben. Aus seinen Einwänden gegen die Theorie des leeren Raumes von Demokrit und den Atomisten zog man die Folgerung, die er selbst nicht ausgesprochen hatte, und lehrte in den Schulen des Mittelalters, dass es keinen leeren Raum gäbe und auch keinen geben könne, weil die Natur eine Abneigung (horror vacui) vor ihm hätte. Erst Galilei (1564—1642) sprach sich dahin aus, dass die Natur wohl keinen „horror vacui" haben könnte; er stellte die Schwere der Luft fest, indem er nachwies, dass ein Gefäss, in welchem Luft zusammengedrückt wird, an Gewicht zunimmt, und er lenkte die Aufmerksamkeit auf die Thatsache, die ihm eines Tages ein Brunnenmeister aus Florenz mitgetheilt hatte, dass das Wasser in der Röhre einer angelegten Saugpumpe weder mit Pumpen noch mit einer anderen Maschine höher zu heben sei als auf 18 Ellen (ca. 10 m.).

Zur Erklärung dieser Erscheinung nahm Galilei an, dass das eigene Gewicht die Wassersäule hindere, aufzusteigen, und schloss, dass eine Flüssigkeitssäule um so höher steigen werde, je weniger

1) Rosenberger, Geschichte d. Phys.; Violle, Lehrb. d. Phys. II. 735; Pellat, Cours de Phys. I. S. 202.

dicht sie ist. Sein Schüler Torricelli entnahm aus dieser Lehre, dass beim Heben des Kolbens in der Saugpumpe über 18 Ellen hinaus oberhalb der Wasserfläche ein leerer Raum entstehen müsse und widerlegte damit die herrschende Ansicht über den horror vacui. Nach einer Andeutung seines Lehrers stellte Torricelli auch diese Luftleere dar, indem er eine auf einer Seite geschlossene Glasröhre mit Quecksilber füllte, die Röhre auf der offenen Seite mit dem Finger verschloss, umkehrte und dann mit dem unteren Ende in ein mit Quecksilber gefülltes Gefäss brachte. Die Quecksilbersäule hielt sich dann ca. 76 cm über dem Niveau des Quecksilbers im Gefässe, und über derselben war der leere Raum erkennbar. Der Versuch ist heute unter dem Namen „Torricelli's Versuch" bekannt. Der Entdecker selbst schrieb über denselben in einem Briefe vom 11. Juni 1644 an Michel-Ange Ricci: „Wir leben auf dem Grunde eines Luftoceanes und wissen durch unzweifelhafte Versuche, dass die Luft schwer ist. Auf der Oberfläche der Flüssigkeit in dem äusseren Gefässe lastet eine Luftsäule von 50 Meilen Höhe. Ist es da wunderbar, wenn das Quecksilber, welches weder Widerwillen noch Zuneigung für die Röhre zeigt, in dieselbe eintritt und darin ansteigt, bis das Gleichgewicht mit der Luft hergestellt ist, welche es hinaufpresst?" Ferner führt er noch an, „er habe den Versuch ausgesonnen, nicht nur um in einfacher Weise ein Vacuum herzustellen, sondern um ein Instrument zu besitzen, welches die Schwankungen der Luft anzeigen kann, die bald schwerer und dichter, bald leichter und dünner ist". — Der Versuch wurde von Pascal mit verschiedenen Flüssigkeiten wiederholt und darnach zur Construction von Quecksilberbarometern verwendet. (Gefäss- und Heberbarometer.) Nach Pascal's genauer Angabe wurde von seinem Schwager Périer (1648) der Luftdruck am Fusse und auf der Spitze eines Berges und dann eines Thurmes von Clermont gemessen und erkannt, dass bei 6—7 Toisen Erhebung die Quecksilbersäule ungefähr $^1/_2'''$ sinkt. Pascal selbst fand durch eigene Messungen das Resultat bestätigt; er hielt damit für unzweifelhaft erwiesen, dass nicht etwa die Natur den leeren Raum scheue, sondern dass die entdeckten Erscheinungen der Schwere und dem Luftdrucke zuzuschreiben sind.

b) Fortpflanzung des Druckes. Nachdem Pascal weiterhin gefunden, dass die Höhe der Quecksilbersäule unabhängig ist von der Grösse des Querschnittes und von der Form der Röhre, und dass sie auch erhalten bleibt, wenn man das im Freien befindliche untere Ende vertical nach aufwärts (U-förmig) oder horizontal biegt, ja selbst, wenn die untere Öffnung direct nach unten gekehrt ist (vorausgesetzt, dass dieselbe eng genug ist, um das Eintreten der Luft zu hindern), dehnte er sein Princip der gleichmässigen Fortpflanzung des Druckes von den Flüssigkeiten auch auf Gase aus. Die Begründung

liegt in der leichten Verschiebbarkeit der Theilchen, welche Eigenschaft für Gase ebenso gilt wie für Flüssigkeiten.

Als Gasdruck oder Spannung wird stets der Druck auf die Flächeneinheit in Rechnung gezogen. Durch Multiplication mit der Anzahl der Flächeneinheiten erhält man den Druck auf jede beliebige Fläche. Mit dieser Feststellung ist auch die darauf beruhende Giltigkeit des Archimedischen Gesetzes von dem Gewichtsverluste der Körper in der Luft gegeben. Dasselbe begründet das Aufsteigen leichter Körper in einem dichteren Mittel und stellt demnach die Ansicht des Aristoteles von dem Streben der leichten Körper nach oben richtig.

In neuer augenfälligen Weise wurde der Luftdruck und dessen Fortpflanzung nach allen Seiten durch die Erfindung der Luftpumpe von Otto v. Guericke (1650) nachgewiesen. Dieselbe gestattet mittelst einer Saugpumpe einen Ballon, eine Glasglocke oder dergleichen luftleer zu machen und eine Reihe Erscheinungen, die auf dem Luftdrucke beruhen, in einfacher Weise hervorzurufen. (Magdeburger Halbkugeln, Sprengen einer Blase oder einer Glasplatte, Quecksilberregen, Nachweis des Archimedischen Gesetzes mittelst des Wagemanometers, Versuche über den freien Fall, über Schallleitung etc.)

Mit Hilfe der Luftpumpe wurde auch die Construction von Metallbarometern möglich, die nach Vidi aus einer luftleer gepumpten Blechdose und nach Bourdon aus einer luftleeren, gekrümmten Röhre aus Messingblech bestehen. Die Luftdruckänderungen rufen eine Änderung in der Gestalt dieser hohlen Blechgefässe hervor und bringen eine Hebel- und Zeigervorrichtung in Bewegung, die an einer empirisch hergestellten, Barometerstände angebenden Eintheilung abgelesen werden kann.

c) Elasticität. Die Zusammendrückbarkeit und Ausdehnsamkeit der Gase wird durch das von Boyle (1662) und von Mariotte (1676) aufgestellte Gesetz genau bestimmt. Zum Nachweise bedient man sich nach beiden Physikern einer U-förmig gebogenen Glasröhre mit ungleich langen Schenkeln, von denen der kürzere verschlossen, der längere offen ist. Giesst man nun Quecksilber durch die Öffnung des längeren Schenkels, so wird die Luft im kürzeren Schenkel zusammengepresst und übt einen stärkeren Druck aus, als die freie Atmosphäre; der Überdruck wird durch das Übergewicht des Quecksilbers im längeren Schenkel gemessen. Durch Ablesung an einer neben der Röhre befindlichen Eintheilung findet man als Ergebnis mehrerer Versuche, dass die abgeschlossenen Luftvolumen im kürzeren Schenkel sich umgekehrt wie die betreffenden Spannungen der Luft verhalten, oder dass das Product aus dem jeweiligen Drucke p und dem Volumen v eine unveränderliche Grösse ist, dass also

$$p \cdot v = R \text{ const.}$$

ist. Das Gesetz, das die Namen seiner Entdecker führt, gilt auch für verdünnte Luft und wird für diese nachgewiesen, indem man eine gerade, oben geschlossene, unten offene Glasröhre theilweise mit Quecksilber füllt und dann nach Art des Torricelli'schen Versuches mit dem offenen Ende unter Quecksilber bringt. Zieht man dann die Glasröhre stückweise in die Höhe, so wird der Luftraum darin vergrössert, die Luft verdünnt und deren Druck vermindert. Das Gewicht der Quecksilbersäule in der Röhre über dem äusseren Quecksilberniveau gibt den Druckunterschied gegenüber dem äusseren Luftdruck an. Bei doppeltem Luftraume steigt die Quecksilbersäule auf die halbe Höhe des Barometerstandes.

Das Boyle'sche Gesetz ist von Dulong und Arago für Luft bis zum Drucke von 26 Atm. als nahe richtig erwiesen worden. Regnault (1810—1878) fand durch sehr genaue, kunstvolle Messungen, dass das Gesetz nur für geringe Drücke streng gilt; alle seine Versuchsergebnisse genügten besser folgender empirischen Formel:

$$\frac{p \cdot v}{p_0 \cdot v_0} = 1 - A\left(\frac{v_0}{v} - 1\right) + B\left(\frac{v_0}{v} - 1\right)^2,$$

oder, wenn p_0 und v_0 als Druck- beziehungsweise als Volumseinheiten angenommen werden,

$$p \cdot v = 1 - A\left(\frac{1}{v} - 1\right) + B\left(\frac{1}{v} - 1\right)^2.$$

Für Luft ist $A = 0{\cdot}001105$, $B = 0{\cdot}00001938$,
für Stickstoff ist $A = 0{\cdot}000690$, $B = 0{\cdot}000070405$,
für Kohlensäure ist $A = 0{\cdot}008532$, $B = 0{\cdot}0000072856$.

Das Boyle'sche Gesetz zeigt sich umsomehr ungenau, je näher das Gas durch Druck und Abkühlung dem flüssigen Zustande gebracht wird. Hierüber haben Cailletet und Amagat äusserst sorgfältige Versuche ausgeführt. Alle bezüglichen Untersuchungen weisen darauf hin, dass die Abweichung der Spannung durch die wechselseitige Einwirkung der Gastheilchen bedingt ist. Gase, bei welchen eine solche Einwirkung nicht stattfindet oder doch so gering ist, dass sie vernachlässigt werden kann, folgen dem Boyle'schen Gesetze und werden „vollkommene“ oder „ideale“ Gase genannt.

In diesem Abschnitte werden nur sogenannte vollkommene Gase betrachtet werden. Jedoch soll noch gezeigt werden, dass die aufgestellte Regnault'sche Gleichung auf die Form des Boyle'schen Gesetzes gebracht werden kann und daher eine ähnliche Deutung zulässt, wie sie diesem Gesetze im folgenden Paragraphen gegeben werden wird. Wir schreiben die Gleichung in der Form

$$p \cdot v = (1 + A + B) - \frac{A + 2B}{v} + \frac{B}{v^2}$$

und setzen

$$1 + A + B = R, \quad B = R \cdot \frac{B}{R} = R \cdot \omega^2,$$

so dass

$$\omega = \sqrt{\frac{B}{1 + A + B}}.$$

Damit wird

$$p \cdot v = R - \frac{A + 2B}{v} + \frac{R \cdot \omega^2}{v^2}$$

und

$$p = \frac{R}{v} - \frac{A + 2B}{v^2} + \frac{R \cdot \omega^2}{v^3}.$$

Wird die letzte Gleichung mit ω multipliciert und mit Vernachlässigung des letzten kleinen Gliedes von der vorletzten subtrahiert, so folgt

$$p \cdot (v - \omega) = R - \frac{R\omega + A + 2B}{v} + \frac{R\omega^2 + (A + 2B)\omega}{v^2},$$

oder

$$p \cdot (v - \omega) = R - \frac{a}{v^2}(v - \omega), \quad \text{wenn} \quad a = R \cdot \omega + A + 2B,$$

und endlich

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) \cdot (v - \omega) = R.$$

Dieses ist die van der Waals'sche Zustandsgleichung, welche auf theoretischem Wege abgeleitet wurde und nicht bloss für Gase, sondern auch für Dämpfe und Flüssigkeiten als giltig angesehen wird[1]). Die Übereinstimmung ihrer Form mit dem Boyle'schen Gesetze ist augenscheinlich, es erscheint nur der Druck p um eine gewisse Grösse vermehrt und das Volumen um einen Betrag ω vermindert. Die Bedeutungen der betreffenden Werte als Cohäsionsdruck und Molecularvolumen sollen in der Lehre von den Molecularkräften nachgewiesen werden.

Für Luft erhält man nach den oben angeführten Regnault'schen Bestimmungen für A und B die Werte

$$\omega = 0{\cdot}0044, \quad a = 0{\cdot}00551, \quad R = 1{\cdot}0011244.$$

Dieselben Ziffern erhält Dühring[2]) nach einer anderen Transformation, während die Waals'schen Angaben davon etwas abweichen. Als Einheit des Druckes gilt dabei der Druck einer 1 m hohen Quecksilbersäule und als Volumseinheit das Volumen des Gases unter diesem Drucke bei 0^0 C.

Apparate, welche auf der Wirkung der Gasspannung beruhen, sind: Luftpumpe, Manometer, Saug- und Druckpumpe, Stech- und Saugheber, die Mariotte'sche Flasche, Gasometer u. a.

1) Van der Waals, die Continuität des gasförmigen u. flüssigen Zustandes. Deutsch von Roth. 1881.

2) E. und U. Dühring, Neue Grundgesetze d. Phys. u. Ch. S. 28. 1886.

Aufg. 1. Wie gross ist der Luftdruck auf 1 cm^2 bei einem Barometerstande von 0·76 m? — (76 · 13·59 g = 1·03284 kg.) **2.** Welche Höhe muss eine Wassersäule haben, um dem mittleren Drucke der Atmosphäre am Meeresspiegel das Gleichgewicht zu halten? — (10·33 m.) **3.** Wieviel Atmosphärendrücken ist ein Fisch in einer Tiefe von 100 m unter der Meeresfläche ausgesetzt? — (9·68 Atm.) **4.** Bis zu welcher Höhe kann durch das Saugen des Kolbens in einer Pumpe das Wasser gehoben werden? — (10·33 m.) **5.** Eine Saug- und Hebepumpe hat einen Kolben, dessen Fläche $= s$; der Abstand ihrer Ausflussöffnung vom Wasserspiegel ist $= h$ und die Hubhöhe des Kolbens $= b$; wie gross ist die zum Auspumpen des Wassers nöthige bewegende Kraft P und wie gross die Arbeit W des Kolbens, abgesehen von allen Bewegungshindernissen? — (Aus dem Luft- und Wasserdruck ergibt sich für jede Kolbenstellung $P = s \cdot h \cdot f$, $W = P \cdot b = s \cdot b \cdot h \cdot f$, $f =$ spec. Gewicht des Wassers.) **6.** Wie gross ist die bewegende Kraft, sowie die Arbeit bei einer Saug- und Druckpumpe, welche die Dimensionen der Saug- und Hebepumpe in der vorhergehenden Aufgabe hat? Der Berechnung ist der Abstand des Kolbens vom Wasserspiegel $= y$ zugrunde zu legen. — (Beim Aufziehen ist $P = s \cdot y \cdot f$, $W = s \cdot f \cdot \int y\, dy = \frac{1}{2} s f (y^2 - y_0^2) = s \cdot f \cdot y \cdot b$. Beim Niedergehen ist $P = sf(h - y)$, $W = sfb(h - y)$. Beide Arbeiten zusammen sind $sfhb$.) **7.** Bei einer Saug- und Hebepumpe hat der Kolbendurchschnitt 60 cm^2 und die Ausflussöffnung eine Höhe von 3 m über dem Wasserspiegel; welche Kraft ist zum Auspumpen nöthig? Wie gross ist die zu dieser Pumpe nöthige Arbeit, wenn der Kolben 15 mal spielt und seine Hubhöhe 0·5 m ist? Wieviel Wasser liefert dabei die Pumpe und wie gross ist der Effect, wenn der Kolben in einer Minute 15 mal spielt? — (18 kg, 135 kgm, 0·27 m^3, 2·25 Sec. kgm.) **8.** Das spec. Gewicht der Luft an der Erdoberfläche ist bei 0^0 Temperatur und 760 mm Barometerstand 0·001293 g. Wenn es nun in allen Höhen dasselbe wäre, wie hoch würde die Atmosphäre reichen? Und warum muss die so berechnete Höhe zu klein ausfallen? — (7988 m.) **9.** Es soll die Höhe berechnet werden, welche die Atmosphäre haben würde, wenn sie sich bis zu derjenigen Entfernung von der Erdoberfläche erstrecken könnte, in welcher die Schwerkraft der durch die Umdrehung der Erde bedingten Fliehkraft gleich ist. Die Beschleunigung der Schwere am Äquator ist 9·81 m, die Beschleunigung der Fliehkraft daselbst 0·0339 m. Die Höhe $(x - 1)$ ist in Erdhalbmessern auszudrücken. — (Aus $9{\cdot}81 / x^2 = 0{\cdot}0339 \cdot x$ folgt $x - 1 = 5{\cdot}6$ Erdhalbmesser.) **10.** Wie hoch ist die Luftsäule, welche bei 0^0 C und 760 mm Barometerstand denselben Druck ausübt, wie eine Quecksilbersäule von 1 mm Höhe? Das spec. Gewicht der Luft ist 0·001293 g, das des Quecksilbers 13·59 g. — (10·5 m.) **11.** Der Erfinder der Luftpumpe, Otto von Guericke, Bürgermeister von Magdeburg, stellte im Jahre 1654 auf dem Reichstage zu Regensburg vor Kaiser und Reich Versuche mit der Luftpumpe an, wobei zum Erstaunen der Anwesenden die sogenannten Magdeburger Halbkugeln von 22 Zoll Durchmesser, nachdem sie möglichst luftleer gemacht waren, nur mit Hilfe von Pferden auseinander gerissen werden konnten. Mit welcher Kraft waren die beiden Halbkugeln durch die äussere Luft aneinander gedrückt? Luftdruck auf

1 Quadratzoll = 15 Pfd.) — (Jede der beiden Halbkugeln wurde mit der Kraft von $11^2 \cdot 3{\cdot}1416 \cdot 15 = 5702$ Pfd. gedrückt.) **12.** Um sich zu überzeugen, ob die Luft schwer sei, nahm Aristoteles eine Blase, wog sie zuerst mit Luft gefüllt und dann im zusammengedrückten Zustande, also möglichst luftleer. Da er bei beiden Wägungen dasselbe Gewicht fand, so schloss er daraus, die Luft sei nicht schwer. Welchen Umstand hatte er übersehen? **13.** Eine Glaskugel, deren innerer Halbmesser $r = 14{\cdot}1$ cm, wiegt mit atmosphärischer Luft gefüllt $q_1 = 349{\cdot}321$ g, luftleer gemacht aber nur $q_2 = 333{\cdot}975$ g; wieviel wiegt 1 cm^3 Luft? — (0·001307 g, genaue Messung gibt für 0^0 C und 760 m Barometerstand 0·001293 g.) **14.** Wie gross ist die Steigkraft eines bei 0^0 C und einem Barometerstande von 760 mm mit reinem Wasserstoff gefüllten Ballons von 600 m^3 Inhalt, wenn dessen Gewicht nebst Zubehör 520 kg ist? Das spec. Gewicht der Luft $\doteq$ 0·0013 g, jenes des Wasserstoffes $= 0{\cdot}0013 \cdot 0{\cdot}07$ g. — (206 kg.) **15.** Wie gross muss der Durchmesser eines kugelförmigen Luftballons sein, der mit reinem Wasserstoff vom spec. Gewicht 0·000091 g gefüllt, mit einem Gewichte von 363 kg in die Höhe steigen soll? Spec. Gewicht der Luft = 0·001293 g. — (Grösser als 8·3 m.) **16.** Unter welchem Drucke fliesst das Wasser aus einem Winkelheber, wenn im kürzeren Schenkel, der ins Wasser taucht, die Wassersäule h und im längeren, ins Freie gehenden Schenkel die Wassersäule H cm hoch ist? — ($H - h$ gr.) [Fliedner und Krebs.]

§ 42. **Das Spannungsgesetz als Arbeitsgleichung.** Das Boyle'sche Gesetz gibt das Product aus der Gasspannung p pro Flächeneinheit in das Volumen v als eine constante Grösse an; es ist darnach

$$p \cdot v = R.$$

Dasselbe Product wurde bei Flüssigkeiten (S. 130) als Arbeitswert erhalten; ebenso wie dort gibt es auch hier die Arbeit an, welche der Körper bei Entlastung von seinem Drucke leisten kann. Denn es ist ohne weiteres einleuchtend, dass der Arbeitswert eines unter einem gewissen Drucke stehenden Gases dem Gasvolumen proportional sein muss, weil ja Gasmengen in gleichen Volumtheilen unter denselben Umständen auch gleiche Arbeiten verrichten; und der Factor von v [dim. L^3] muss seiner Dimension nach ein Druck sein, damit das Product die Dimension einer Arbeit $[M \cdot L^2 \cdot T^{-2}]$ habe. Dass dieser Arbeitsfactor p [dim. $M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$] mit dem wirklich vorhandenen Gasdruck übereinstimmt, folgt leicht aus dem Ausflussgesetze (§ 38 und § 44).

Mit Hilfe des Principes der virtuellen Bewegung kann man das Gesetz unmittelbar auf folgende Weise ableiten: Wir halten ein Gas, das sich in einem cylindrischen Gefässe vom Querschnitte s befindet, mit dem Kolbendrucke $p \cdot s$ im Gleichgewichte; alsdann legen wir ein Übergewicht dp für jede Flächeneinheit hinzu und gestatten dem Kolben die Verschiebung dh. Dabei leistet der Kolbendruck die Arbeit $(p + dp) \cdot s \cdot dh = p \cdot dv$, wenn $s \cdot dp \cdot dh$ als verschwindend kleine Grösse der zweiten Ordnung vernachlässigt wird. — Die ge-

leistete Arbeit wird zur Verschiebung der einzelnen Gasschichten verbraucht, deren Spannung um dp wächst. Diese Arbeit des Spannungszuwachses für eine Schichte ist $s \cdot dp \cdot \lambda$, wenn λ die Verschiebung der betreffenden Grundfläche s angibt. Theilt man den ganzen Gascylinder in Schichten von der Dicke der entsprechenden Verschiebung λ, so erhält man unter der Voraussetzung einer gleichmässigen Druckfortpflanzung als Arbeit des Spannungszuwachses der ganzen Gasmasse $\Sigma s \cdot dp \cdot \lambda = s \cdot dp \cdot \Sigma \lambda = v \cdot dp$. Mittelst der hydrostatischen Grundgleichung hätte dieser Wert direct angeschrieben werden können. Nach dem Principe der virtuellen Bewegung ist nun die Summe der geleisteten Arbeiten gleich Null, wenn keine andere Arbeit sonst in Betracht kommt; also ist

$$p \cdot dv + v \cdot dp = 0,$$

eine Beziehung, welche die Ableitung ist von $p \cdot v = R$.

Dies ist das Boyle'sche Gesetz in der Form eines Arbeitswertes, der die auf Gas angewandten äusseren Arbeitsleistungen und die aufgespeicherte Energie einschliesst. Ostwald nennt diesen Arbeitswert Volumenergie.

Nach dem Helm'schen Intensitätsgesetz ist der Druck p als Intensität oder Wirkungsgrad und das Volumen v als Extensität oder Wirkungsraum zu betrachten.

Da die van der Waals'sche Zustandsgleichung der Form nach mit dem Boyle'schen Gesetze übereinstimmt, so folgt auch ihre Bedeutung als Arbeitsgleichung. Es ist der äussere Druck p nur noch um den Cohäsionsdruck der Flüssigkeit zu vermehren und das Volumen v um einen Theil, der der Druckänderung nicht unterworfen ist, zu vermindern. Eine eingehendere Erklärung soll später folgen.

Aufg. 1. Nach Krönig und Clausius wird das Spannungsgesetz der Gase durch den Stoss elastischer Kugeln erklärt, indem angenommen wird, dass die Gastheilchen (Molecüle) als elastische Kugeln gleichmässig im Raume verbreitet seien, dass dieselben nach allen Seiten hin sich bewegen und durch den Stoss gegen die Gefässwände einen Druck ausüben. Im Sinne dieser „kinetischen Gastheorie“ seien in einem Würfel vom Volumen $v = l^3$ eine grosse Zahl n kleiner elastischer Kugeln so vertheilt, dass immer 6 in einem Raume λ^3 enthalten sind. $l^3/\lambda^3 = n/6$. Von den 6 bei einander befindlichen Kugeln bewegen sich 2 nach entgegengesetzten Richtungen parallel der Höhe, 2 ebenso nach der Länge und 2 ebenso nach der Breite des Würfels. Es ist der auf die Wände ausgeübte Druck p zu bestimmen, wenn alle Kugeln nach der angegebenen Art sich mit der Geschwindigkeit u bewegen, und darnach ist der Ausdruck pv zu ermitteln. — (Parallel zu einer Würfelfläche liegen l^2/λ^2 Kugeln; dieselben stossen gleichzeitig an die Wand und üben infolge der Geschwindigkeitsänderung $2u$ die Kraft $m \cdot 2u \cdot l^2/\lambda^2$ aus. In einer Zeiteinheit stossen u/λ Kugeln nach einander auf die Wand; daher ist die Kraftentwickelung in der Zeiteinheit auf eine Würfelseite

$$p \cdot l^2 = m \cdot 2u \cdot l^2/\lambda^2 \cdot u/\lambda.$$

Daraus folgt $p \cdot v = \frac{2}{3} n \cdot \frac{1}{2} mu^2$, d. h. der Arbeitswert pv beträgt zwei Drittel der gesammten lebendigen Kraft im Volumen v.) **2.** Über dem Mantel eines Kreiscylinders mit dem Halbmesser r und der Höhe h seien n Massentheilchen m gleichmässig vertheilt und werden mit der Geschwindigkeit u gleichförmig um die Cylinderachse gedreht. Das Cylindervolumen sei $v = r^2 \pi h$. Es ist der infolge der Fliehkraft auf die Flächeneinheit ausgeübte Druck p und darnach die lebendige Kraft aller Massentheilchen zu bestimmen. — ($p = n \cdot mu^2/2r^2\pi h$, $pv = n \cdot \frac{1}{2} mu^2$, d. h.?) **3.** Wie gross sind der normale Oberflächendruck und die lebendige Kraft, wenn in der vorhergehenden Aufgabe anstatt eines rotierenden Cylinders eine rotierende Kugel angenommen wird? — ($pv = \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{1}{2} mu^2$. Siehe § 73.) **4.** In einem Luftmanometer von $l = 677$ mm Länge, in welchem die Luft anfänglich die dem Barometerdruck $b = 760$ mm entsprechende Expansivkraft hatte, wird die Luft durch das Steigen der Quecksilbersäule um $h = 352$ mm comprimiert; wie gross ist die auf das Quecksilber des Manometers wirkende Dampfspannung? — (2·15 kg.) **5.** Wenn der innere Rauminhalt des Stiefels einer Luftpumpe, den des Kolbens abgerechnet, V (0·7 dm³), der Rauminhalt des Recipienten nebst dem des Kanals v (2·8 dm³), die Dichte der Luft δ (1) ist, wie gross ist die Dichte der Luft im Recipienten nach n (8) Kolbenzügen? — ($\delta_n = \left(\frac{v}{V+v}\right)^n \cdot \delta = 0{\cdot}1678$.) **6.** Nach wie viel Kolbenzügen wird bei einer Luftpumpe, deren Recipient ein viermal so grosses Volumen hat wie der Stiefel, die Luft bis zu $^1/_{10}$ ihrer anfänglichen Dichte verdünnt sein? — ($n = 10{\cdot}3$.) **7.** Wenn bei einem Barometerstande von 755 mm in dem abgekürzten Barometer unter dem Recipienten einer Luftpumpe das Quecksilber des verschlossenen Schenkels bis auf 5 mm über dem im offenen gefallen ist, welche Luftverdünnung hat dann stattgefunden? — ($^1/_{151}$ Luftverdünnung.) **8.** Bei einer Compressionspumpe ist der Rauminhalt des Stiefels V (120 cm³), der des Recipienten nebst dem des Kanals v (360 cm³), die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft δ (1); wie gross ist die Dichte der Luft nach n (27) Kolbenstössen? — ($\delta_n = (v + n \cdot V)\delta/v = 10$.) **9.** Es ist das Aus- und Einathmen der Luft zu erklären. [Aufg. 4—9 sind von Fliedner und Krebs. Aufg. 2 und 3 habe ich in der Abhandlung über die Hauptsätze der mech. W.-Th. in der Realschulztsch., Wien 1890, mitgetheilt.]

§ 43. **Barometrische Höhenmessung.** (Pascal 1648.) Da der Luftdruck von dem Gewichte der Luft herrührt, so muss derselbe mit wachsender Höhe über der Erdoberfläche abnehmen. Auf diesen bereits angeführten Satz von Pascal gestützt, hat Mariotte (1676) die Druckabnahme mit der Höhe bestimmt und damit den Grund dazu gelegt, aus dem Luftdrucke die Erhebung über der Erdoberfläche zu berechnen. Die Rechnung wurde von Halley (1685) mit Hilfe des Boyle-Mariotte'schen Gesetzes ausgeführt. Für vollständig ruhige,

gleichmässig erwärmte Luft lässt sich dieselbe folgendermassen darstellen:

h sei die zu berechnende Höhe, f und F seien beziehungsweise die specifischen Gewichte der Luft und des Quecksilbers, der Luftdruck sei p und der Barometerstand b. Bei einer Erhebung dh nimmt der Luftdruck um $dp = F \cdot db$ ab; diese Druckabnahme ist gleich dem Gewichte der Luftschichte über der Flächeneinheit und von der Höhe dh, daher $= f \cdot dh$. Die specifischen Gewichte der Luft unter verschiedenen Drücken verhalten sich umgekehrt wie die Volumen, und diese verhalten sich nach dem Boyle'schen Gesetze umgekehrt wie die Expansivkräfte, daher hat man

$$\frac{f}{f_0} = \frac{p}{p_0} = \frac{b}{b_0}.$$

Hieraus f berechnet und in den Gewichtswert $f \cdot dh$ substituiert, gibt

$$f_0 \cdot \frac{b}{b_0} \cdot dh = F \cdot db.$$

Daraus folgt[1])

$$h = \frac{b_0 F}{f_0} (\log \operatorname{nat} b - \log \operatorname{nat} b_0)$$

oder

$$h = \frac{b_0 F}{f_0 \cdot \log e} \cdot (\log b - \log b_0)$$
$$= 18400 (\log b - \log b_0).$$

Der constante Factor wird erhalten aus den Werten $b_0 F = 1033$ g, $f_0 = 0{\cdot}001293$ g, $1 / \log e = 2{\cdot}3026$. Er ist reduciert auf Meter. Durch Hinzufügung des auf die mittlere Temperatur t sich beziehenden Factors $(1 + 0{\cdot}00367\, t)$ gewinnt h eine Form, welche ganz brauchbare Werte liefert.

Verbesserungen des angegebenen Wertes mit Berücksichtigung der Temperaturverschiedenheit, der Verschiedenheit der Schwere in den verschiedenen geogr. Breiten und der Luftfeuchtigkeit haben Laplace, Poisson, Gauss, Babinet u. a. angegeben[2]).

§ 44. **Ausfluss der Gase.** Ähnlich dem Torricelli'schen Ausflussgesetze für Flüssigkeiten lässt sich auch für ein Gas, das unter einem bestimmten Drucke p in einem Gefässe eingeschlossen ist, die Geschwindigkeit u berechnen, mit welcher es durch eine Öffnung einer sehr dünnen Wand aus dem Gefässe ausströmt. Beim Austritt des Gasvolumens dv leistet die Gasspannung die Arbeit $p \cdot dv$ und erzeugt die lebendige Kraft der ausströmenden Gastheilchen; daher gilt mit Benützung der Gasdichte δ die Gleichung

1) Zur elementaren Berechnung siehe die Anm. in § 18. Vgl. auch die Ableitung in meiner Schrift über d. Eng.-Princip in d. Dynamik, S. 79, 1884.

2) Daurer, Übungsbuch zur Mech. S. 66; E. Mach, Lehrb. S. 83; Violle, Lehrb. II.

$$p \cdot dv = \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot dv \cdot u^2,$$

und man erhält

$$u = \sqrt{\frac{2p}{\delta}},$$

d. h. die Ausflussgeschwindigkeit ist proportional der Quadratwurzel aus der Gasspannung und umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Dichte oder aus dem specifischen Gewichte des Gases.

Der Druck p gilt, wenn das Gas in den luftleeren Raum ausströmt; es ist aber für denselben die Differenz aus dem Gasdruck und dem äusseren Luftdruck zu setzen, wenn das Ausströmen in die freie atmosphärische Luft erfolgt. Im ersteren Falle, wenn Luft aus einem Gefässe unter gewöhnlichem Atmosphärendruck in den leeren Raum austritt, ist $p = 76 \cdot 13{\cdot}59$ und $\delta = 0{\cdot}001293/10^3$, daher wird $u = 399{\cdot}7$ m.

Zum Zwecke einer raschen Bestimmung der Länge für u ist es vortheilhaft, zu beachten, dass $p/a\delta$ die Höhe einer Gassäule angibt, deren Gewicht dem Gasdrucke gleich ist.

Auf dem Satze, dass die Ausflussgeschwindigkeit der Gase umgekehrt proportional der Quadratwurzel ihrer specifischen Gewichte ist, wenn sie unter bestimmtem Drucke stehen, beruht ein Apparat von Bunsen, der specifische Gewichte der Gase zu bestimmen gestattet.

Bezüglich der Ausflussmenge der Gase gilt im allgemeinen dasselbe wie für Flüssigkeiten; der Contractionscoefficient für Öffnungen in dünner Wand ist 0·5—0·6; durch Ansatzstücke kann derselbe bis 1 und darüber vergrössert werden.

Aufg. 1. Welche Geschwindigkeit findet man für das Ausströmen von Kohlensäure und Wasserstoff in den leeren Raum, wenn ihre spec. Gewichte zu 1·52 mal und 0·07 mal 0·001293 berechnet werden? — (324 m, 1511 m.) **2.** Mit welcher Geschwindigkeit, von der Contraction abgesehen, fliesst atmosphärische Luft von 2280 mm Spannung aus einem Gefässe, wenn der Gegendruck eine Atmosphäre beträgt? — (565 m.) **3.** Bunsen beobachtete, dass bei der kleinen Öffnung eines röhrenähnlichen Gefässes ein gewisses Volumen elektrolytischen Knallgases in 75·6 Secunden entwich, während ein gleiches Luftvolumen hiezu unter denselben Temperatur- und Druckverhältnissen 117·6 Secunden brauchte; wie gross ergibt sich darnach das specifische Gewicht des Knallgases? —

$$((75{\cdot}6/117{\cdot}6)^2 \cdot \delta = 0{\cdot}4133 \cdot 0{\cdot}001293 = 0{\cdot}000534.)$$

4. Im Innern eines Rauchfanges von der Höhe h (10 m) herrscht die Temperatur t_1 (171° C), aussen t (21° C); mit welcher theoretischen Geschwindigkeit strömt die heisse Luft aus? $a = 9{\cdot}8$ m, spec. Gewicht der Luft bei t^0 C ist $f_t = f_0 \cdot b/760(1 + t/273)$. — (Nach dem Archimedischen Gesetze ergibt sich die Steigkraft $P = s \cdot h(f_t - f_{t_1})$. Die Kraft greift im Schwerpunkte an. Beim Ausströmen der Luftmasse durch die obere Öffnung des Rauchfanges ist ihr Weg $h/2$ und daher ihr Arbeitswert

$W = P \cdot \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} s \cdot h^2(f_t - f_{t_1})$. Tritt die oberste Luftschichte aus, so wird die Änderung dW in die lebendige Kraft $\frac{1}{2} s \cdot dh \cdot f_{t_1} u^2 / a$ verwandelt, und darnach folgt $u = \sqrt{[2ah(t_1 - t)/(273 + t)} = 10$ m].)
[Aufg. 1 und 2 sind von Müller-Erzbach, 3 und 4 von Daurer.]

§ 45. **Winde. Niveauflächen der Luft.** a) Windregeln. Die Forschung nach den Gesetzen der Luftströmungen gehört der neuesten Zeit an. Der Verkehr auf den Weltmeeren zu Beginn der Neuzeit führte zu der Kenntnis, dass zu beiden Seiten des Aquators der Wind das ganze Jahr regelmässig in derselben Richtung weht. Nach der Richtung heisst der Wind auf der nördlichen Seite Nordostpassat und auf der südlichen Südostpassat. Bacon gab (1664) als Ursache dieser Erscheinung die Temperaturunterschiede an; Hooke sprach die Ansicht aus, dass die warme, leichtere Luft vom Äquator in die Höhe steige und in den oberen Schichten gegen die Pole fliesse, die kalte, schwere Luft aber in den unteren Schichten von den Polen zum Äquator zurückkehre; und Halley fand die Ausdehnung der Passatregion auf der nördlichen Halbkugel zwischen den 12.—35. und auf der südlichen zwischen den 5.—30. Breitenkreis ausgedehnt. Hooke erkannte ferner den Einfluss der Erdrotation auf die Richtung des Windes und Halley erklärte (1753) die Ablenkung des Nordwindes nach Nordost und des Südwindes nach Südost durch die Achsendrehung der Erde[1]). Darnach behalten die Winde ihre ursprüngliche Richtung ebenso bei wie ein schwingendes Foucault'sches Pendel, die Erde dreht sich unter ihnen, und deshalb erscheinen sie von der Meridianrichtung in der angegebenen Weise abgelenkt.

Im Jahre 1837 dehnte Dove diese Anschauungen auch auf die nördlich von der Passatregion vorkommenden Winde aus. Er schloss aus zahlreichen thermischen und barischen Windrosen, dass zwei Luftströmungen vorherrschen, von denen die eine warm, feucht, leicht und die andere kalt, trocken und schwer sei; jene zeige sich als SW- und W-, diese als NO- und O-Wind. Er erklärt die Strömungen als Äquatorial- und Polarströmungen: die warme Luft steige über dem Äquator auf und bewege sich als Antipassat in höheren Regionen nordwärts. Allmählig lasse sich der Äquatorialstrom wieder herab, und, auf den Polarstrom stossend, suche er denselben zu bekämpfen und aus seiner Richtung zu verdrängen. Das Ergebnis des Kampfes seien die Winddrehungen, und zwar der Übergang von NO in O und SO, von SW in W und NW. Nach diesem Winddrehungsgesetz, das Dove's Namen erhalten hat, folgt der Wind dem Laufe der Sonne.

Genauere Messungen mit dem Barometer führten zu einer anderen Theorie, nach welcher die Ursache der Luftströmungen in den Unter-

1) Hegyfoky in Klein's Gäa, 1895, S. 586 ff.

schieden des Luftdruckes zu suchen ist. Brandes weist, gestützt auf 12jährige Wind- und Barometerbeobachtungen an 39 Orten Europas, nach, dass die Luft bei dem Bestreben, das gestörte Gleichgewicht wieder herzustellen, centripetal nach den Stellen des niedrigsten Luftdruckes strömt (1820). Buys-Ballot erkannte (1857) aus graphischen Darstellungen von Wetterzuständen, dass die Luft stets von Gebieten höheren Druckes gegen jene mit niedrigem Drucke strömt und durch die Rotation der Erde auf der nördlichen Erdhälfte nach rechts, auf der südlichen nach links abgelenkt wird; die Winde umkreisen daher die Gebiete niedrigen Druckes, die auch Depressionsgebiete genannt werden, auf der nördlichen Halbkugel im entgegengesetzten Sinne und auf der südlichen im Sinne des Uhrzeigers und bilden Cyklonen. Dieses Winddrehungsgesetz führt den Namen Buys-Ballots. Zur Begründung desselben wies Woeikoff (1872) darauf hin, dass der hohe Luftdruck in der Gegend des 30. Breitenkreises dem Polarstrome ein Hindernis entgegensetze und ihn in die heisse Zone nicht dringen lasse; auch die Temperaturdifferenz von 5—6° C, die zwischen den Grenzen des Passats besteht, lasse erkennen, dass derselbe nicht dem Norden entstammen könne.

Durch die Untersuchungen von Hann (1874) über die Temperaturverhältnisse aufsteigender Luftströme wurde es evident, dass die obere Äquatorialströmung, der Südwestwind unserer Gegenden, die Luft und den Feuchtigkeitsgehalt nicht aus den Tropen mitbringen könne, denn sonst müsste, weil durch den Arbeitsverbrauch aufsteigende Luft sich abkühlt, über dem Passatgürtel eine ununterbrochene Wolkenschichte sich ausbreiten, während in Wirklichkeit jene Gegend zu den heitersten der Erde gehört; auch deshalb kann der Luftstrom seine Feuchtigkeit nicht vom Äquator bringen, weil er bei uns — nach Dove's Lehre — schon bis zur Erdoberfläche herabstiege, herabsinkende Ströme aber infolge der Erwärmung trocken werden.

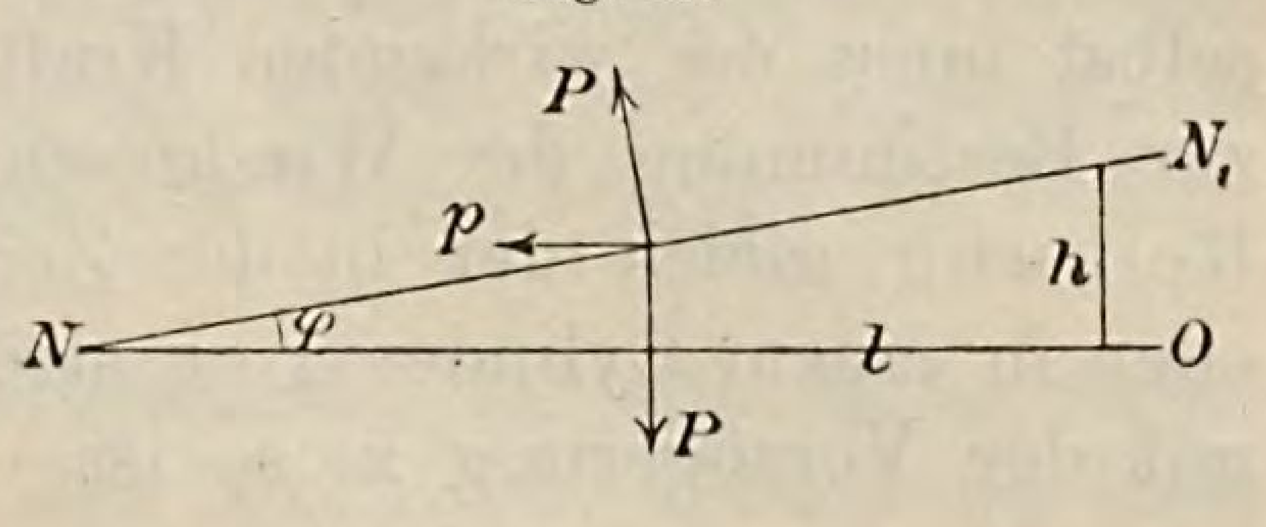
Nach der allgemeinen Annahme des Buys-Ballot'schen Winddrehungsgesetzes werden auf den meteorologischen Centralstationen die von den einzelnen Beobachtungsorten gemeldeten Barometerstände (auf das Meeresniveau reduciert) und Winde (nebst Bewölkung und Niederschlag) in Karten eingetragen und die Orte gleichen Luftdruckes durch Isobaren verbunden; dadurch wird eine gute Übersicht über die Luftdruckvertheilung und die Luftströmungen gewonnen; die Lagen der Cyklonen und Anticyklonen werden erkannt und das Studium der Bewegung der für die Wetterverhältnisse massgebenden Circulationscentren ermöglicht.

b) Niveauflächen. Es ist schon aus der angegebenen historischen Skizze ersichtlich, dass die Betrachtung der Luftverhältnisse unmittelbar auf der Erdoberfläche zur Erklärung des Zusammenhanges der Luftströmungen nicht ausreicht, sondern dass die Dichtigkeits-

und Druckverhältnisse im ganzen Luftraum ins Auge gefasst werden müssen. Hann hat deshalb mit Hilfe der Niveauflächen, als Flächen gleichen Druckes, gezeigt, wie die grosse Circulation zwischen den Tropen und den höheren Breiten zu erklären sei; er bestimmte die Lage der Niveauflächen nach den Dichtigkeitsverhältnissen der Luft und fand dadurch die Bewegung der Luftmassen bedingt. Wie in diesem Falle, so bieten die Niveauflächen auch in allen anderen Fällen ein Mittel, um von den Luftströmungen ein deutliches und übersichtliches Bild zu entwerfen. Ihre Bedeutung soll im Folgenden dargethan werden[1]).

Wie im Wasser, so wird auch in der Luft Gleichgewicht herrschen, wenn die Niveauflächen mit den Flächen gleicher Arbeit in Bezug auf die Schwerkraft zusammen fallen, also horizontal sind. Sobald jedoch durch eine Arbeitsleistung (der Wärme, der Saugwirkung höherer Luftströmungen, der Gravitation eines Himmelskörpers oder dergl.) an einer Stelle eine Hebung erfolgt, so tritt darnach die äquivalente Energie als lebendige Kraft der bewegten Atmosphäre auf. Die Wetterkarte vom 14./X. 1891 abends 8 Uhr[2]) zeigt ein Luftdruckminimum mit 720 mm Barometerstand über Dänemark; in einer Entfernung von beiläufig 1000 km südlich herrschte der Barometerstand 755 mm. In letzterer Gegend befindet sich unter solchen Umständen der Luftdruck von 720 mm Quecksilberstand, berechnet nach dem Gesetze der barometrischen Höhenmessung, 380 m hoch über der Erde. Die Niveaufläche mit dem Drucke von 720 mm Barometerstand fällt also längs 1000 km um 380 m abwärts und hat eine durchschnittliche Neigung von $\varphi = 1{\cdot}3$ Minuten. Auf so geneigten Niveauflächen NN_1 (Fig. 38) schliesst der Niveaudruck P mit der Horizontalen einen Winkel $(90 - \varphi)^0$ ein, und die horizontale Componente p erzeugt jene Luftbewegung, welche im kleinen Luftzug und im grossen Wind heisst. Es ist also die bewegende Kraft

Fig. 38.



$$p = P \cdot \sin \varphi \doteq P \cdot \frac{h}{l} \cdot$$

Bei gekrümmter Niveaufläche gibt die Tangente in dem betrachteten Elemente den Neigungswinkel φ an. Auf ein solches Element bezogen, ist h als Verticalabstand zweier Orte O und N_1 mit bestimmten Barometerständen stets der Differenz der betreffenden Barometerstände, also auch der zwischen N und O bestehenden Barometerdifferenz

1) Vgl. meine Abhdlg. über die Niveaufl. der Cyklonen in der meteorolog. Zeitsch. 1882. S. 136.

2) Siehe Reis, Lehrb. d. Ph., 8. Aufl., S. 875.

proportional. Das Verhältnis h/l ist alsdann der Barometerdifferenz auf der Längeneinheit oder dem „Gradienten" proportional, und auch die Kraft p ist dem Gradienten proportional.

Bei der angegebenen Luftdruckvertheilung kommt ein Barometerunterschied von 35 mm auf 1000 km; darnach ergibt sich im Durchschnitt der Gradient, bezogen auf einen Meridiangrad, 4 mm, und die horizontale Componente p auf 1 m^2 ist nahezu 4 kg.

Die Kraft p wirkt auf die betreffende Luftschichte und erzeugt durch ihre Arbeit eine lebendige Kraft. Betrachten wir eine Luftschichte über der Flächeneinheit von der Dicke λ, so ist die Arbeit und die ihr gleiche kinetische Energie gegeben durch die Gleichung

$$p \cdot \lambda = \frac{1}{2} \lambda \cdot \varrho \cdot v^2,$$

und es wird

$$p = \frac{1}{2} \varrho \cdot v^2.$$

ϱ ist die Dichte und v die Geschwindigkeit der Luft. Die hiermit gefundene Geschwindigkeit würde erreicht, wenn die Luft unter dem Drucke p in einen luftleeren Raum strömte. Unter den obwaltenden Umständen gelangt sie aber in Nachbarschichten, in denen ebenfalls Kräfte p beschleunigend einwirken. Die Geschwindigkeit wird demnach stets vermehrt.

Nach dem Energieprincip erscheint der Vorgang als ein Herabfallen der mit der Niveaufläche gehobenen Luftmasse. Erfahrungsgemäss ist aber die Erscheinung verwickelter; die Geschwindigkeit wächst nur bis zu einer gewissen Grösse und bleibt dann weiter bei gleichen Gradienten constant. Daraus folgt, dass die von der Kraft p geleistete Arbeit zur Überwindung eines Hindernisses verbraucht wird, das Guldberg und Mohn als Reibung der Luft erklärten. Die Reibung selbst muss der wirkenden Kraft p gleich sein; dieser Umstand kann zur Bestimmung der Windgeschwindigkeit dienen. Nimmt man die Reibung gleich der in der Zeiteinheit durch den Querschnitt Eins oder in einem Cylinder $1 \cdot v$ strömenden Luftmasse $\varrho \cdot v$ multipliciert mit der Verzögerung $\varkappa$, so ist

$$P \cdot \sin \varphi = \varkappa \cdot \varrho \, . \, v \, .$$

Nun gilt für die Dichte

$$\varrho : \varrho_0 = P : P_0;$$

setzt man ferner $P_0 \sin \varphi$ proportional dem Gradienten γ, so erhält man

$$v = C \cdot \frac{\gamma}{\varrho_0 \cdot \varkappa} \cdot$$

Die Gleichung folgt auch aus dem Gesetze für die Ausflussmenge einer Flüssigkeit in einem engen Röhrchen mit dem Querschnitte Eins.

In derselben ist die Ablenkung des Windes infolge der Erdrotation nicht berücksichtigt. Mit Beachtung dieser berechneten Guldberg und Mohn folgenden Wert für die Windgeschwindigkeit:

$$v = C \cdot \frac{\gamma \cos \alpha}{\varrho \cdot \varkappa},$$

wobei γ den Gradienten für einen Meridiangrad, C eine Constante $= 12237 \cdot 10^{-8}$, ferner $\varkappa$ den Reibungscoefficienten der Luft $= 0{\cdot}00019 \text{ gr cm}^{-1} \text{ sec}^{-1}$, ϱ die Luftmasse für 1 m^3 und $\sphericalangle \alpha$ die Ablenkung des Windes vom Gradienten bedeuten. Die Rechnungsresultate sind nach den Beobachtungen am Erdboden in der Regel zu gross, weil die Luftgeschwindigkeit hier durch Bewegungshindernisse verringert wird. Für höhere Luftschichten, die eine doppelte bis dreifache Geschwindigkeit haben als die Luft am Boden, ist die Übereinstimmung eine bessere.

Mittelst des oben angeführten Gradienten 4 mm erhält man nach der abgeleiteten Form ohne Rücksicht auf die Ablenkung des Windes die Geschwindigkeit $v = 18$ m. Die Wetterkarten weisen im ganzen Cyklonengebiete die nach der Bewegung der Bäume und ihrer Theile geschätzten Windstärken 4 (////→) und 5 (/////→) auf; bei solcher Stärke bewegen sich Äste, schwache und starke Bäume und die Windgeschwindigkeit ist zwischen 11—17 m, beziehungsweise zwischen 17—28 m. Letzteren Wind bezeichnet man als Sturm. Die erzielte Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung ist hier befriedigend. Der aus dem Energieprincipe ermittelte obige Wert $p = \frac{1}{2} \varrho v^2$ lässt sich für die Berechnung des Winddruckes geltend machen; bezogen auf kg und m^2 erhält man dafür

$$p = 0{\cdot}065 \cdot v^2.$$

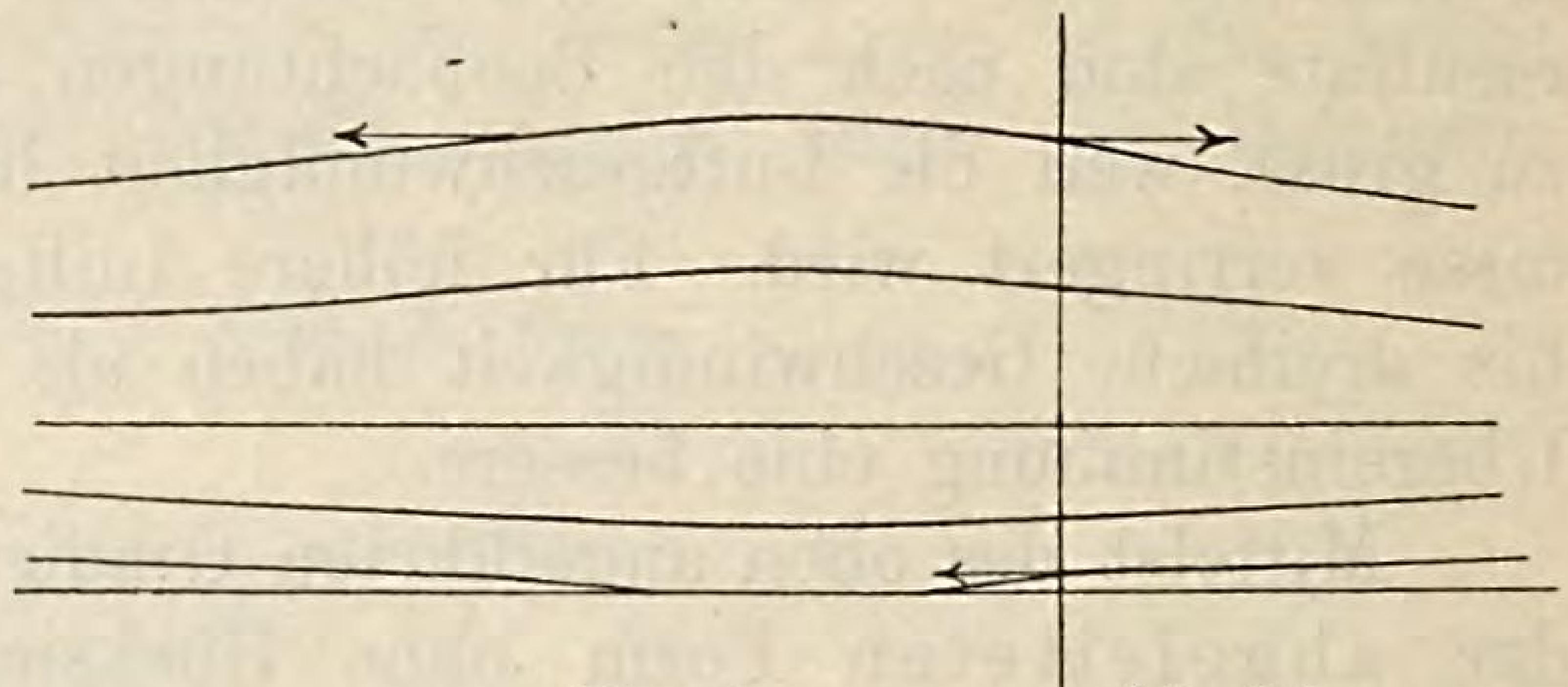
Der Ausdruck stimmt mit dem von Borda (1769) gegebenen überein, der durch Messungen vielfach bestätigt wurde. Bei beginnendem Sturme, d. i. bei einer Geschwindigkeit von 18 m, beträgt der Winddruck auf 1 m^2 21 kg.

Die Arbeit zur Hebung der Niveaufläche um 380 m in einem Umkreis von 1000 km Halbmesser, den Atmosphärendruck zu rund 1 kg für 1 cm^2 gerechnet, ist $(10^6)^2 \cdot \pi \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{2} 380 = 6 \cdot 10^{18}$ kgm. Diese Arbeit kommt in der lebendigen Kraft des Windes und in den Wärmeerscheinungen der Luft wieder zum Vorschein.

Nach dem Angeführten können die Niveauflächen als das bestimmende Element für die Luftströmungen angesehen werden. Eine Zusammenstellung derselben, soweit sie zu einem Luftwirbel gehören, vermag ein deutliches Bild über die betreffenden Vorgänge zu geben. Über dem Luftdruckminimum befindet sich Luft von geringerer Dichte, die Niveauflächen werden daher in grösserer Entfernung von einander

liegen. Neben diesem Gebiete herrscht ringsum hoher Druck, die Luft ist dichter und die Niveauflächen folgen einander in näheren Abständen. Die Spuren der Niveauflächen auf der Erdoberfläche geben die Isobaren, welche das Depressionscentrum umschliessen. Ein Querschnitt durch die Cyklone entspricht demnach der schematischen Figur 39. In den meisten Fällen wird die Luft im Depressionsgebiete durch Erwärmung verdünnt, daher mag das Schema zeigen, dass und wie die Luft über dem erwärmten Orte oben abfliesst und die kalte Luft unten gegen die Erwärmungsstelle strömt. Der Lufttransport nach aufwärts wird durch die Wärme besorgt, indem die Luft ausgedehnt und gehoben wird. Der Vorgang trifft zu: beim Luftzuge, der durch das Oeffnen der Thüre eines geheizten Zimmers entsteht, bei den täglich wiederkehrenden Land- und Seewinden, bei der durchschnittlichen täglichen Winddrehung, nach Hann bei Gebirgs- und Thalwinden und der Luftcirculation der Tropen[1]).

Fig. 39.



	Erwärmung	Akühlung
	Zimmer	Vorhaus
bei Tag	Land	See
„ Nacht	See	Land
	nachmittags	abends
	Calmen	Tropen
	Cyklone	Anticyklone

Die Neigung der Niveauflächen wird in den verschiedenen Fällen auch sehr verschieden sein; so dürfte bei der durch die Erwärmung von der Sonne täglich hervorgerufenen Krümmung der Niveauflächen, die sich im ganzen als bedeutende Flutwelle zeigen wird, in unserer Gegend und in höhern Breiten die unterste Luftschichte nur eine sehr geringe Ausbiegung nach unten erfahren, so dass der an Windfahnen beobachtete Wind bereits eine Krümmung der Flächen nach oben angibt; gleichzeitig folgt, wie es nach Hann thatsächlich der Fall ist, dass vormittags Ostwinde und nachmittags Westwinde mehr vorherrschend sind. Auch das tägliche Maximum der Windstärke um $1\frac{1}{2}$ Uhr mittags (die Zeit vor Eintreffen der Luftsäule von grösster Verdünnung) und abends 10 Uhr erfährt eine erklärende Bedeutung durch das Schema.

Stärkere Neigungen der Flächen, aber doch im Sinne des Schemas, finden sich in den Cyklonen der Tropen und in den die Wetterverhältnisse der mittleren Breiten beherrschenden grossen Luftwirbeln[2]).

1) Hann: Allg. Erdkunde p. 90 und 100.

2) Siehe meine Abhdlg. in d. Zeitsch. d. Gesellsch. f. Met. 1882, p. 136.

Die Luftströmungen sind auch hier nach obigen Ausführungen von der Form und der Lage der Niveauflächen abhängig. Gleichzeitig machen sich Terrainverhältnisse und die Erdrotation geltend. Wie die Ablenkung der Passate von Nord nach Nordost durch die Erdrotation (in der Art wie beim Foucault'schen Pendel), wird auch eine Ablenkung der Winde, die gegen grössere Depressionsgebiete fliessen, stattfinden, so dass dieselben spiralförmig sich um das Centrum bewegen und zwar nach dem Gesetze von Buys-Ballot im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers[1]). Der Einfluss der Gebirge zeigt sich deutlich in der Stauung der bewegten Luft und der Scheidung von bedeutenden Temperaturgegensätzen; Winde wie Bora und Föhn und ein gewisses Fixieren der Barometermaxima (Anticyklonen) über Gebirgen wie die Alpen sind die Folge davon[2]).

Durch die Luftströmungen ist im allgemeinen das Wetter bestimmt. Im Depressionsgebiete findet eine Mischung verschieden warmer Luftschichten, Hebung und Abkühlung der Luft statt; unter solchen Bedingungen wird der Wasserdampf condensiert und fällt als Regen nieder[3]). Die Wetterkarten enthalten deshalb auch als wichtiges Bestimmungsstück die Isobaren, aus deren Verlauf die Lage der Cyklonen mit ungünstigem und der Anticyklonen mit gutem Wetter ersichtlich ist. Desungeachtet sind solche Karten nicht ausreichend, um von den Luftdruckverhältnissen der Atmosphäre in höheren Schichten ein Bild zu geben; und doch wäre auch diese Kenntnis sehr wichtig. Wir werden schliessen dürfen, dass stellenweise Einbiegungen der Niveauflächen in grösserer Höhe über der Erde ähnliche Erscheinungen hervorbringen, als die angegebenen Krümmungen der Niveauflächen im Cyklonengebiete; die betreffenden Erscheinungen werden nur im kleineren Massstabe auftreten. Es wird Condensation des Wasserdampfes, Wolkenbildung und wohl auch Regen eintreten, ohne dass der Verlauf der Isobaren auf der Erdoberfläche die Ursache anzuzeigen brauchte. Es werden sich insbesondere Lagenänderungen der Niveauflächen in höheren Luftschichten eher geltend machen als in den unteren. So wünschenswert es deshalb auch wäre, so sind doch messende Bestimmungen bis zu der erforderlichen Höhe zur Zeit unausführbar. Es wäre aber wohl möglich, eine Beziehung der Wolkenformation zur Form der Niveauflächen aufzufinden und die Kenntnis so zu verwerten, wie es mit den jetzigen Isobarenkarten der Fall ist. Eine zuverlässige Bestimmung des Zustandes der Atmo-

1) Sprung, Meteorol. Zeitsch. 1884, S. 271. Günther, Geophys. I, S. 222.

2) F. Lingg, Zeitsch. d. österr. Gesellsch. f. M. 1882, p. 214.

3) Ueber den Zusammenhang der Luftdruckvertheilung mit der Temperatur und Feuchtigkeit siehe W. von Bezold, Thermodynamik d. Atmosph. Berl. Ber. 1878 und den Vortrag über wissenschaftl. Luftballonfahrten, Verhdlg. d. phys. Gesellschaft, Berlin 1896.

sphäre mittelst Wolkenformen hätte noch mehr praktische Bedeutung, weil sie von jedem Beobachtungsorte, zu jeder Zeit für ein umfassendes Gebiet erfolgen könnte. Die von manchen Empirikern aufgestellten, recht oft zutreffenden Wetterprognosen nach Wolkenbeobachtungen dürften damit wissenschaftlichen Boden gewinnen.

Die Meteorologie benützt gegenwärtig zur Wetterprognose die Zugstrassen, die von den Wetterwirbeln in der Regel eingehalten werden. Dieselben sind vorwiegend gegen Osten gerichtet; van Bebber erklärt, dass sie im voraus von der grossen Achse der das Luftdruckminimum umschliessenden Isobaren angezeigt werden. Jedenfalls sind die Dichtigkeits- und Druckverhältnisse der Luft auch für das Fortschreiten der Cyklonen massgebend.

c) Meeresströmungen. Der Luftdruck wirkt auf das Meer und pflanzt sich im Wasser fort; auch die Winde üben einen mächtigen Einfluss auf das Wasser aus. Damit sind die Ursachen zu den Meeresströmungen und deren innige Beziehung zu den Luftströmungen gegeben. Dieser Umstand ist erst in neuester Zeit gebürend beachtet worden. Die meisten Schulbücher nehmen darauf noch keine Rücksicht. — Man nahm an, dass wie in der Luft, so auch im Wasser die Temperaturunterschiede zwischen den Äquatorial- und Polargebieten die Ursache der Strömung seien. Hann und Capitän S. Hoffmann wiesen zuerst darauf hin, dass die auf den Temperaturunterschieden beruhende Wirkung der Schwerkraft nur von untergeordneter Bedeutung sein kann, von noch geringerer als bei der Luft, da das Meerwasser nicht wie jene von unten erwärmt wird. Thatsächlich zeigt der Vergleich der oceanischen Ströme mit dem Verlauf der Isobaren auf einer Weltkarte, dass die ersteren mit den Anticyklonen der Luft, dass also die Stromrichtungen mit den Windrichtungen übereinstimmen. Das Sargassomeer des Atlantischen Oceans fällt mit dem Gebiete eines Luftdruckmaximums zusammen; die Meeresströmung umkreist gleich dem Winde das Gebiet im Sinne des Uhrzeigers. Auf der südlichen Halbkugel ist die Bewegungsrichtung entgegengesetzt.

Die Erklärung ergibt sich aus der Lage der Niveauflächen, die sich nicht bloss in der Luft vorfinden, sondern auch im Meerwasser fortsetzen. Die Druckdifferenzen und die Erdrotation bedingen in erster Linie die Strömung; der Einfluss des Windes macht sich nach seiner Stärke und Zeitdauer, ferner nach dem Zustande der Wasseroberfläche verschieden stark geltend. Sobald das Wasser in Bewegung ist, sind für die Richtung derselben oft auch die Küsten als Hindernisse ein bestimmender Factor; es können Theile der Hauptströmung von der Anticyklone ganz abgelenkt werden, wie es z. B. beim Golfstrom, der westlich von Europa einen nördlichen Weg einschlägt, der Fall ist. Im Norden wird das Wasser abgekühlt und kehrt als Unter-

strömung gegen den Äquator zurück. Ähnlich wie bei der Cirkulation der Luft können daher auch im Wasser stationäre Strömungen lange Zeit hindurch fortbestehen.

Zahlenmässige Schätzungen bestätigen die Zulässigkeit der angegebenen Ursachen für die Meeresströmungen. Ein dem wirklichen Zustande häufig entsprechender Überdruck der Luft von 36·8 mm Quecksilberhöhe muss den Wasserspiegel nach abwärts verschieben und das Wasser gegen das Depressionsgebiet drängen. Bis zur Herstellung des Gleichgewichtes müsste an letzterer Stelle das Wasser 0·5 m hoch emporsteigen. Die Arbeit des Überdruckes ist imstande eine lebendige Kraft zu erzeugen, welche der Hebung äquivalent ist, der also eine Geschwindigkeit von über 3 m zukommt. Diese Geschwindigkeit wird von den Wassertheilchen auf dem Wege vom hohen zum niederen Druck nur allmählig erreicht und von der Reibung des Wassers in den tieferen Schichten verzögert. (Die Verzögerung ist proportional dem Gradienten und dem Quadrate des Abstandes der Schichte vom Wasserspiegel.) Da die Verzögerung stets nur ein Bruchtheil der vorhandenen Geschwindigkeit sein kann, welch letztere noch durch die Einwirkung des Windes vergrössert wird, so ist ersichtlich, dass die angegebenen mechanischen Kräfte zur Erklärung der Meeresströmungen hinreichen.

Die mächtigste Strömung ist die äquatoriale Strömung in den tropischen Weltmeeren mit einer Breitenausdehnung bis zu 45°, in einer Mächtigkeit bis zu 2000 m und einer Geschwindigkeit von 1 m.

IV. Molecularkräfte.

§ 46. **Zusammenhangsformen der Körper. Cohäsion. Adhäsion.** Je nachdem die Theilchen eines Körpers sich schwer oder leicht verschieben lassen oder das Bestreben haben, sich auszudehnen, unterscheidet man feste, flüssige und gasförmige Körper (vgl. §§ 33, 41). Es gibt also drei Zusammenhangsformen oder Aggregatzustände. Übergangszustände bieten die weichen und schwer flüssigen Körper.

In den vorhergehenden Abschnitten wurden die verschiedenen Körper unter dem Einfluss der Schwere betrachtet; auf die gegenseitige Einwirkung der Körpertheilchen wurde keine Rücksicht genommen. Sehr viele Erscheinungen beruhen aber auch auf der Wechselwirkung dieser Theilchen: die festen Körper setzen dem Zerreissen, Zerdrücken, Zerbrechen und dem Zerdrehen einen namhaften Widerstand entgegen; ein aufgehängter oder unterstützter Körper vermag nicht bloss sein eigenes Gewicht vor dem Fallen zu schützen, sondern auch noch den Zug oder Druck, welche durch die Gewichte anderer Körper ausgeübt werden, zu überwinden. Flüssigkeiten steigen der Schwerkraft entgegen im Fliesspapier, Schwamm, Docht, Zucker, in Mauern u. a. auf; Tropfen an Röhrchen, Stäbchen und Platten fallen nicht ab, sondern bleiben hängen; das Abheben eines Glases vom Tische erfordert eine namhafte Anstrengung, wenn sich eine Wasserschichte zwischen Glas und Tischplatte befindet. Tinte und Farbe haften auf dem Papiere, auf Leinwand und an den Wänden.

Alle diese Erscheinungen lassen darauf schliessen, dass zwischen den Körpertheilchen Kräfte wirken, welche die Theilchen zusammenhalten. Die Kräfte zwischen gleichartigen Körpertheilchen nennt man Cohäsion, die Kräfte zwischen ungleichartigen Körpertheilchen heissen Adhäsion.

Beide Kräfte sind nur auf sehr kleine Entfernungen wirksam. Eisenstücke müssen durch Schweissen einander sehr nahe gebracht werden, bevor die Cohäsion wirksam wird; beim Kitten, Löthen und Leimen kommen die betreffenden Körpertheilchen einander viel näher, als beim einfachen Aneinanderhalten der zu verbindenden Stücke. W. Spring hat die Verbindung von Feilspänen aus Blei, Wismut, Zinn,

Zink, Kupfer u. a. zu festen Stücken durch Drücke von 2000—8000 Atm. nachgewiesen; Schwefelpulver gab einen Block von krystallinischem Schwefel, und ebenso wurden die Wood'schen und Rose'schen Metallgemische und Messing aus Feilspänen beziehungsweise von Wismut, Blei, Zinn, Cadmium, — Wismut, Blei, Zinn, — Zink und Kupfer durch hohen Druck erhalten. Stärkemehl verwandelte sich unter einem Drucke von 6000 Atm. in eine feste Masse, welche an den Rändern durchscheinend und frei von organischer Structur war.

Auf die Erklärung der verschiedenen Zusammenhangsformen soll später hingewiesen werden.

§ 47. **Allgemeine Eigenschaften der Körper. Molecüle.** Die meisten festen Körper können durch Zug und Erwärmung, die flüssigen durch Erwärmung vergrössert werden; durch Druck und Abkühlung können Körper aller drei Aggregatzustände verkleinert werden. In allen diesen Fällen setzen die Körper der Volumsänderung einen Widerstand entgegen; es ist eine Arbeitsleistung nothwendig, um den Widerstand zu überwinden. Man schliesst daraus, dass die Cohäsion sich sowohl dem Entfernen, als auch dem Annähern der Theilchen entgegensetzt, dass die Kraft sich daher als Anziehung und als Abstossung äussert. Eine solche Doppelrolle kann eine einzige Kraft nicht spielen; die bei einer Volumsänderung geweckte Kraft muss nothwendig eine Resultierende von anziehenden und abstossenden Componenten sein. Da für die Resultierende bereits allgemein der Name Elasticität gebräuchlich ist, so wollen wir der Klarheit im Ausdrucke wegen nur die Anziehung als Cohäsion bezeichnen, die Abstossung aber als eine Kraft für sich betrachten, welche der Cohäsion das Gleichgewicht zu halten vermag. Wenn wir, der Wärmelehre vorgreifend, die Erfahrung heranziehen, dass die Wärme eine ausdehnende Kraft ist, und dass durch Druck Wärme erzeugt wird, so ist die Annahme nahe liegend, dass die der Volumsverminderung entgegen wirkende Kraft die Wärme sei. Auf diese Anschauungsweise, die bereits von Laplace und Biot zum Ausdrucke gebracht wurde, mag der Anschaulichkeit und Deutlichkeit halber hingewiesen werden; für die Lehren in diesem Abschnitte ist indessen das Wesen der Kraft ohne Belang. Der Widerstand beim Zusammendrücken wird als eine allgemeine Eigenschaft der Körper angesehen und als solche Undurchdringlichkeit genannt. (Anwendung beim Aufstellen von Gegenständen auf Unterlagen, beim Bauen, bei der Taucherglocke, bei der Raummessung fester Körper durch Eintauchen in Flüssigkeiten u. s. w.)

Bei der Zertheilung eines Körpers muss die Cohäsion vollends überwunden werden. Der Vorgang dabei ist aber nicht so einfach, dass die Grösse der erforderlichen Kraft ohneweiters als das Mass der Cohäsion angesehen werden könnte. Wir beschränken uns deshalb

zunächst auf die Anführung der Erfahrungsthatsache, dass alle Körper theilbar sind, dass die Theilbarkeit eine allgemeine Eigenschaft der Körper ist. (Anwendung zum Formen der Gegenstände bei gewerblichen Arbeiten, beim Pulverisieren, Auflösen u. s. w. Sehr weit gehende Theilbarkeit findet sich bei vielen Farb- und Riechstoffen.)

Zwischen den Körpertheilchen befinden sich Zwischenräume, welche Poren genannt werden. Auf die Eigenschaft der Porosität lassen bereits die Zusammendrückbarkeit und Ausdehnsamkeit der Körper schliessen; aber auch viele andere Erscheinungen beruhen auf derselben. (Quecksilberpresse, Filtrieren der Flüssigkeiten, Aufsaugen derselben, Absorption von Gasen u. s. w.)

Die angegebenen Eigenschaften machen folgende Hypothese über die Constitution der Materie wahrscheinlich: Eine Körpermasse besteht aus kleinsten Theilchen, die mit dem ganzen Körper gleichartig sind; man nennt ein solches Theilchen Molecül. Dasselbe ist mechanisch nicht weiter theilbar; wird es auf chemischem Wege zerlegt, so entstehen die Atome. So ist z. B. ein Molecül Wasser ebenfalls Wasser; durch einen elektrischen Strom oder mittelst glühender Eisenfeilspäne kann es noch weiter in Wasserstoff- und Sauerstoffatome zerlegt werden. — Sowohl die Molecüle, als auch die Atome sind durch Intermolecular- beziehungsweise Interatomsräume von einander getrennt. Die Ausdehnung und Zusammenziehung eines Körpers beruht auf der Änderung seiner inneren Zwischenräume. Der Zusammenhang der Molecüle wird durch Anziehungskräfte bewirkt, welche die Molecüle in sehr kleinen Entfernungen aufeinander ausüben. Diese Kräfte, Molecularkräfte genannt, liegen der Cohäsion zugrunde.

Vorstehende Hypothese heisst Atomtheorie; sie rührt von Leukipp (500 v. Chr.) her, wurde von Demokrit entwickelt und ist gegenwärtig allgemein angenommen. Im Gegensatze zu ihr steht die Ansicht, dass die Materie continuierlich den Raum ausfülle und bis ins Unendliche theilbar sei; dieselbe stammt von Anaxagoras (450 v. Chr.), wurde von Plato und Aristoteles gelehrt und war während des ganzen Mittelalters anerkannt.

§ 48. **Elasticität. Das Elasticitätsgesetz als Arbeitsgleichung.** a) Wenn ein Körper nach einer Formveränderung, die er durch Druck oder Zug erlitten hat, wieder in seine ursprüngliche Form zurückkehrt, sobald die äussere Kraft zu wirken aufgehört hat, so nennt man den Körper elastisch. Nach der im vorigen Paragraphen angegebenen Definition für die Cohäsion erscheint die Elasticität als die Resultierende, beziehungsweise als Differenz der Cohäsion und der derselben entgegen wirkenden Kraft (der Wärme). Nimmt der Körper sein früheres Volumen wieder vollständig ein, so heisst er vollkommen elastisch, im anderen Falle unvollkommen elastisch.

Mathematische Beziehungen zwischen den Grössen, welche bei

den Elasticitätserscheinungen in Betracht kommen, stellte zuerst Hooke (1678) auf experimentellem Wege fest; dieselben können auch aus der Continuität der betreffenden Grössen gefolgert werden. Sie sind durch zwei Gesetze gegeben[1]):

1. Die Änderung der Form ist proportional der äusseren Kraft, oder anders ausgedrückt, die elastische Kraft ist der Deformation proportional;

2. die Änderung der Form bleibt bis auf das Zeichen dieselbe, wenn man die Richtung der Kraft ändert oder den Zug durch Druck ersetzt und Torsion und Biegung im entgegengesetzten Sinne wirken lässt.

Die ersten genauen Versuche zur Messung der Elasticität, die durch Zug geweckt wurde, stellte S'Gravesande (1720—21) an. Er gab dem Körper Fadenform, brachte ihn in eine horizontale Lage und befestigte ihn an seinen Enden; er beschwerte alsdann den Faden in der Mitte mit einem Gewichte und bestimmte die Beziehung der Verlängerung zu dem Gewichte und der Fadenlänge. Die Versuche beziehen sich mehr auf die Biegungselasticität als auf die Zugelasticität. Zur Untersuchung der letzteren ist es vortheilhaft, den Körper in Draht- oder Stabform zu benützen, ihn vertical aufzuhängen, am unteren freien Ende zu belasten, und die Verlängerung mit einem Kathetometer zu messen. Nach dieser Methode beobachteten F. Savart (1837), Masson (1841), Wertheim (1844) u. a. Die Versuche ergaben für einen Stab von der Länge l und dem Querschnitte s, dass die Verlängerung λ dem spannenden Gewichte p, der Länge l gerade und dem Querschnitte s umgekehrt proportional ist, dass also

$$\lambda = \frac{1}{E} \cdot \frac{p \cdot l}{s},$$

wenn E der Elasticitätsmodul (oder Elasticitätscoefficient), d. i. ein Proportionalitätsfactor ist, der von der Natur des Stoffes abhängt. Die Dimension von E ist $[mL^{-1}T^{-2}]$ entsprechend einer Kraft auf die Flächeneinheit.

W. Weber machte (1841) die Beobachtung, dass es bei den meisten Körpern stundenlange dauert, bevor der Gleichgewichtszustand durch die Belastung völlig hergestellt wird, und dass ebenso der Körper nur sehr langsam in seine ursprüngliche Form zurückkehrt, wenn die spannende Kraft zu wirken aufgehört hat. Man nennt die letztere Erscheinung elastische Nachwirkung.

Schon früher wurde bemerkt, dass jeder Körper nur bis zu einer Grenze auf Zug in Anspruch genommen werden darf, wenn er nach Beseitigung der äusseren Kraft wieder seine ursprüngliche Form annehmen soll. Die bezügliche grösste zulässige Spannung heisst Elasticitätsgrenze.

1) Violle, Lehrb. d. Phys. I. S. 357. Deutsche Ausgabe.

Das angegebene Elasticitätsgesetz gilt nur innerhalb der Elasticitätsgrenze. In demselben wird $E = p$, wenn $\lambda = l$ und $s = 1$, d. h. der Elasticitätsmodul ist ein Gewicht, welches man an das Ende eines Stabes vom Querschnitte Eins hängen müsste, um ihn um seine eigene Länge zu dehnen, vorausgesetzt, dass die Verlängerung innerhalb der Elasticitätsgrenze möglich wäre.

b) Das Elasticitätsgesetz lässt sich auch auf die Form einer Arbeitsgleichung, speciell des Spannungsgesetzes für Gase bringen; schreibt man ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$E \cdot s\lambda = p \cdot l,$$

führt hierin statt p das spannende Gewicht dP für eine Querschnittseinheit ein, so dass $p = s \cdot dP$, und setzt das Volumen $l \cdot s = v$ und dessen Änderung $s \cdot \lambda = dv$, so erhält man

$$E \cdot dv = v \cdot dP.$$

Da E seiner Dimension gemäss einen Druck auf die Flächeneinheit bedeutet, so gibt jede Seite der Gleichung einen Arbeitswert an, und zwar den der Verlängerung des elastischen Stabes. Die rechte Seite gibt die Arbeit in der Form der hydrostatischen Grundgleichung, indem das Volumen v, das unter dem von den Molecularkräften herrührenden Adhäsionsdruck steht, um den Druck dP entlastet wurde; und die linke Seite liefert als das Product aus der Kraft $E \cdot s$ in den Weg λ die Arbeit, wenn E die Kraft auf die Flächeneinheit, hier der Cohäsionsdruck, ist. Wird deshalb für $E = P$ eingeführt und dP als der Cohäsion entgegen wirkend negativ genommen, so folgt

$$P dv + v dP = 0 \quad \text{und} \quad P \cdot v = \text{const.}$$

Dieser Ausdruck stimmt der Form nach mit dem Boyle'schen Gasspannungsgesetze überein; statt des Luftdruckes oder eines anderen äusseren Druckes steht hier der Cohäsionsdruck.

Das Elasticitätsgesetz als Arbeitsgleichung erhält man unmittelbar, wenn man die potentielle Energie der Cohäsion als Function des Volumens darstellt und eine kleine Volumsänderung nach der Taylor schen Reihe berechnet. Man erhält nämlich aus der Energie oder dem Arbeitswerte

$$W = f(v) \quad \text{für} \quad dv = \frac{dW}{f'(v)} = \frac{v \cdot dP}{E};$$

denn dW entspricht der oben angegebenen Arbeit $v dP$, und

$$f'(v) = dW/dv = dW/s \cdot dl$$

dem Cohäsionsdruck auf die Flächeneinheit.

Es mag noch bemerkt werden, dass G. Jäger (Wiener Ber. 1892, S. 553) setzt

$$W = P(v - \omega) \quad \text{und} \quad f(v) = R\left[1 + \frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v^2} + \frac{a_3}{v^3} + \cdots\right]$$

und zeigt, dass diese Function bei Benützung der ersten drei Glieder die van der Waals'sche Zustandsgleichung und bei Anwendung von vier Gliedern eine von Clausius angegebene verbesserte Gleichung liefert.

Vor eingehenderen Ermittelungen sollen noch einige Elasticitätscoefficienten in kg pro mm^2 nach Wertheim angegeben werden. Es ist für

Silber, gehämmert, bei 15^0 . . .	$E =$ 7357
„ ausgeglüht, „ „ . . .	7140
Kupfer, gehämmert, „ „ . . .	12449
„ ausgeglüht, „ „ . . .	10519
Platin, gehämmert, „ „ . . .	17044
„ ausgeglüht, „ „ . . .	15518
Eisendraht, gehämmert, bei 15^0 . .	20869
Eisen aus Berry, ausgeglüht, . . .	20794
Packfong ($Zn_5 Cu_6 Ni_3$)	11500
Messing ($Zn Cu_2$)	8543
Glas von der Dichte 2·45	6722
Akazie längs der Faser	1262
Pappelholz längs der Faser . . .	517
Eis (nach Frankenheim)	514.

Der Elasticitätsmodul ändert sich bei jeder bleibenden Zustandsänderung, namentlich auch mit der Temperatur, indem er mit steigender Temperatur abnimmt. Für Kautschuk hat jedoch Grätz gezeigt, dass er mit jedem Temperaturgrad um 0·5% wachse.

Die Bestimmungen der Elasticitäscoefficienten mit Hilfe von longitudinalen Schwingungen ergeben durchaus etwas grössere Werte für E als die vorstehenden.

Für die Zusammendrückung gilt dasselbe Elasticitätsgesetz wie für die Verlängerung; deshalb ist es möglich, die Elasticitätscoefficienten E der festen Körper mit den reciproken Compressibilitätscoefficienten $1/\varkappa$ der Flüssigkeiten zu vergleichen. Entsprechend den in § 33 angegebenen Werten erhält man für $1/\varkappa$ in Atmosphärendrücken bezogen auf 1 mm^2 bei

Quecksilber	von 0^0	. . 3390		
Wasser	„ 18^0	. . 216		
Alkohol	„ 13^0	. . 101	bei 0^0 nach Quincke	121
Äther	„ 14^0	. . 72	„ „ „ „	86
Schwefelkohlenstoff	„ $15{\cdot}6^0$	. . 110	„ „ „ „	185.

Den speciellen Daten ist zu entnehmen, dass die Elasticitätscoefficienten der festen Körper im allgemeinen wohl grösser sind als jene der Flüssigkeiten; da aber bei den letzteren Coefficienten von derselben Grössenordnung vorkommen wie bei den ersteren, — der

des Quecksilbers ist sogar grösser als jener der Hölzer, des Eises und der meisten Steine —, so kann der Unterschied dieser Coefficienten kein wesentliches Kennzeichen für den Aggregatzustand bilden. Und fassen wir den Elasticitätsmodul als Wert für den Cohäsionsdruck auf, so ist ersichtlich, dass die Cohäsion bei den Flüssigkeiten durchaus nicht so gering ist, um damit den Unterschied gegenüber den festen Körpern zu erklären.

c) Ein Vergleich des Elasticitätsgesetzes mit der Zustandsgleichung von van der Waals lässt auf die Abhängigkeit des Elasticitätsmoduls E vom Volumen schliessen, indem dafür in dieser Gleichung der Ausdruck a/v^2 erscheint. Wir können auch direct zu derselben Beziehung wie folgt gelangen:

Es ist leicht zu erkennen, dass in dem angegebenen Elasticitätsgesetze, das seiner Form nach mit dem Gasspannungsgesetz übereinstimmt, der Druck thatsächlich aus dem Cohäsionsdruck P und dem äusseren Druck p besteht, dass also anstatt P die Summe $(P+p)$ zu setzen ist. Die Gleichung

$$(P+p)\cdot dv + v\cdot d(P+p) = 0$$

stellt alsdann die bei der Volumsänderung dv von der Kraft (der Wärmeintensität) $(P+p)$, welche der Cohäsion und dem äusseren Drucke das Gleichgewicht hält, und von der durch dp angeregten und sofort mit voller Stärke wirkenden Druckänderung $d(P+p)$ geleisteten Arbeiten nach dem Satze der virtuellen Bewegung zusammen. Die letztere Arbeit wird auch durch die hydrostatische Grundgleichung bestimmt. Die Summe beider Arbeiten ist die Ableitung von dem Arbeitswerte

$$(P+p)v = R,$$

der mit der Zustandsgleichung übereinstimmt.

Um nun eine Beziehung zwischen dem Cohäsionsdrucke P und v zu finden, denken wir jeden äusseren Druck p hinweg und veranlassen eine Volumsänderung dv etwa durch eine Abkühlung. Dabei leistet die Cohäsion P, entsprechend der obigen Gleichung, die Arbeit Pdv, und auf das Volumen v wird der Druck allmählig um dP erhöht; die mit dem letzteren Vorgange verbundene Arbeit kann man sich wie folgt versinnlichen: Man denke sich den Körper in aufeinander folgende Schichten von der Dicke der Verschiebung λ der Begrenzungsflächen s getheilt; unter der Voraussetzung einer gleichmässigen Druckfortpflanzung, durch welche der Körper homogen erhalten wird, lässt sich die Verschiebungsarbeit der Schichten berechnen; das Mittel der von Null bis dP anwachsenden Kraft ist $dP/2$, und die von der Kraft geleistete Arbeit ist (vgl. § 42) $\Sigma\,{}^1\!/_2\cdot dP\cdot s\cdot\lambda = {}^1\!/_2\cdot v\cdot dP$. — Nach dem Principe der virtuellen Bewegung gilt demnach

$$P \cdot dv + \frac{1}{2} v \cdot dP = 0$$

oder

$$\frac{dP}{P} = -\frac{2dv}{v},$$

woraus sich der Wert

$$P = \frac{a}{v^2}$$

ergibt, der mit dem Ausdrucke für den Cohäsionswert in der Zustandsgleichung vollständig übereinstimmt.

Wir können auf denselben Wert auch unmittelbar aus der Wechselwirkung zweier benachbarten Molecülschichten schliessen; fassen wir in die beiden Schichten alle Massentheilchen zusammen, die gegenseitig auf einander wirken, so ist die Kraft jedenfalls dem Producte der Massen beider Schichten proportional; die Masse jeder Schichte ist aber ihrer Dichte und somit die Cohäsionskraft dem Quadrate der Dichte direct oder dem Quadrate des Volumens umgekehrt proportional. Eine tiefer eingehende Behandlung hat zu berücksichtigen, dass der zugehörige Proportionalitätsfactor noch von anderen nicht in Betracht gezogenen physikalischen Grössen abhängen kann.

Eine weitere Begründung für die Giltigkeit des Spannungsgesetzes für alle homogenen Körper soll noch mittelst des ersten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie erbracht werden.

Wir betrachten nun die Bedeutung der Zustandsgleichung — als genaueres Elasticitätsgesetz — für das elastische Verhalten der Körper. In der Form

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - \omega) = R$$

sind p der äussere Druck, gewöhnlich der Luftdruck, a/v^2 der Cohäsionsdruck, $(v - \omega)$ das der Druckänderung unterworfene Volumen und R eine Constante, wenn keine Wärmeerscheinungen in Betracht kommen. Darnach muss ω ein Volumen innerhalb des Körperraumes v sein, das von Druckänderungen nicht beeinflusst wird. Wir wollen es mit E. Dühring als das Volumen der Molecüle annehmen, das bei der Ausdehnung und Zusammendrückung des Körpers unverändert bleibt. Die Annahme entspricht auch einer nothwendigen Forderung, die gestellt werden muss, wenn die linke Seite der Zustandsgleichung als Ausdruck einer Volumenergie angesehen wird. $(p + a/v^2)$ bestimmt alsdann den Wirkungsgrad und $(v - \omega)$ ist der Wirkungsraum, zu dem das unveränderliche Molecülvolumen nicht mitgezählt werden darf. Von diesem Gesichtspunkte hat Regnault durch den Nachweis der Existenz der Grösse ω der Atomtheorie eine wesentliche Unterstützung geleistet.

Die Zustandsgleichung gestattet eine genauere Bestimmung des Elasticitätscoefficienten E, insbesondere seiner Beziehung zum Volumen.

Es muss nämlich beachtet werden, dass bei experimentellen Ermittelungen niemals eine Änderung des Cohäsionsdruckes $P = a/v^2$, sondern immer nur eine Änderung der äusseren Kraft p gemessen wird; und auf diese Änderung bezieht sich der Elasticitätsmodul E in der bei den Versuchen benützten Gleichung

$$v \cdot dp = E \cdot dv.$$

Aus der Zustandsgleichung erhält man als Beziehung zwischen dp und dv

$$(v - \omega)\, dp = P \cdot \left[1 - \frac{2\omega}{v} + \frac{p}{P}\right] dv,$$

oder bei Vernachlässigung des Atmosphärendruckes p gegenüber dem Cohäsionsdruck P und Multiplication mit $v/(v - \omega)$

$$v \cdot dp = P\left(1 - \frac{\omega}{v - \omega}\right) \cdot dv.$$

Durch Vergleich dieser mit der vorletzten Gleichung erhält man für den Elasticitätscoefficienten

$$E = P\left[1 - \frac{\omega}{v - \omega}\right] = \frac{a}{v^2} \cdot \left(1 - \frac{\omega}{v - \omega}\right).$$

Es ist also $E = P$, wenn das Molecülvolumen ω gegenüber dem Zwischenvolumen $(v - \omega)$ vernachlässigt werden darf.

Die Wärmelehre gibt Mittel an die Hand, das Verhältnis $\omega/(v - \omega)$ zu berechnen und damit auch die Beziehung zwischen dem Elasticitätsmodul und dem Cohäsionsdruck genau zu bestimmen. Hier soll nur noch bemerkt werden, dass nach der vorstehenden Beziehung E ausser mit dem Gesammtvolumen v auch mit dem Molecülvolumen ω veränderlich ist, dass also bei molecularen Veränderungen auch der Elasticitätsmodul geändert wird.

Aufg. 1. Eine Claviersaite von $l = 1493$ mm Länge und 0·6586 mm Dicke, also $s = 0{\cdot}34$ mm² Querschnitt wurde nach Gerstner durch ein Gewicht von $p = 6{\cdot}72$ kg um $\lambda = 1{\cdot}71$ mm gedehnt. Wie gross war der Elasticitätsmodul dieses Drahtes? — ($E = 17\,260$ kg.) **2.** Wie gross ist der Elasticitätsmodul des Platins, wenn ein Platindraht von 3 m Länge und 1 mm² Querschnitt durch ein Gewicht von 5 kg eine Verlängerung um 0·88 mm erfährt? — ($E = 17\,045$.) **3.** Welches Gewicht ist nöthig, um einen Eisendraht von 2 m Länge und 0·4 mm² Querschnitt innerhalb der Elasticitätsgrenze um 0·5 mm zu verlängern, den Elasticitätsmodul zu 20 800 kg angenommen? — (2·08 kg.) **4.** Unter Festigkeit versteht man den Widerstand, den ein Körper der Trennung seiner Theile entgegensetzt; sie ist die letzte Elasticitätsgrenze. Wenn nun ein Stab von Tannenholz einen Querschnitt von 1·5 cm² hat und durch ein Gewicht von 1200 kg gerade zerrissen wird, wie gross ist der Festigkeitsmodul? — (Bezogen auf mm² 1200 : 150 = 8.) **5.** Welches Gewicht ist zum Zerreissen eines Messingdrahtes von 1·25 mm Durchmesser erforderlich, und welches kann er mit Sicherheit tragen? Der Festigkeitsmodul sei 50. — (Festigkeit

$= 0{\cdot}625^2 \cdot \pi \cdot 50 = 61{\cdot}356$ kg. Mit dem Sicherheitscoefficienten 1/6 vermindert sich die zu tragende Last auf 10·2 kg.) **6.** Ein schmiedeeiserner Stab von quadratischem Querschnitt soll eine Last von 61·5 q tragen; wie gross muss die Seite seines Querschnittes sein? Festigkeitsmodul $= 41$. — ($x^2 \cdot 41/6 = 6150$, $x = 30$ mm.) [Fliedner-Krebs.]

§ 49. **Elastische Kräfte eines deformierten Parallelepipedes.** Im Vorhergehenden wurde die Wirkung einer Kraft auf einen Körper nur in der Kraftrichtung betrachtet. Infolge des Zusammenhanges der Körpertheilchen machen sich auch nach anderen Richtungen Wirkungen geltend. Zur näheren Untersuchung derselben benützen wir einen geraden parallelepipedischen, elastischen Körper, der normal zu seinen Seitenflächen durch Zugkräfte in Anspruch genommen werden soll[1]).

a) Verschiebungen längs der Kanten. — Die Kantenlängen des Körpers seien dx, dy, dz; die Zugkräfte auf die hiezu normalen Seiten pro Flächeneinheit seien beziehungsweise X, Y, Z. Die Kraft $X \cdot dy\,dz$ verlängert dx um $d\xi'$. Mittelst des Elasticitätsmoduls E erhält man

$$d\xi' = \frac{1}{E} \cdot \frac{(X \cdot dy \cdot dz)dx}{dy \cdot dz} \quad \text{oder} \quad \frac{d\xi'}{dx} = \frac{1}{E} \cdot X.$$

Ebenso bringen die Kräfte Y und Z nach ihren Richtungen Verlängerungen hervor. Ausserdem haben sie aber auch Verkleinerungen der zu ihnen normalen Querschnitte zur Folge. So wirken sie verkürzend auf dx und zwar mit einer ihrem Werte proportionalen Stärke; wir dürfen demnach für die Verkürzungen der Längeneinheit schreiben

$$\frac{\varepsilon}{E} \cdot Y \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon}{E} \cdot Z.$$

Mit Rücksicht darauf gilt für die Verlängerung $d\xi$ von dx

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{E} \cdot [X - \varepsilon(Y + Z)].$$

Darnach erhält man für die Verlängerungen der drei Kanten

$$d\xi = \frac{1}{E}[X - \varepsilon(Y + Z)]\,dx$$

und analog

$$d\eta = \frac{1}{E}[Y - \varepsilon(X + Z)]\,dy$$

und

$$d\zeta = \frac{1}{E}[Z - \varepsilon(X + Y)]\,dz.$$

Wenn man jede der drei letzten Gleichungen mit der zugehörigen Fläche multipliciert, dann alle drei addiert und beachtet, dass die

1) Violle, Lehrb. d. Phys. I. S. 368 ff.; Christiansen, Theor. Phys. S. 101 ff. u. a.

Summe der linken Seiten die Volumänderung dv, ferner rechts $dx \cdot dy \cdot dz = v$ ist, so erhält man

$$dv = \frac{1}{E}(X + Y + Z) \cdot (1 - 2\varepsilon) \cdot v.$$

Bei gleichem Druck auf die Seiten ist $X = Y = Z = dP$ und es wird

$$dv = \frac{3(1 - 2\varepsilon)}{E} \cdot v \cdot dP.$$

Hierin heisst $E/3(1 - 2\varepsilon)$ der Volummodul gegenüber dem Längenmodul E der Elasticität.

Durch sorgfältige Messungen an prismatischen Stäben aus Kautschuk und anderen Materialien fand Wertheim $\varepsilon = 1/3$. Mehrere französische Physiker gaben dafür den Wert 1/4 an. Mittelst des ersteren Wertes nimmt der Volummodul den Wert des Längenmoduls an, und aus der vorstehenden Gleichung folgt der bereits bei dem elementaren Elasticitätsgesetze angegebene Arbeitswert

$$E \cdot dv = v \cdot dP.$$

Die im vorigen Paragraphen aus dem Vergleiche des Elasticitätsgesetzes mit dem Gasspannungsgesetze gezogenen Folgerungen gelten demnach auch für den Fall eines allseitigen Druckes, wenn auch dessen Seitenwirkungen in Rechnung gezogen werden.

Aus den obigen Werten für die Verlängerungen der Kanten können leicht auch folgende Werte für die Kräfte gefunden werden:

$$X = \lambda \cdot \frac{dv}{v} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{d\xi}{dx},$$

$$Y = \lambda \cdot \frac{dv}{v} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{d\eta}{dy},$$

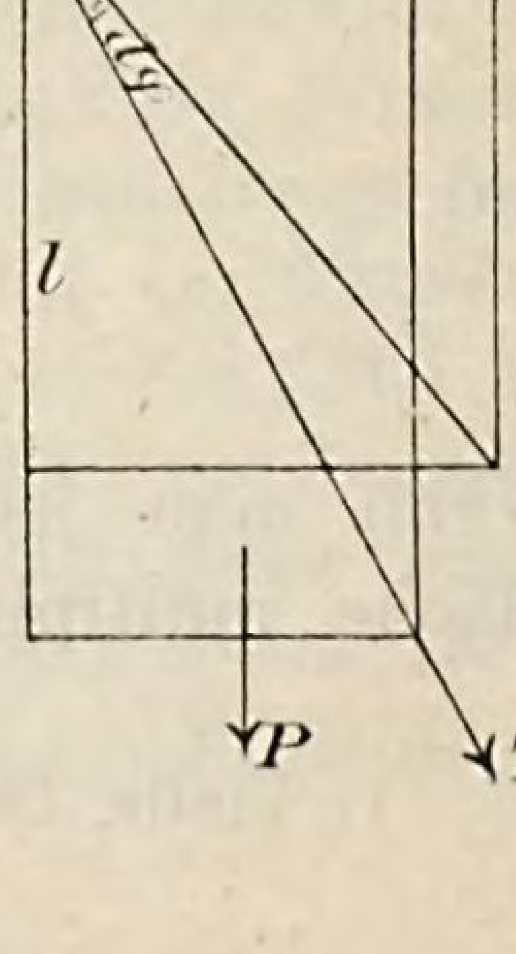
$$Z = \lambda \cdot \frac{dv}{v} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{d\zeta}{dz},$$

wobei

$$\lambda = \frac{\varepsilon \cdot E}{(1 - 2\varepsilon)(1 + \varepsilon)} \quad \text{und} \quad 2\mu = \frac{E}{1 + \varepsilon}.$$

Später soll auch zuweilen für die Volumsänderung der Volumseinheit $dv/v = 0$ gesetzt werden.

Fig. 40.



b) Drehungen. — Wir belasten einen geraden parallelepipedischen Körper, dessen Länge l und dessen Breite b sei, nach Fig. 40 mit einem Gewichte P und ermitteln die Drehung der Diagonalebene durch Berechnung der Anderung des Winkels φ.

Ursprünglich ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{b}$$

und nach der Dehnung von l und der Verkürzung von b

$$\operatorname{tg}(\varphi + d\varphi) = \frac{l\left(1 + \frac{P}{E}\right)}{b\left(1 - \frac{\varepsilon P}{E}\right)} = \operatorname{tg}\varphi \cdot \left[1 + \frac{(1+\varepsilon)P}{E}\right].$$

Im letzten Ausdrucke sind höhere Potenzen von $\varepsilon P/E$ als sehr kleine Grössen vernachlässigt.

Nun ist

$$\operatorname{tg}(\varphi + d\varphi) - \operatorname{tg}\varphi = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

und es folgt durch Substitution

$$d\varphi = \frac{1+\varepsilon}{E} \cdot P \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi .$$

Hierin ist $P \sin\varphi$ die Componente von P längs der Diagonalebene, deren Flächeninhalt $= s/\cos\varphi$ ist. Wird die Componente durch diese Fläche dividiert, so erhält man die Kraft auf die Flächeneinheit, nämlich $T = P \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$. Setzen wir noch wie oben

$$(1+\varepsilon)/E = 1/2\mu ,$$

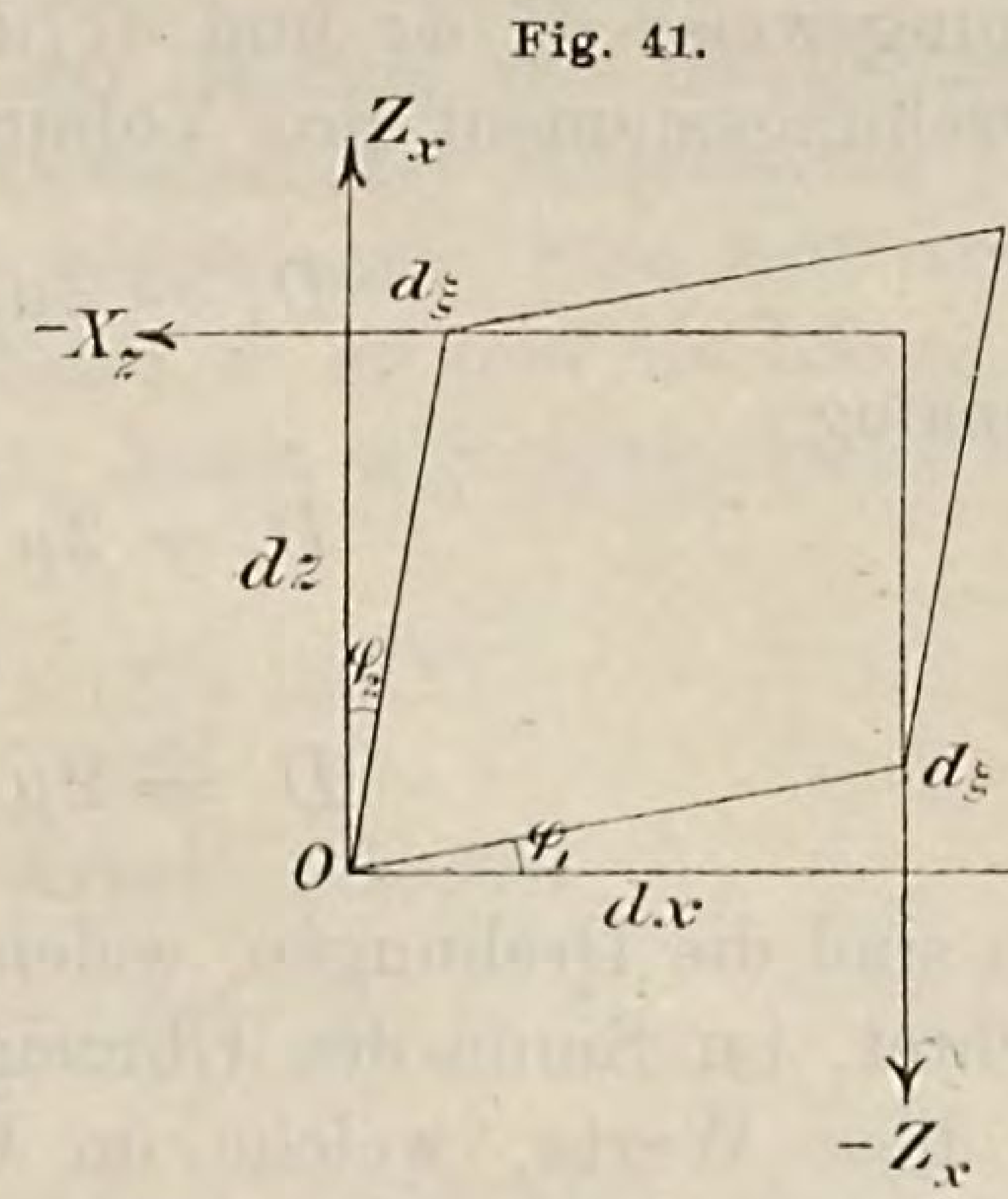
so folgt

$$d\varphi = \frac{T}{2 \cdot \mu} \quad \text{oder} \quad T = 2\mu \cdot d\varphi ,$$

d. h. die tangentiale elastische Kraft, welche längs einer Ebene wirkt, ist dem Drehungswinkel der Ebene proportional.

Der Satz lässt sich auf jede durch den Körper gelegte Ebene anwenden und kann daher allgemeine Giltigkeit beanspruchen. Es soll damit folgende Aufgabe gelöst werden: Ein rechtwinklig parallelepipedischer Körper mit den Kanten dx, dy, dz werde von drei Kräftepaaren gedreht; es wirke nämlich längs der Fläche $dx\,dy$ parallel zu dx und normal zu z die Kraft X_z auf jede Flächeneinheit, und längs der gegenüberliegenden Fläche wirke die Kraft $-X_z$; ferner wirke auf derselben Fläche $dx\,dy$ parallel zu dy und normal zu z die Kraft Y_z und auf der gegenüber liegenden Fläche die Kraft $-Y_z$. Analog wirken auf den zu derselben Ecke gehörigen Flächen $dx\,dz$ die tangentialen Kräfte X_y und Z_y und auf $dy\,dz$ die Kräfte Y_x und Z_x. Auf die gegenüberliegenden Seitenflächen wirken die entgegengesetzten Kräfte. Es sollen nun im Gleichgewichtszustande die bezeichneten Spannungen aus den Drehungswinkeln berechnet werden.

Fig. 41.



Wir betrachten die Drehung um die zur Zeichnungsfläche normale Kante dy nach Fig. 41. Das Drehungsmoment eines Kräftepaares ist

$(X_z \cdot dx \cdot dy) \cdot dz$, und das des anderen $(Z_x \cdot dy \cdot dz) \cdot dx$. Die Kräftepaare drehen im entgegengesetzten Sinne; ihre Momente müssen im Gleichgewichtszustande einander gleich sein, also muss

$$X_z = Z_x$$

sein. Für diese Kräfte folgt aus dem vorstehend abgeleiteten Satze über Flächenspannungen

$$X_z = 2\mu \cdot d\varphi_1 = 2\mu \cdot \frac{d\zeta}{dx}$$

und

$$Z_x = 2\mu \cdot d\varphi_2 = 2\mu \cdot \frac{d\xi}{dz}.$$

Durch Addition und Halbierung folgt

$$X_z = Z_x = \mu\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right).$$

In ähnlicher Weise erhält man für die anderen Flächenspannungen, welche beziehungsweise um die Achsen dx und dz drehen,

$$Y_z = Z_y = \mu\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right),$$

$$X_y = Y_x = \mu\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right).$$

Damit sind die verlangten Kräfte bestimmt. Die Werte dienen zur Aufstellung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen in einem elastischen Felde.

Wir benützen noch die nebenstehende Figur, um die vollständigen Momente der Drehung um die Achsen anzugeben. Die Drehung um die y-Achse setzt sich aus der Differenz der Drehungen φ_1 und φ_2 beziehungsweise $d\xi/dz$ und $d\zeta/dx$ zusammen. Man erhält somit für das Drehungsmoment pro Volumseinheit $(D = T \cdot 1)$

$$D_y = 2\mu \cdot \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right),$$

und analog

$$D_z = 2\mu \cdot \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right)$$

und

$$D = 2\mu \cdot \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right).$$

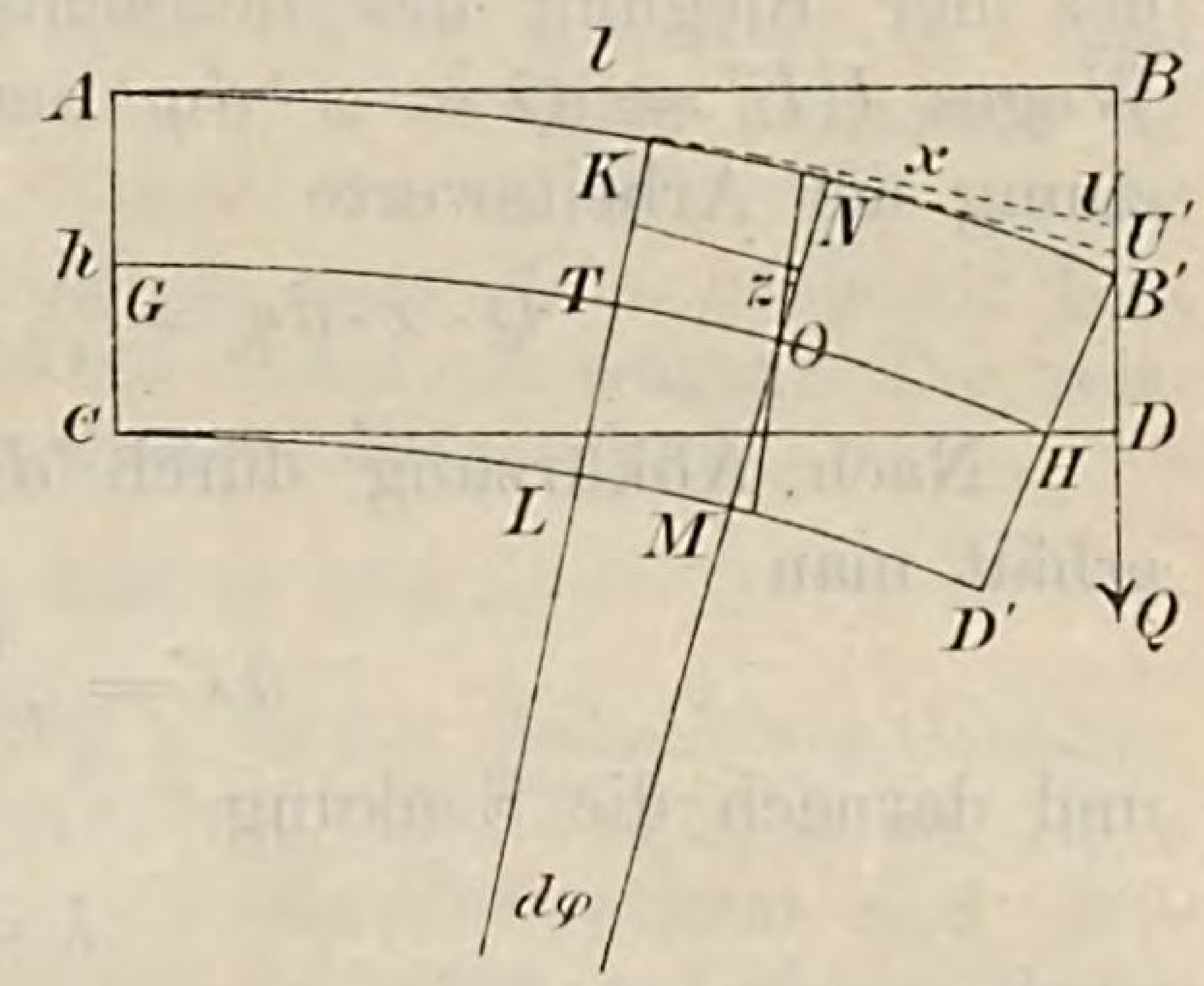
Hierin sind die Drehungen, welche, von der positiven Seite der Achsen betrachtet, im Sinne des Uhrzeigers erfolgen, als positiv gerechnet. Auch diese Werte, welche im Gleichgewichtszustande verschwinden, während der Bewegung aber entsprechend gross sind, dienen zur Kraftbestimmung im elastischen Felde.

Aufg. Ein Stab werde in der Richtung Z seiner Länge mit der Kraft P (bezogen auf die Flächeneinheit des Querschnittes) gedehnt; die Projectionen der Verschiebung irgend eines Punktes (x, y, z) sind dann

$\xi = -bx$, $\eta = -by$, $\zeta = az$. Es sind a, b und die Änderung Θ der Volumseinheit durch P und die obigen Constanten λ und μ auszudrücken. — (Aus $Z = P = \lambda\Theta + 2\mu\, d\zeta/dz = \lambda(a - 2b) + 2\mu a$ und $X = Y = \lambda(a - 2b) - 2\mu b = 0$ folgt $a = (\lambda + \mu)P/\mu(3\lambda + 2\mu)$, $b = \lambda \cdot P/2\mu(3\lambda + 2\mu)$, $\Theta = a - 2b = P/(3\lambda + 2\mu)$.)

§ 50. **Biegungselasticität.** Wir betrachten einen rechtwinkligen parallelepipedischen Körper, der an einem Ende befestigt und am anderen Ende mit einem Gewichte Q belastet ist (Fig. 42). Der Körper wird gebogen, so dass der obere Theil ausgedehnt und der untere zusammengedrückt erscheint; eine Fläche GH in der Mitte bleibt ihrer Grösse nach unverändert. Die Arbeit der Biegung verrichtet das Gewicht Q, indem es um die Strecke $BB' = \lambda$ herabsinkt. Unter der Voraussetzung, dass die Formveränderung sehr klein ist, lässt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen der wirkenden Kräfte die Grösse λ berechnen.

Fig. 42.



Länge, Breite und Höhe des Körpers seien beziehungsweise l, b, h. Wir construieren die zu der oberen und unteren Fläche an den betreffenden Stellen normalen Querschnitte KL und MN, betrachten das zwischenliegende, sehr kleine Körperstück und bestimmen den Arbeitswert seiner Formveränderung bei der Biegung. OT sei $= dx$ und $KU = x$. Der Winkel, den beide Querschnitte mit einander bilden, sei $d\varphi$; derselbe ist auch der Winkel der Tangenten in K und N, nämlich $d\varphi = \sphericalangle\, UKU'$. Oberhalb der Mittelfläche TO wird das Volumen vergrössert, unterhalb verkleinert. Eine Schichte in der Entfernung z von OT, welche die Basis $b \cdot dz$ und die Länge dx hat, wird um das Stück $z \cdot d\varphi$ verlängert; damit wird eine elastische Kraft geweckt von der Stärke

$$p \cdot b \cdot dz = \frac{E \cdot (b \cdot dz) \cdot z \cdot d\varphi}{dx}.$$

Längs des Weges $z \cdot d\varphi$ wird die Arbeit geleistet

$$p \cdot b \cdot dz \cdot z \cdot d\varphi = E \cdot b \frac{d\varphi}{dx} \cdot z^2 \cdot dz \cdot d\varphi\,.$$

Die beiden Seiten der Gleichung entsprechen der Form des Spannungsgesetzes $p \cdot dv$; die Gleichung könnte somit auch daraus abgeleitet werden. Dividiert man beiderseits durch $d\varphi$, so erhält man die Arbeit für die Winkeleinheit oder das Drehungsmoment, das in mehreren Lehrbüchern (Violle u. a.) unmittelbar berechnet wird. Um

die Arbeit der Volumänderung des ganzen Elementarprismas $KLMN$ zu erhalten, müssen die Arbeiten der einzelnen Schichten summiert werden. Man erhält

$$\int p \cdot b \cdot z \cdot dz \cdot d\varphi = E \cdot b \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot d\varphi \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 \cdot dz$$

$$= \frac{1}{12} \cdot E \cdot b \cdot h^3 \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot d\varphi .$$

Diese Arbeit wird von dem Gewichte Q geleistet, indem es längs des der Biegung des betrachteten Körperelementes entsprechenden Weges $UU' = d\lambda = x \cdot d\varphi$ herabfällt. Es besteht somit die Gleichung der Arbeitswerte

$$Q \cdot x \cdot d\varphi = \frac{1}{12} \cdot E \cdot b \cdot h^3 \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot d\varphi .$$

Nach Abkürzung durch $d\varphi$ und Einführung von $d\lambda = x \cdot d\varphi$ erhält man

$$d\lambda = \frac{12 \cdot Q}{E \cdot b \cdot h^3} \cdot x^2 \cdot dx$$

und darnach die Senkung

$$\lambda = \frac{4 \cdot Q l^3}{E \cdot b \cdot h^3} .$$

Aufg. 1. In dem Gesetze für die Senkung des freien Körperendes bei der Biegung ist anstatt $b \cdot h^3$ das Trägheitsmoment T der Endfläche bh in Bezug auf eine durch deren Mittelpunkt gehende Achse b einzuführen. — ($T = \frac{1}{12} b \cdot h^3$, daher $\lambda = Q \cdot l^3 / 3E \cdot T$. In dieser Form lässt sich das Gesetz für jeden beliebigen Querschnitt anwenden.) **2.** Wie gross ist die Einsenkung bei der Biegung, wenn ein Balken an beiden Enden befestigt ist und in der Mitte mit einem Gewichte Q belastet wird? — (Die Einsenkung ist dieselbe, als wenn der Balken in der Mitte befestigt wäre und an jedem Ende mit $Q/2$ belastet würde; somit wird

$$\lambda' = \lambda / 16 = Q l^3 / 4E \cdot b \cdot h^3 .)$$

3. Es ist aus der Stärke der geweckten Elasticität die letzte Elasticitätsgrenze, d. i. die relative Festigkeit zu ermitteln. — Aus der ersten der vorstehenden Gleichungen ist die Elasticität für die Flächeneinheit $p = E \cdot z \cdot d\varphi / dx$. Durch Einführung des Wertes für $d\varphi / dx$ aus der letzten Arbeitsgleichung wird $p = 12 Qxz / bh^3$. Der Betrag wird am grössten für $x = l$ und $z = h/2$, es wird dann $p = F$ die absolute oder Zugfestigkeit und man erhält $Q = bh^2 F / 6l$. In der Form

$$Q \cdot l = (F \cdot b \cdot h) \cdot h / 6$$

gibt das Gesetz die Gleichheit der Kraftmomente von Q und F in Bezug auf eine durch C gehende Achse. Von diesem Gesichtspunkte wurde es bereits von Galilei abgeleitet.) **4.** Ein an einem Ende eingemauerter Balken von Eichenholz hat eine Breite von 1·8 dm, eine Höhe von 2 dm und eine Länge von 40 dm; welche an seinem freien Ende hängende

(kleinste) Last würde ihn abbrechen, und welche kann er dort mit Sicherheit tragen? Der Coefficient der relativen Festigkeit sei $F/6 = 150$ kg pro cm^2 und der Sicherheitscoefficient $= 1/10$. —

$$(Q = 150 \cdot 18 \cdot 20^2/400 = 2700\,\text{kg};$$

mit Sicherheit würden 270 kg getragen.) **5.** Ein Stab von Eichenholz mit quadratischem Querschnitte von 2·634 cm Seite, der mit seinen beiden Enden wagrecht auf Unterlagen gelegt war, die 98 cm von einander abstanden, wurde nach Gerstner durch ein in der Mitte angehängtes Gewicht von 100·8 kg gebrochen. Wie gross ergab sich daraus der relative Festigkeitsmodul? — (Man setze in $Q = x \cdot bh^2/l$ für Q den Wert $Q/2$ und $l/2$ statt l; dann wird $x = Ql/4bh^2 = 135{\cdot}1$.) **6.** Eine horizontal an beiden Enden aufliegende rechteckige Stange von Gusseisen ist 0·4 dm breit, 0·6 dm hoch und 3 m lang; welche in ihrer Mitte hängende Last würde sie brechen und welche kann sie mit Sicherheit tragen? Der relative Festigkeitsmodul ist 500, der Sicherheitscoefficient 1/4. —

$$(Q = 4 \cdot 500 \cdot 4 \cdot 36/300 = 960\ \text{kg}$$

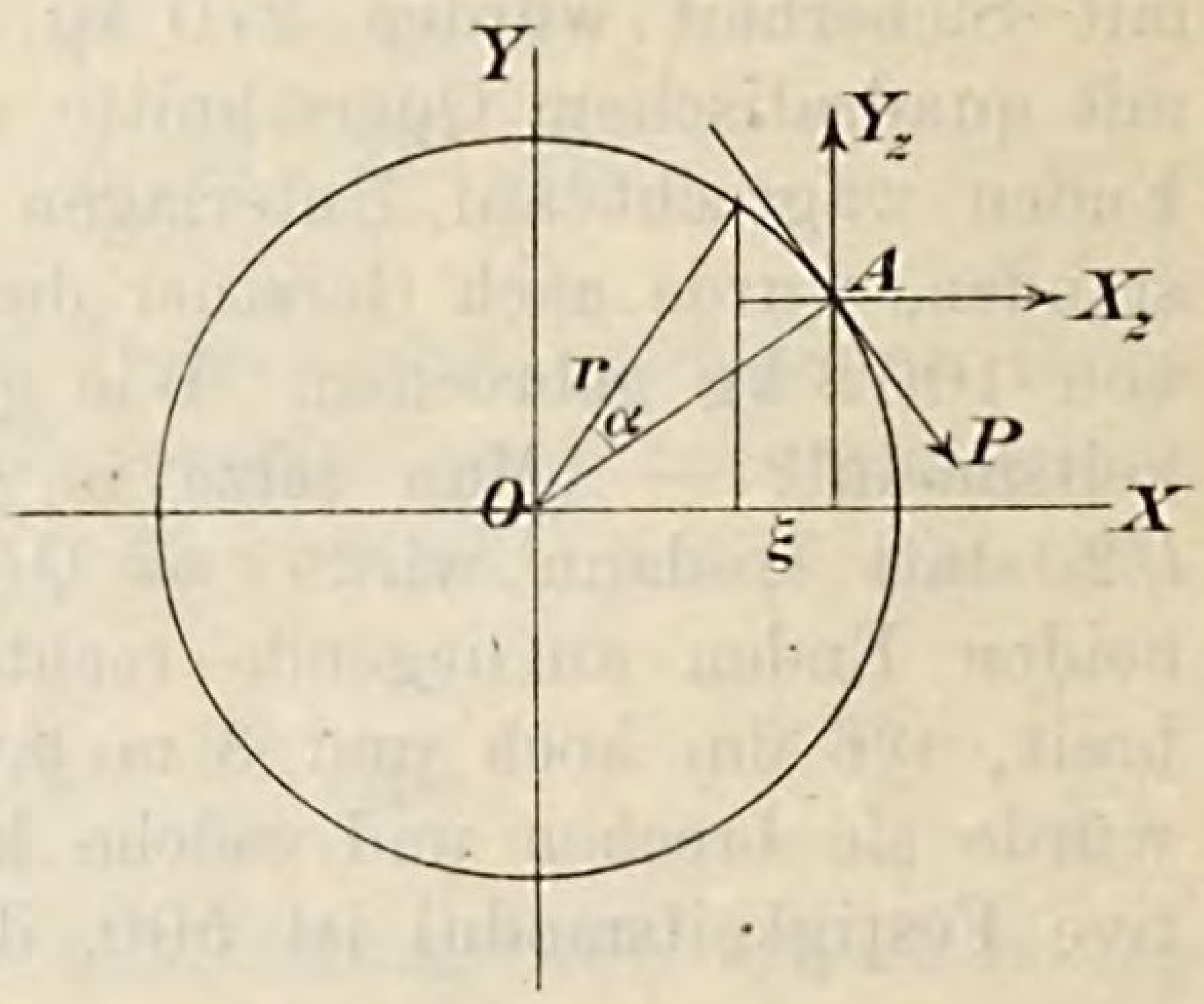
und die sichere Tragkraft $960/4 = 240$ kg.) **7.** Der Boden eines Getreidemagazins ruht auf parallelen Eichenbalken von 3 dm Breite, 4 dm Höhe und 80 dm Länge, deren Mitten 7·5 dm von einander entfernt sind. Wie hoch lässt sich Getreide, von welchem 1 l 0·8 kg wiegt, auf diesem Boden ohne Gefahr des Einbrechens aufschütten? Der relative Festigkeitsmodul ist 150, der Sicherheitscoefficient 1/10. — $(Q = 8 \cdot (150/10) \cdot bh^2/l$ und darnach $x = 15$ dm.) [Aufg. 4—7 sind von Fliedner und Krebs.]

§ 51. **Torsionselasticität.** Ein verticaler Cylinder, dessen Länge l und dessen Basishalbmesser R seien, werde an seinem oberen Ende festgehalten und am unteren Ende durch ein Kräftepaar mit dem Drehungsmomente D gedreht; es ist die Beziehung zwischen dem Drehungswinkel α und dem Momente D zu ermitteln. Bei der Rechnung sollen kleine Drehungen innerhalb der Elasticitätsgrenze vorausgesetzt werden.

Eine Gerade, parallel zur Cylinderachse, im Abstande r von dieser, nimmt infolge der Drehung die Form einer Schraubenlinie an, welche in allen ihren Theilen mit der Verticalen den $\sphericalangle\, \varphi = r \cdot \alpha / z$ einschliesst. z ist die Entfernung des betreffenden Elementes der Schraubenlinie vom oberen Ende des Cylinders. Winkel φ ergibt sich leicht aus dem von der betrachteten Verticallinie bei der Drehung beschriebenen rechtwinkligen Dreieck. Die Gleichung ist nur richtig, wenn $\sphericalangle\, \varphi$ sehr klein ist; bei grossem $\sphericalangle\, \alpha$ muss daher der Radius r gegen die Länge des Cylinders sehr klein sein. Da die Gleichung auf die untere Basis bezogen wird, für welche $z = l$ ist, so muss das Verhältnis von r/l sehr klein sein. Gestützt auf diese Bemerkungen können leicht die durch Drehung erzeugten Flächenspannungen X_z und Y_z und das Drehungsmoment D berechnet werden.

Fig. 43 stelle irgend einen zur Cylinderachse normalen Querschnitt dar. Ein Punkt A in der Entfernung r von der Achse werde um die Strecke $r \cdot \alpha$ gedreht. Die Projectionen dieses Bogenelementes geben die Änderungen der Coordinaten, nämlich

Fig. 43.



$$\xi = r \cdot \alpha \cdot \frac{y}{r} = \frac{\varphi}{r} \cdot y \cdot z,$$

$$\eta = -r \cdot \alpha \cdot \frac{x}{r} = -\frac{\varphi}{r} \cdot x \cdot z.$$

Darnach erhält man zufolge § 49

$$X_z = \mu \frac{d\xi}{dz} = \mu \frac{y}{r} \cdot \varphi$$

und

$$Y_z = -\mu \cdot \frac{x}{r} \cdot \varphi.$$

Beide Spannungen stellen Componenten einer zu r normalen Resultierenden dar, deren Stärke ist

$$P = \mu \cdot \varphi = \mu \cdot \frac{r\alpha}{z}.$$

Diese Kraft wirkt auf die Flächeneinheit bei A in irgend einem Querschnitte. Bezogen auf die untere Grundfläche erhält man damit die Arbeit für ein Flächenelement ds bei der Drehung um den Winkel α

$$dW = P \cdot ds \cdot r \cdot \alpha = \mu \cdot \left(\frac{r\alpha}{l}\right)^2 \cdot l \cdot ds.$$

Der Ausdruck hat augenscheinlich die Form $p \cdot v$ im Sinne der Zustandsgleichung. Der Druck p für die Flächeneinheit ist hierin $\mu (r\alpha/l)^2 = \mu \cdot \varphi^2 = \frac{1}{\mu} \cdot P^2$; er ist also dem Quadrate der Flächenspannung proportional.

Aus dem Arbeitswerte für die Winkeleinheit folgt das Drehungsmoment

$$D = \int \frac{dW}{\alpha} = \int_0^R \frac{\mu \cdot r^2 \cdot \alpha}{l} \cdot 2r\pi \cdot dr = \frac{\mu \cdot \alpha \cdot \pi}{2l} \cdot R^4$$

und der Drehungswinkel

$$\alpha = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{2 \cdot l \cdot D}{\pi \cdot R^4}.$$

Die Gleichung enthält alle Gesetze der Torsionselasticität. Nach ihr wird die Constante μ auch Torsionscoefficient genannt.

Die Beziehung zwischen μ und dem Elasticitätsmodul E ist nach § 49 S. 174

$$\mu = \frac{E}{2(1+\varepsilon)}.$$

Wüllner berechnete nach Experimenten von Wertheim[1])

für Eisen $\mu = 6837$, $E = 17805$, $\varepsilon = 0{\cdot}32$,

„ Kupfer $\mu = 3612$, $E = 9395$, $\varepsilon = 0{\cdot}30$,

„ Glas $\mu = 2383$, $E = 6200$, $\varepsilon = 0{\cdot}32$.

§ 52. **Kräfte im elastischen Felde.** a) Wir betrachten nun ein elastisches Mittel in einem unbegrenzten Raume, das durch Druck- oder Zugkräfte in einen Spannungszustand versetzt worden sei. Mit Bezug auf die geweckten elastischen Kräfte bildet das Medium ein Kraftfeld. Die Kräfte selbst ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen für ein rechtwinkliges Elementarparallelepiped mit den Kanten dx, dy, dz. Auf jede Fläche wirken zu beiden Seiten gleich starke und entgegengesetzt gerichtete Kräfte; diese Wirkungsweise ist für die Spannung charakteristisch. Die Kräfte auf die äusseren Seitenflächen des Elementarparallelepipedes können folgendermassen festgestellt werden: Auf die Flächeneinheit der näher gegen den Coordinatenursprung liegenden Seite $dy \cdot dz$ wirkt normal $-X_x$; auf die Flächeneinheit der gegenüberliegenden Seite wirkt

$$\left[X_x + \frac{dX_x}{dx} \cdot dx\right].$$

Auf die untere Seite $dx \cdot dy$ wirkt die Tangentialspannung $-X_z$ parallel zur X-Achse und $-Y_z$ parallel zur Y-Achse, ferner auf die gegenüber liegende Seite beziehungsweise $[X_z + (dX_z/dz)\,dz]$ und $[Y_z + (dY_z/dz)\,dz]$. Auf die vordere Seite $dx\,dz$ wirken die Spannungen $-X_y$, $-Z_y$ und auf die hintere Seite $[X_y + (dX_y/dy)\,dy]$ und $[Z_y + (dZ_y/dy)\,dy]$. Die übrigen Bezeichnungen wählen wir entsprechend § 49.

Wirkt nun auf die Masseneinheit im Elementarvolumen $dx\,dy\,dz$ eine Kraft, deren Componenten X, Y, Z sind, so muss jede dieser Componenten von den gleichgerichteten Spannungen aufgehoben werden, wenn Gleichgewicht herrschen soll. Es gilt demnach folgende Bedingung, in welcher δ die Dichte des elastischen Mittels bedeutet,

$$\left(\frac{dX_x}{dx}\,dx\right)dy \cdot dz + \left(\frac{dX_y}{dy}\,dy\right)dx \cdot dz + \left(\frac{dX_z}{dz}\,dz\right)dx \cdot dy + X\delta\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_z}{dz} + X \cdot \delta = 0,$$

und analog gilt

$$\frac{dY_x}{dx} + \frac{dY_y}{dy} + \frac{dY_z}{dz} + Y \cdot \delta = 0$$

und

$$\frac{dZ_x}{dx} + \frac{dZ_y}{dy} + \frac{dZ_z}{dz} + Z \cdot \delta = 0.$$

1) Wüllner, Lehrb. d. Phys. 4. Aufl. I. S. 227.

Kommen Spannungen längs der Flächen nicht in Betracht, so hat man für die wirksamen, normal zu den Flächen des Volumelementes gerichteten Kräfte mit Rücksicht auf § 49a, in welchem jedoch die normalen Kräfte X, Y, Z die hier mit X_x, Y_y, Z_z bezeichneten Kräfte bedeuten, die Werte

$$-X \cdot \delta = \frac{dX_x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\lambda \cdot \Theta + 2\mu \cdot \frac{d\xi}{dx}\right),$$

$$-Y \cdot \delta = \frac{dY_y}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\lambda \cdot \Theta + 2\mu \cdot \frac{d\eta}{dy}\right),$$

$$-Z \cdot \delta = \frac{dZ_z}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\lambda \cdot \Theta + 2\mu \cdot \frac{d\zeta}{dz}\right).$$

Durch Einführung der Werte für dX_x/dx, dY_y/dy, dZ_z/dz, ferner mit Hilfe der im § 49b angegebenen tangentialen Flächenspannungen X_y, X_z u. s. w. (die anwendbar sind, weil auch bei jeder Flächenspannung Wirkung und Gegenwirkung vorhanden sind und die äusseren Spannungen hier wie in § 49b Drehpaare zusammensetzen) und endlich mit Benützung der Drehungswinkel um die zu den Coordinatenachsen parallelen Kanten, nämlich

$$\alpha_y = \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right),$$

$$\alpha_z = \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right),$$

$$\alpha_x = \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right)$$

erhält man für die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen die Formen

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d\Theta}{dx} + \mu\left(\frac{d\alpha_y}{dz} - \frac{d\alpha_z}{dy}\right) + X \cdot \delta = 0,$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d\Theta}{dy} + \mu\left(\frac{d\alpha_z}{dx} - \frac{d\alpha_x}{dz}\right) + Y \cdot \delta = 0,$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d\Theta}{dz} + \mu\left(\frac{d\alpha_x}{dy} - \frac{d\alpha_y}{dx}\right) + Z \cdot \delta = 0.$$

Ist das Medium unzusammendrückbar, so ist $\Theta = 0$ und die wirkenden Kräfte sind

$$-X \cdot \delta = \mu\left(\frac{d\alpha_y}{dz} - \frac{d\alpha_z}{dy}\right),$$

$$-Y \cdot \delta = \mu\left(\frac{d\alpha_z}{dx} - \frac{d\alpha_x}{dz}\right),$$

$$-Z \cdot \delta = \mu\left(\frac{d\alpha_x}{dy} - \frac{d\alpha_y}{dx}\right).$$

b) Ahnlichkeit mit elektrischen Kräften. Die Gleichungen für die Drehungswinkel α und die letzten Ausdrücke für die Kräfte X, Y, Z zeigen eine gewisse Ahnlichkeit mit den Maxwell'-Hertz'schen

Gleichungen für das elektrische Kraftfeld. Sie stimmen aber unter den für die Elasticität angegebenen Bedingungen nicht vollkommen überein. Diesbezüglich mag hier nur anschliessend an die vorhergehenden Auseinandersetzungen kurz bemerkt werden, dass die Übereinstimmung erzielt wird, wenn man die Kräfte nicht der relativen, sondern der absoluten Verschiebung der Theilchen proportional setzt, wenn man also für die Masseneinheit $X = \varkappa\xi$, $Y = \varkappa\eta$, $Z = \varkappa\zeta$ und $\Theta = 0$ annimmt. Substituiert man für $dX/dt = X'$, $dY/dt = Y'$, $dZ/dt = Z'$, so erhält man aus den Gleichungen für die Drehungswinkel

$$\varkappa \cdot \frac{d\alpha_x}{dt} = \frac{dZ'}{dy} - \frac{dY'}{dz}$$
$$\varkappa \cdot \frac{d\alpha_y}{dt} = \frac{dX'}{dz} - \frac{dZ'}{dx}$$
$$\varkappa \cdot \frac{d\alpha_z}{dt} = \frac{dY'}{dx} - \frac{dX'}{dy}$$

und aus den letzten Gleichungen für die Kräfte X, Y, Z, die sich auch durch die Beschleunigungen $d^2\xi/dt^2 = dX'/dt \cdot \varkappa$ etc. darstellen lassen,

$$\delta \cdot \frac{dX'}{dt} = \varkappa \cdot \mu \left(\frac{d\alpha_y}{dz} - \frac{d\alpha_z}{dy}\right)$$
$$\delta \cdot \frac{dY'}{dt} = \varkappa \cdot \mu \left(\frac{d\alpha_z}{dx} - \frac{d\alpha_x}{dz}\right)$$
$$\delta \cdot \frac{dZ'}{dt} = \varkappa \cdot \mu \cdot \left(\frac{d\alpha_x}{dy} - \frac{d\alpha_y}{dx}\right).$$

Die beiden letzten Gruppen der Gleichungen stimmen genau mit der Form der Maxwell-Hertz'schen Gleichungen für das elektrische Kraftfeld überein, wenn X', Y', Z' mit den elektrischen Kräften und die Drehungen α_x, α_y, α_z mit den magnetischen Kräften gleichgestellt werden[1]). Die Kräfte X, Y, Z hierin, verglichen mit den elastischen Kräften, geben $X = X_x \cdot \varkappa/2\mu$. Der Quotient μ/δ bedeutet (nach § 56) das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenbewegung im Medium.

§ 53. **Potentielle Energie im Kraftfelde.** a) In einem unbegrenzten elastischen Mittel, z. B. Kautschuk, befinde sich an irgend einer Stelle ein kugelförmiger Raum mit einer Flüssigkeit oder einem Gase gefüllt, und die Kugelfläche werde durch einen Druck radial etwas nach auswärts verschoben. Die Verschiebung pflanzt sich alsdann in dem Mittel von Schichte zu Schichte fort und beansprucht eine Arbeit. Es soll die ganze Verschiebungsarbeit berechnet werden.

1) Vgl. meine Schrift über den Atherdruck als einheitl. Naturkraft. S. 15. Teschen 1893.

Der Halbmesser des kugelförmigen Raumes sei r, die Verschiebung der Kugeloberfläche σ_0; dann ist der Verschiebungsraum $4r^2\pi \cdot \sigma_0$. Um einen gleichen Raum sollen nun auch alle folgenden concentrischen kugelförmigen Schichten des Mediums nach auswärts verschoben werden, indem immer eine Verschiebungsschichte die andere benachbarte verdrängt. In der Entfernung R vom Kugelmittelpunkte wird eine kugelförmige Fläche um σ verschoben, wenn

$$4R^2\pi \cdot \sigma = 4r^2\pi \cdot \sigma_0$$

ist; also ist die Verschiebung

$$\sigma = \frac{r^2}{R^2} \cdot \sigma_0 .$$

Nach dem Elasticitätsgesetz ist die Kraft in der Richtung des Radius R auf die hierzu normale Flächeneinheit (§ 49a)

$$p = 2\mu \cdot \frac{d\sigma}{dR} = -4\mu \cdot \frac{r^2}{R^3} \cdot \sigma_0 ,$$

und der bewegende Überdruck von einer Seite eines Raumelementes für die Flächeneinheit (nach § 52a)

$$\frac{dp}{dR} \cdot dR = 12\mu \frac{r^2\sigma_0}{R^4} dR.$$

Der Druck entwickelt sich von Null bis zu der der Verschiebung σ entsprechenden Grösse. Zur Berechnung der Arbeit wird man deshalb den halben als den mittleren Druck zu verwenden haben; mit diesem erhält man für die Verschiebungsarbeit der ganzen Kugelfläche $4R^2\pi$ längs der Strecke $\sigma = r^2\sigma_0/R^2$ den Wert

$$dW = 6\mu \cdot 4\pi \cdot r^4 \sigma_0{}^2 \, . \, \frac{dR}{R^4} .$$

Im ganzen Medium ist demnach die Arbeit

$$W = 6\mu \cdot 4\pi r^4 \sigma_0{}^2 \cdot \int_r^\infty \frac{dR}{R^4} = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{(4r^2\pi \cdot \sigma_0)^2}{r^3} ,$$

d. h. die Arbeit, die als potentielle Energie in dem elastischen Mittel aufgespeichert ist, ist proportional dem Quadrate des Verschiebungsraumes der inneren Kugelfläche und umgekehrt proportional der dritten Potenz des Halbmessers dieser Kugelfläche.

Man gelangt zu demselben Resultate, wenn man durch den Mittelpunkt der Kugel ein Coordinatensystem gelegt denkt, mit Bezug auf die Verschiebung eines Volumenelementes die wirkenden Kräfte auf dasselbe allgemein bestimmt und damit die potentielle Energie als Verschiebungsarbeit berechnet.

Nach der in den vorhergehenden Paragraphen gebrauchten Bezeichnung lässt sich die potentielle Energie eines elastischen Feldes als Summe der Producte der wirkenden Kräfte in die zurückgelegten

Wege wie folgt darstellen: Für die Arbeit in der Richtung der X-Achse gilt

$$\frac{1}{2}\left[(X_x \cdot dy\,dz)\frac{d\xi}{dx}\cdot dx + (X_y \cdot dz\,dx)\frac{d\xi}{dy}\,dy + (X_z \cdot dx\,dy)\frac{d\xi}{dz}\cdot dz\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[X_x \cdot \frac{d\xi}{dx} + X_y \cdot \frac{d\xi}{dy} + X_z \cdot \frac{d\xi}{dz}\right] dx \cdot dy \cdot dz\,,$$

und wenn $\Theta = 0$

$$= \mu\left[\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dy}\right)\cdot\left(\frac{d\eta}{dx}\right) + \left(\frac{d\xi}{dz}\right)\cdot\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)\right]\cdot dv,$$

die Arbeit nach allen drei Achsenrichtungen zusammen ist sodann

$$dW = \mu\left[\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2 + 2\left(\frac{d\xi}{dy}\right)\left(\frac{d\eta}{dx}\right) + 2\left(\frac{d\xi}{dz}\right)\left(\frac{d\zeta}{dx}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{d\eta}{dz}\right)\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)\right]\cdot dv\,.$$

In diese allgemeinen Ausdrücke für die potentielle Energie eines Raumelementes dv kann man nun die der Verschiebung σ entsprechenden Werte ξ, η, ζ setzen. Aus der Verschiebung $\sigma = \sigma_0 r^2/R^2$ folgen deren Projectionen auf den Achsen

$$\xi = \sigma \cdot \frac{x}{R} = r^2\sigma_0 \cdot \frac{x}{R^3}, \quad \eta = r^2\sigma_0 \cdot \frac{y}{R^3}, \quad \zeta = r^2\sigma_0 \cdot \frac{z}{R^3}.$$

Daraus und mit Rücksicht auf die Beziehung $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ erhält man

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{r^2\sigma_0}{R^3}\left(1 - \frac{3x^2}{R^2}\right),$$

ferner

$$\frac{d\xi}{dy} = \frac{d\eta}{dx} = -\frac{3r^2\sigma_0 xy}{R^5}$$

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{d\zeta}{dx} = -\frac{3r^2\sigma_0 zx}{R^5}$$

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{d\zeta}{dy} = -\frac{3r^2\sigma_0 yz}{R^5}.$$

Durch Substitution dieser Werte ergibt sich

$$dW = \mu\left(\frac{r^2\sigma_0}{R^5}\right)^2\cdot(6R^4)\cdot dv,$$

ein Ausdruck, der nach Einführung von $dv = 4R^2\pi \cdot dR$ vollständig in den oben angegebenen für dW und nach vollzogener Integration in jenen für die potentielle Energie W übergeht, nämlich in

$$W = \frac{\mu}{2\pi}\cdot\frac{(4r^2\pi\sigma_0)^2}{r^3}.$$

b) Das Resultat der vorstehenden Aufgabe zeigt Ähnlichkeit mit dem Werte für die potentielle Energie oder für das Potential einer der Schwerkraft unterworfenen Masse (§ 18 S. 71) oder wie später gezeigt

werden soll, für die Ladungsarbeit oder das Potential einer elektrischen Kugel: In beiden Potentialen steht an der Stelle des Verschiebungsraumes $4r^2\sigma_0\pi$ die Masse M, beziehungsweise die elektrische Ladung, und an der Stelle von r^3 im Nenner die erste Potenz des Radius r. In letzterer Hinsicht ist der mathematische Unterschied ein wesentlicher.

Dieser Unterschied verschwindet bei Lösung derselben Aufgabe, also bei Berechnung der Arbeit zur Verschiebung der von einer Kugelfläche $4r^2\pi$ aus aufeinander folgenden Schichten eines Mediums, wenn die geweckte Kraft der Verschiebung σ direct proportional gesetzt wird[1]). Zur Durchführung der Rechnung benützen wir die obigen Bezeichnungen und setzen nur die verschiebende Kraft für die Raumeinheit einer Schichte in der Entfernung R vom Kugelmittelpunkte

$$P = \varkappa \cdot \delta \cdot \sigma = \varkappa\delta\sigma_0 \frac{r^2}{R^2} \cdot$$

Damit wird in ähnlicher Weise wie oben die Verschiebungsarbeit einer Schichte

$$dW = \frac{1}{2} P \cdot dv \cdot \sigma = \frac{\varkappa}{8\pi\delta} \cdot (4r^2\pi \cdot \sigma_0\delta)^2 \cdot \frac{dR}{R^2} \cdot$$

Durch Summirung von der Kugelfläche mit dem Halbmesser r über das ganze unbegrenzte Feld erhält man die potentielle Energie [2])

$$W = \frac{\varkappa}{4\pi\delta} \cdot \frac{(4r^2\pi \cdot \sigma_0\delta)^2}{2r} \cdot$$

Hier steht $\varkappa/\delta$ für die obige Constante μ. — Im Vergleiche des W mit dem Potentiale einer schweren Masse auf sich selbst (§ 18) steht der constante Factor $(\varkappa/4\pi\delta)$ an der Stelle der Gravitationsconstanten und die Verschiebungsschichte $(4r^2\pi\sigma_0\delta)$ an der Stelle der Masse M des Körpers.

Die Ableitung macht die im § 19 S. 75 angedeutete Auffassung von Maxwell, dass die potentielle Energie eines Kraftfeldes in einer daselbst aufgespeicherten Arbeit ihren Grund habe, klar. Der dort angegebene Druck auf die Flächeneinheit im Felde ist hier als Kraft im Raume $(\sigma \cdot 1)$ gleich $p = P \cdot \sigma = \varkappa\delta(\sigma_0 r^2/R^2)^2$. Die Kraft auf die Masseneinheit des Mediums im Felde ist $f = P/\delta = \varkappa\sigma_0 r^2/R^2$.

1) J. Odstrčil: „Über den Mechanismus der Fernewirkung elektr. Kräfte", Wiener Akad.-Ber. 1883; und „Über den Mechanismus der Gravitation". Wiener Ber. 1884. — Siehe auch meine Schriften über das Energieprincip in d. Elektricitätslehre (1887) und über den Ätherdruck (1893).

2) Behufs elementarer Summierung (vgl. § 16) setze man $dR = R_n - R_{n-1}$ und $R^2 = R_n \cdot R_{n-1}$. Man erhält dann

$$\sum \frac{R_n - R_{n-1}}{R_n \cdot R_{n-1}} = \sum \left(\frac{1}{R_{n-1}} - \frac{1}{R_n}\right) = \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_n} \cdot$$

Damit wird $f^2 = p \cdot \varkappa/\delta$. Die Beziehung geht in die betreffende des § 19 über, wenn $\pi/\delta = 4\pi$ wird.

Durch Einführung der Kraft p auf die Flächeneinheit oder der Kraft f auf die Masseneinheit erhält man aus der vorstehenden potentiellen Energie in Übereinstimmung mit § 19

$$W = \frac{1}{2}\int p \cdot dv = \frac{1}{8\pi}\int f^2 \cdot dv.$$

Setzt man für $4r^2\pi\sigma_0\delta = M$ die fernwirkende Masse, so erhält man das Potential auf die Masseneinheit als Arbeitswert der Masseneinheit, nämlich

$$\frac{dW}{dM} = \frac{M}{r}.$$

Dieselben und noch weiter gehende Vergleiche ermöglicht die Elektricitätslehre.

c) Fernwirkungsgesetz. Zur Veranschaulichung der Maxwellschen Auffassungsweise über die potentielle Energie als Arbeitsvorrath im Kraftfelde möge noch folgende Aufgabe gelöst werden: In einem elastischen Mittel seien zwei kugelförmige Hohlräume vorhanden; jede der beiden Kugelflächen werde durch Druck im Sinne der vorhergehenden Aufgabe nach auswärts verschoben und diese Verschiebungen pflanzen sich in dem Mittel von Schichte zu Schichte bis ins Unendliche fort; es soll die Verschiebungsarbeit berechnet werden.

Die beiden drückenden Kugelflächen der Hohlräume *I* und *II* haben die Halbmesser r_1 und r_2, ihre Verschiebungen seien σ_1 und σ_2, die Entfernung ihrer Mittelpunkte R. Der Kürze halber setzen wir für die Verschiebungsschichten

$$4r_1^2\pi \cdot \sigma_1 \cdot \delta = m_1 \quad \text{und} \quad 4r_2^2\pi \cdot \sigma_2 \cdot \delta = m_2.$$

Die geweckten Kräfte seien den Verschiebungen σ direct proportional.

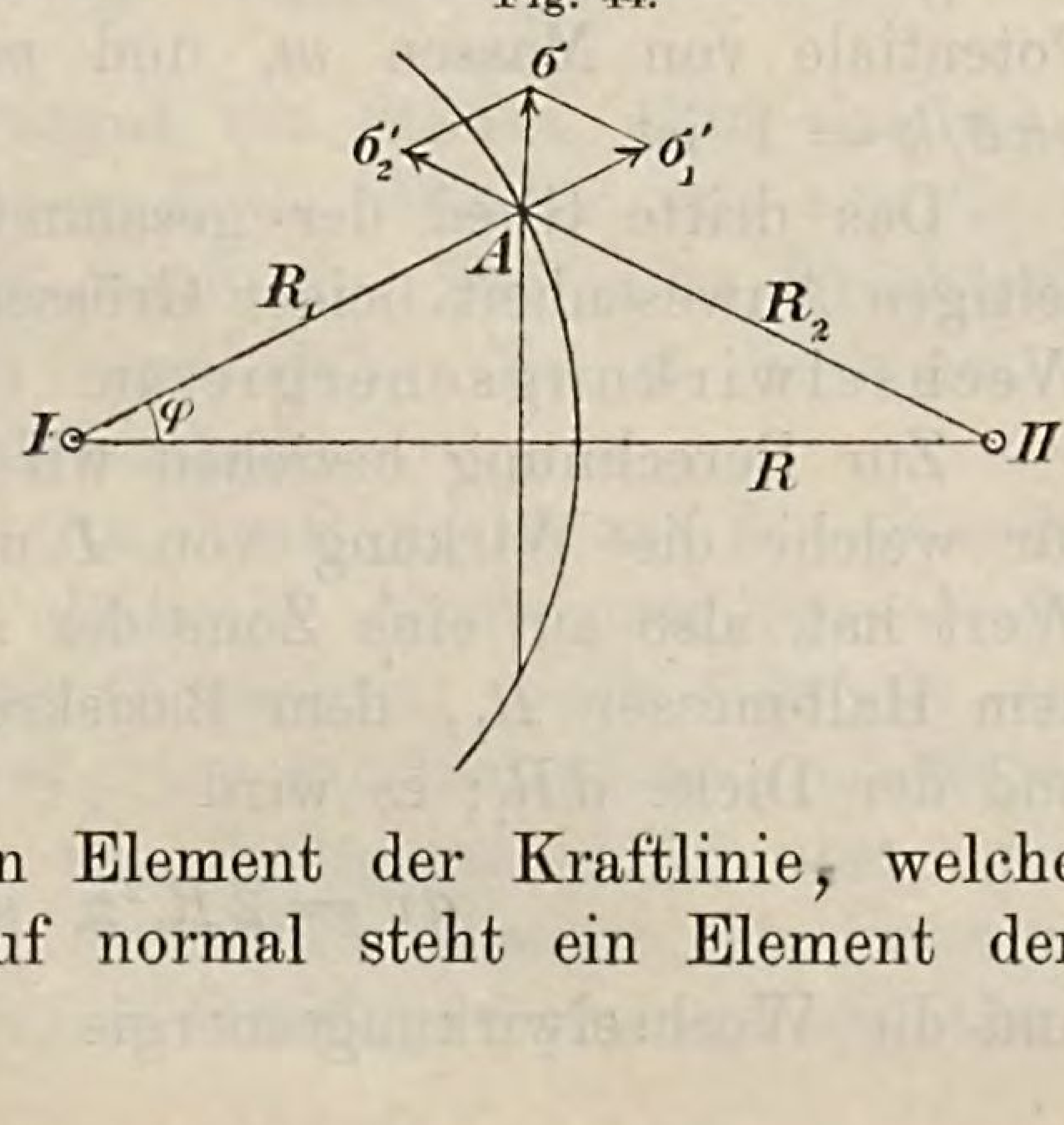
Ein Massentheilchen A im Felde erleidet von *I* (Fig. 44) die Verschiebung

$$\sigma_1' = \sigma_1 \frac{r_1^2}{R_1^2}$$

und von *II* die Verschiebung

$$\sigma_2' = \sigma_2 \frac{r_2^2}{R_2^2}.$$

Fig. 44.



Beide Verschiebungen setzen sich zu einer Resultirenden σ zusammen, und diese gibt zugleich ein Element der Kraftlinie, welche durch den Punkt A geht. Darauf normal steht ein Element der Niveaufläche.

Die geweckte elastische Kraft ist

$$p = k\mu\sigma = k\delta \cdot \sigma \cdot dv,$$

wobei dv ein Volumelement bezeichnet.

Die geleistete Arbeit von p ist

$$dW = \frac{1}{2} p\sigma = \frac{1}{2} k\delta\sigma^2 \cdot dv.$$

Wenn man σ aus dem Bewegungsparallelogramm berechnet und dafür die Seitenverschiebungen einführt, so wird das Arbeitselement

$$dW = \frac{1}{2} k\delta(\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + 2\sigma_1'\sigma_2' \cos A) \cdot dv.$$

Durch Einsetzen der angegebenen Werte für σ_1' und σ_2' und Summierung über den unendlichen Raum erhält man die Arbeit

$$W = \frac{1}{2} k\delta\sigma_1^2 \cdot r_1^4 \int \frac{dv}{R_1^4} + \frac{1}{2} k\delta \cdot \sigma_2^2 \cdot r_2^4 \int \frac{dv}{R_2^4} +$$
$$+ \frac{1}{2} k\,\delta\,\sigma_1\sigma_2\, r_1^2 r_2^2 \int \frac{\cos A \cdot dv}{R_1^2 \cdot R_2^2}.$$

Setzen wir in den zwei ersten Gliedern für dv Kugelschalen mit den respectiven Halbmessern R_1 und R_2 und der Dicke dR, so folgen als deren Werte unmittelbar:

$$W_1 = \frac{1}{2} k\delta\sigma_1^2 \,.\, r_1^4 \int_{r_1}^{\infty} \frac{4R_1^2\pi\, dR_1}{R_1^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{4\pi\delta} \cdot \frac{m_1^2}{r_1}$$

und

$$W_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{4\pi\delta} \cdot \frac{m_2^2}{r_2}.$$

Das sind die potentiellen Energien der einzelnen Kugeln I und II, deren Gesetz bereits oben aufgestellt wurde. Sie stimmen mit den gewöhnlichen nach der Potentialtheorie erhaltenen Werten der Potentiale von Massen m_1 und m_2 auf sich selbst überein, wenn $4\pi\delta/k = 1$ ist.

Das dritte Glied der gesammten Arbeit W ist von der gleichzeitigen Anwesenheit beider Grössen m_1 und m_2 abhängig; es gibt die Wechselwirkungsenergie an.

Zur Berechnung beziehen wir dv auf eine Kugelzone des Feldes, für welche die Wirkung von I und II an allen Stellen denselben Wert hat, also auf eine Zone der in Fig. 44 angedeuteten Kugel mit dem Halbmesser R_1, dem Basiskreise $2R_1\pi \sin\varphi$, der Breite $R_1 d\varphi$ und der Dicke dR_1; es wird

$$dv = 2R_1^2\pi \,.\, \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot dR_1$$

und die Wechselwirkungsenergie

$$W_{12} = \frac{1}{2} k\delta\sigma_1\sigma_2 r_1^2 . r_2^2 \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int\limits_{R_1=0}^{R_1=\infty} \frac{2R_1^2\pi \sin\varphi \cdot \cos A}{R_1^2 \cdot R_2^2} \cdot dR_1 \cdot d\varphi.$$

Wächst R_1 um dR_1, so vermindert sich R_2 um dR_2 und es folgt aus $\varDelta\,(dR_1, A, dR_2)$ $\cos A = dR_2/dR_1$, damit wird

$$W_{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{4\pi\delta} \cdot (4r_1^2\pi \cdot \delta \cdot \sigma_1) \cdot (4r_2^2\pi \cdot \sigma_2 \cdot \delta) \cdot \frac{1}{2} \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot \int\limits_{R}^{\infty} \frac{dR_2}{R_2^2}$$

oder

$$W_{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{4\pi\delta} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R}.$$

Aus diesem Werte der Wechselwirkungsenergie folgt die Kraft der Wechselwirkung

$$\frac{dW_{12}}{dR} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{k}{4\pi\delta} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}.$$

Das Gesetz stimmt mit der Form des Newton'schen Gravitationsgesetzes und den Gesetzen der elektrischen und magnetischen Wechselwirkung völlig überein, wenn wieder $k/\delta = 4\pi$ gesetzt wird.

Bei der Wechselwirkung zwischen Elektricität in einem anderen Medium als Luft ist aber thatsächlich eine Constante zu berücksichtigen; dies wurde zuerst von H. Helmholtz ausgesprochen und von Silow experimentell bestätigt. Es besteht daher vollkommene Übereinstimmung des Gesetzes mit den Versuchsergebnissen.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass das Fernwirkungsgesetz unmittelbar aus der Kraft der Verschiebung auf das zu bewegende Körperchen folgt; wenn wir die Verschiebungen von I ausgehend annehmen und die Verschiebungskraft auf eine Masse m_2 in II berechnen, so erhalten wir

$$p = k m_2 \sigma = k m_2 \cdot \sigma_1 \frac{r_1^2}{R^2} = \frac{k}{4\pi\delta} \cdot \frac{m_1 m_2}{R^2}.$$

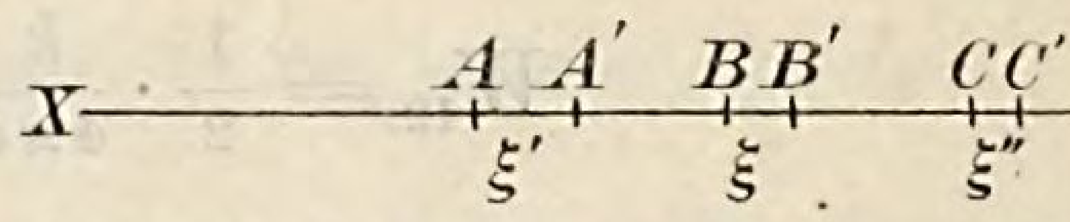
§ 54. **Longitudinale Schwingungen von Stäben.** Ein elastischer Stab sei in horizontaler Lage an einem Ende befestigt, und sein Querschnitt an dem freien Ende werde durch eine Zug- oder Druckkraft (etwa durch einen Hammerschlag) verschoben. Es ist die hiedurch hervorgerufene Erscheinung zu untersuchen.

Nach dem Aufhören der äusseren Kraft wirkt auf den verschobenen Querschnitt die geweckte elastische Kraft proportional der Verschiebung und bringt daher den Querschnitt (nach § 12) in eine schwingende Bewegung, die als Projection der Bewegung eines Kegelpendels betrachtet werden kann. Die Bewegung bleibt aber nicht bloss auf den ersten Querschnitt beschränkt, sondern die Verschiebungen pflanzen sich von Schichte zu Schichte fort, und ein Quer-

schnitt nach dem anderen wird in Schwingungen gerathen; es bildet sich eine sogenannte fortschreitende longitudinale Wellenbewegung aus. (Experimente und graphische Darstellung.) Erfahrungsgemäss ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer solchen Wellenbewegung constant. Dieselbe soll im Folgenden mittelst des Energieprincipes abgeleitet werden[1]).

Seien XX_1 in Fig. 45 die Achse des prismatischen oder cylindrischen Stabes und A, B, C die Schnitte derselben mit drei in unendlich nahen Abständen dx gelegenen Querschnitten, deren Fläche q sei. In einem bestimmten Momente hätten die drei Querschnitte die respectiven Elongationen ξ' ξ ξ''. Die Entfernungen der Querschnitte sind nun nicht mehr gleich dx, sondern sie haben sich um

Fig. 45.



$$(dx + \xi - \xi') - dx = d\xi'$$

$$(dx + \xi'' - \xi) - dx = d\xi''$$

geändert. Diesen Änderungen proportional wirkt nun die Elasticität als bewegende Kraft der Stabschichten. Wird diese Kraft mit P bezeichnet, so gilt nämlich nach den Gesetzen für Zug- und Druckelasticität

$$P = E \,.\, \frac{d\xi' \cdot q}{dx},$$

wenn E der Elasticitätsmodul ist.

Mit dieser Stärke wirkt die Elasticität in der Schichte $A'B'$ zufolge der Längenveränderung von AB. Ebenso aber wirkt auch eine Kraft infolge der Längenveränderung von BC um $d\xi''$, und zwar in entgegengesetzter Richtung. Die Resultierende beider Kräfte gibt die die Schichte bewegende Kraft. Dieselbe ist also

$$R = E \cdot \frac{d\xi' \cdot q}{dx} - E \cdot \frac{d\xi'' \cdot q}{dx} = Eq \cdot \frac{d^2\xi}{dx}.$$

Da nun die Arbeit der Kraft sich als Vermehrung der Energie in den bewegten Massentheilchen wiederfindet, so gilt zufolge des Energieprincipes

$$R d\xi = \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot q \cdot dx (v^2 - v_1^2),$$

wobei δ die Dichte des Stabes und v und v_1 die Geschwindigkeiten einer Schichte am Anfange und am Ende eines Zeitelementes dt sind; durch Substitution des gegebenen Wertes für R und für $v = \frac{d\xi}{dt}$ wird die Arbeit[2])

1) Siehe meine Schrift über das Energieprincip in der Dynamik. 1884.

2) Bei elementarer Darstellung wäre etwa zu setzen

$$d\xi' = \xi - \xi', \quad d^2\xi = \xi'' - \xi', \quad dt = \tau, \quad dx = \sigma.$$

$$E \cdot q \cdot \frac{d^2\xi}{dx} \cdot d\xi' = \frac{1}{2}\,\delta \cdot q \cdot dx\left[\left(\frac{d\xi'}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\xi''}{dt}\right)^2\right] = \delta \cdot q \cdot dx\,\frac{d\xi' - d\xi''}{dt^2}\,d\xi'.$$

Durch einfache Reduction und Einführung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Welle C aus $C = \frac{dx}{dt}$ erhalten wir

$$C = \sqrt{\frac{E}{\delta}},$$

d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist gleich der Quadratwurzel des Quotienten aus der Dichte in den Elasticitätsmodul des Stabes.

Der Bewegungszustand der einzelnen Querschnitte lässt sich nach dem Gesetze für die wirkende Kraft R genau ermitteln. Wir drücken R durch das Product aus der Masse $q \cdot dx \cdot \delta$ und der Beschleunigung $d^2\xi/dt^2$ aus und erhalten dann die Bedingungsgleichung

$$\delta \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = E \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2}$$

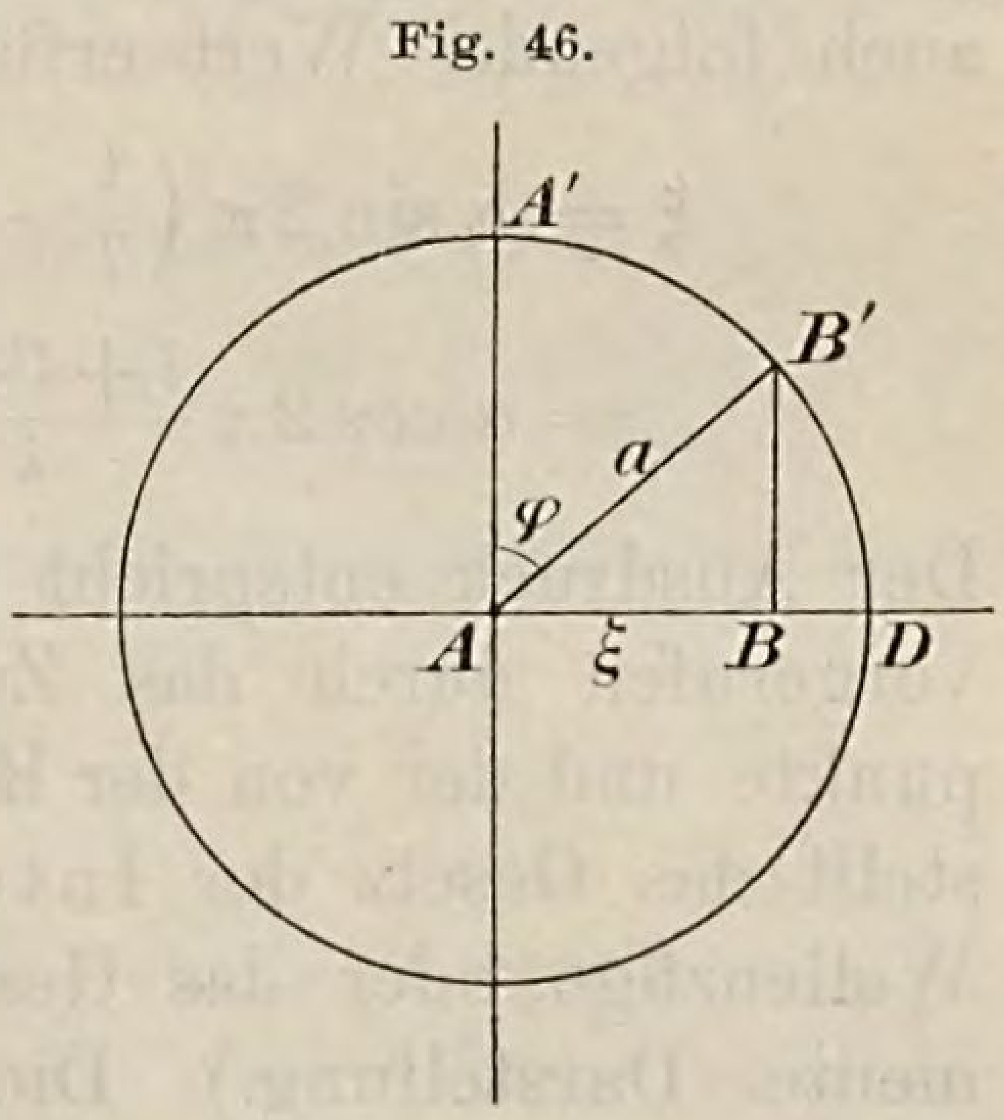
oder

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = C^2 \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2}.$$

Dieser Gleichung wird durch eine geradlinig schwingende Bewegung, die als Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung angesehen werden kann, entsprochen. Die Elongation $\xi = AB$, der Abstand des geradlinig schwingenden Punktes von der Gleichgewichtslage, ist die Projection des Bogens $A'B'$, also nach Fig. 46

$$\xi = a \cdot \sin\varphi = a \sin\frac{2\pi t}{T},$$

Fig. 46.



wenn a die Schwingungsweite oder Amplitude, T die ganze Schwingungsdauer und t die Zeit der Bewegung von der ursprünglichen Lage A bedeuten. Der Winkel φ ist der Zeit proportional, daher verhält sich $\varphi : 2\pi = t : T$.

Die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte B ist

$$v = \frac{d\xi}{dt} = \frac{2a\pi}{T} \cos\frac{2\pi t}{T}.$$

Die beiden Grössen ξ und v bestimmen die Phase, den Bewegungszustand, des Punktes vollständig.

Die lebendige Kraft des schwingenden Massentheilchens m in A gibt die Schwingungsintensität; sie ist

$$W = \frac{1}{2}\,m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2}\,m \cdot \left(\frac{2a\pi}{T}\right)^2.$$

Dieselbe wird auch aus der Arbeit der Kraft $m \cdot d^2\xi/dt^2$ längs des Weges a erhalten. Die Schwingungsintensität ist demnach proportional der bewegten Masse und dem Quadrate der Schwingungsweite.

Im Endpunkte D der Amplitude ist die lebendige Kraft gleich Null, die ganze Energie ist als potentielle Energie vorhanden. Am Wege nach der Gleichgewichtslage A hin wird immer mehr potentielle Energie in lebendige Kraft verwandelt; die gesammte Summe der Energie ist aber stets constant.

Diese Gesetze für einen schwingenden Punkt oder Querschnitt gelten auch für jeden Querschnitt des betrachteten Stabes. Wird die Entfernung eines solchen von dem freien Stabende mit x und die Zeit, während welcher er schwingt, mit t', ferner der Weg, längs welchem sich die Welle während der Schwingungsdauer T fortpflanzt, d. i. die Wellenlänge CT, mit λ bezeichnet, so ist

$$t' = t - \frac{x}{C} = t - T \cdot \frac{x}{\lambda}$$

und die Elongation wird

$$\xi = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

und die Geschwindigkeit wird

$$v = \frac{2a\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass dieser Wert für ξ der aufgestellten Bewegungsgleichung $d^2\xi/dt^2 = C^2 \cdot d^2\xi/dx^2$ entspricht. Aber auch folgender Wert erfüllt die nothwendige Bedingung:

$$\xi = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l + 2l' - x}{\lambda}\right)$$

$$= a \cos 2\pi \frac{l + l' - x}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l + l'}{\lambda}\right). \quad \text{Stablänge} = 2l.$$

Der Ausdruck entspricht einer zusammengesetzten Schwingung, hervorgerufen durch das Zusammentreffen der Welle vom Ausgangspunkte und der von der Befestigungsstelle zurückgeworfenen Welle; er stellt das Gesetz der Interferenz zweier einander entgegengesetzter Wellenzüge oder das Gesetz der stehenden Wellen dar. (Experimente. Darstellung.) Die Amplitude ist

$$A = a \cos 2\pi \frac{l + l' - x}{\lambda}.$$

$2l'$ gibt die Phasendifferenz bei der Reflexion an; dieselbe wird bestimmt durch die Bedingung, dass ein Ende des Stabes fest sein soll, für dieses muss $A = 0$ sein. Setzt man $x = l$, so wird

$$A = a \cos 2\pi l'/\lambda = 0,$$

wenn $2l' = \lambda/2$, d. h. die Phasendifferenz einer Welle bei der Reflexion an einer festen Fläche kommt der einer halben Wellenlänge gleich.

Soll das freie Ende volle Schwingungen ausführen, so muss für $x = 0$ die Amplitude $A = a$ sein; die Bedingung wird erfüllt, wenn $l = (2n + 1)\lambda/4$, d. h. die Stablänge muss eine ungerade Anzahl Viertelwellen messen. Durch Einführung dieser Bedingungen wird

$$A = a \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$$

$$\xi = a \,.\, \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \sin \frac{2\pi t}{T}$$

$$v = \frac{2a\pi}{T} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \frac{2\pi t}{T} \cdot$$

Nach diesen Schwingungsgesetzen sind für stehende Wellen jene Stellen charakteristisch, die stets in Ruhe bleiben; es sind die sogenannten Schwingungsknoten. Ihre Lage ergibt sich aus $A = 0$, also aus der Bedingung $2\pi x/\lambda = (2n + 1)\pi/2$; ihre Abstände vom freien Stabende sind daher $x = (n + 1)\lambda/4$, wobei n die aufeinander folgenden ganzen Zahlen bedeutet.

Die Energie des Stabes während der Dauer seiner Schwingungen ist

$$W = \int_0^l \frac{1}{2} q \cdot dx \cdot \delta \cdot \left(\frac{2a\pi}{T}\right)^2 \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{4} q \cdot \delta \cdot \left(\frac{2a\pi}{T}\right)^2 \int_0^l \left(1 + \cos \frac{4\pi x}{\lambda}\right) dx, \quad l = (2n + 1)\frac{\lambda}{4},$$

$$= \frac{1}{4} M \cdot \left(\frac{2a\pi}{T}\right)^2 .$$

Mit Hilfe der Ausdrücke für die Länge l des Stabes und der Schwingungsdauer T lässt sich aus dem Gesetze für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit C die Schwingungszahl N ermitteln. Setzen wir $N = 1/T$, $l = \lambda/4$ und $C = \lambda/T = 4l \cdot N$, dann ist die Schwingungszahl

$$N = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{E}{\delta}} \cdot$$

In der Lehre vom Schall erweist sich die Schwingungszahl als bestimmend für die Tonhöhe und wird deshalb auch absolute Tonhöhe genannt. Das erhaltene Gesetz gibt somit die Abhängigkeit der absoluten Tonhöhe von der Länge des Stabes, dem Elasticitätsmodul E und der Dichte δ. Es wird oft dazu benützt, um aus anderen bekannten Grössen den Elasticitätsmodul zu berechnen.

Aufg. 1. Es ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im Eisen aus dem Elasticitätsmodul 20000 kg für 1 mm^2 und der Dichte 7·7 zu berechnen. — $\left(C = \sqrt{9{\cdot}81 \cdot 2 \cdot 10^{10}/7700} = 5050\,\text{m}\right)$. **2.** Zu dem Tone eines Stabes aus Platin als Grundton gibt ein gleichlanger Stab aus Gusseisen die Quart (Verhältnis der absolut. Tonhöhe 3 : 4); wenn

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im Platin 2664 m ist, wie gross ist jene im Gusseisen? — (Zufolge der Beziehung $C = 4l \cdot N$ ist $3 : 4 = 2664 : x$ und $x = 3552$ m.) **3.** Die Töne zweier gleich langer Stäbe aus Gusseisen und Tannenholz bilden den Grundton und Quint (Tonverhältnis 2 : 3); die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Eisen ist 3552 m, wie gross ist jene im Tannenholze? — (5328 m). **4.** Schwingende Luftsäulen in Pfeifen befolgen dasselbe Gesetz wie longitudinal schwingende Stäbe; wie kann man daher das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft zu jener in anderen Gasen bestimmen? **5.** In welcher Beziehung stehen die Tonhöhen gleich langer, longitudinal schwingender Stäbe, von denen einer an einem Ende und der andere in der Mitte befestigt ist? Von offenen und gedeckten Pfeifen? — Anmerkung: Die Töne der Stäbchen werden einfach erhalten, indem man diese mittelst einer Zange entsprechend fasst und mit einem Hammer schlägt.

§ 55. **Transversale Schwingungen gespannter Saiten.** In ähnlicher Weise wie die longitudinalen Schwingungen eines Stabes lassen sich die Schwingungen gespannter Saiten behandeln. Der wesentliche Unterschied besteht nur darin, dass die Schwingungsrichtung hier zur Fortpflanzungsrichtung der Welle normal ist; es entstehen transversale Schwingungen. In jedem Augenblicke bildet die Saite eine Wellenform, sie nimmt die Gestalt einer Sinuslinie an, indem für jedes Theilchen die Elongation normal zur Längsrichtung der Saite gegeben ist durch

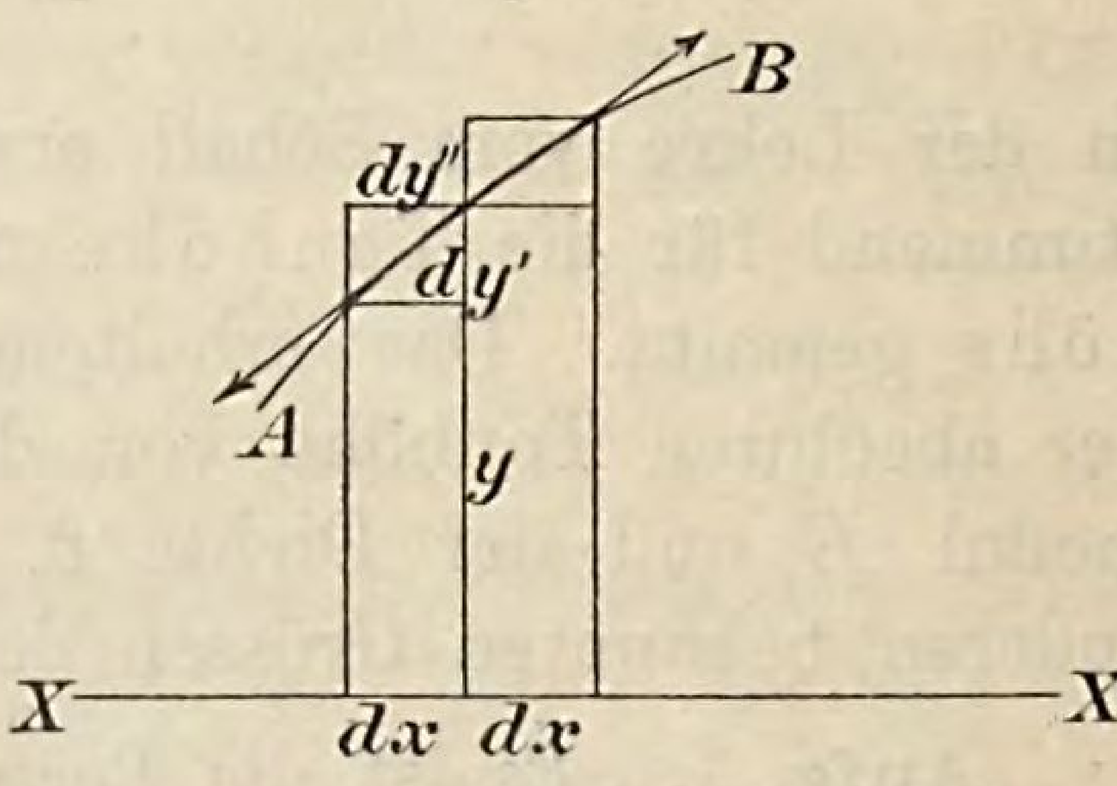
$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Wie bei Stäben so wird auch hier an den befestigten Enden die fortschreitende Welle reflectiert und es bilden sich stehende Wellen. (Graphische und experimentelle Darstellung.)

Die Gesetze für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und für die Schwingungszahl können in folgender Weise abgeleitet werden[1]).

Sei in Fig. 47 AB ein kleines Stück einer schwingenden Saite, die mit der Kraft P gespannt werde, in einem bestimmten Zeitmomente. Die Spannung P wirkt längs der Elemente, deren ursprüngliche Länge dx sei. Die ein Element treibende Kraft ist nun die Resultierende der längs der Elongation y fallenden Componenten der Kräfte P, die in der Richtung zweier benachbarten Elemente wirkend zu denken sind. Zur Berechnung dieser Componenten von P lässt sich näherungsweise der Sinus der Neigungswinkel der Curvenelemente gegen die X-Achse

Fig. 47.



1) Siehe meine Schrift über d. Energ.-Pr. in d. Dynamik. 1884.

durch die Tangente ersetzen, so dass man für die bewegende Kraft erhält

$$R = P \cdot \frac{dy'}{dx} - P \cdot \frac{dy''}{dx} = P \cdot \frac{dy' - dy''}{dx} = P \cdot \frac{d^2y}{dx},$$

wobei dy' und dy'' die Differentiationen der Elongationen von den aufeinanderfolgenden Curvenpunkten sind.

Die Arbeit dieser Kraft findet sich stets als Zuwachs der kinetischen Energie im bewegten Elemente. Da nun $\frac{dy}{dt}$, wenn dt ein Zeitelement, der Ausdruck für die Geschwindigkeit des schwingenden Elementes ist, so wird die Energie

$$w = \frac{1}{2}\,\delta \cdot dx \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2,$$

wobei δ die Masse der Längeneinheit der Saite ist; und im nächsten Momente

$$w' = \frac{1}{2}\,\delta \,.\, dx \left(\frac{dy''}{dt}\right)^2,$$

daher der Zuwachs an kinetischer Energie

$$\begin{aligned} w - w' &= \frac{1}{2}\,\delta \cdot dx \cdot \left[\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy''}{dt}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\,\delta \cdot dx \cdot \left[\frac{dy'}{dt} - \frac{dy''}{dt}\right]\left[\frac{dy'}{dt} + \frac{dy''}{dt}\right] \\ &= \frac{1}{2}\,\delta \cdot dx \cdot \frac{d^2y}{dt} \cdot 2\,\frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

Nach der Aquivalenz von Arbeit und Energie haben wir die Gleichung zwischen der Arbeit von R und der Änderung der lebendigen Kraft

$$P \cdot \frac{d^2y}{dx} \cdot dy = \delta \cdot dx \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \cdot dy$$

oder

$$\frac{P}{\delta} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Ist nun C die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung, dann ist $dx = C \cdot dt$ und es wird

$$C = \sqrt{\frac{P}{\delta}}.$$

Führt man hierin für δ den Querschnitt der Saite s, ihr spec. Gewicht f, also für $\delta = \frac{s \cdot f}{a}$ ein, so erhält man die für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Wellen gebräuchliche Form

$$C = \sqrt{\frac{P \cdot a}{f \cdot s}}.$$

Durch Benützung des Ausdruckes für die Wellenlänge $\lambda = CT$ und durch entsprechende Einführung der Saitenlänge, die sich nach dem Umstande richtet, ob die Saite als Ganzes oder in Theilen schwingt,

erhält man nun leicht das Gesetz für die Schwingungszahl $N = \frac{1}{T}$; so wird für die als Ganzes schwingende Saite:

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{P \cdot a}{f \cdot s}}.$$

Dieses Gesetz gibt die Abhängigkeit der Schwingungszahl oder der absoluten Tonhöhe von der Länge l, der Spannung P, dem Querschnitte s und dem specifischen Gewichte f der Saite und enthält alle theoretischen Sätze über den Gebrauch und die Behandlung der Saiten bei Saiteninstrumenten.

Die auf das Gesetz Einfluss übende Steifigkeit, die nach Savart sich besonders bei Metallsaiten geltend macht, lässt sich nach Duhamel dadurch berücksichtigen, dass man zur Spannung P noch die Steifigkeit hinzufügt. Übrigens fand Cardoni (Beibl. zu Wied. Ann. 1889, S. 275) durch eingehende Versuche, dass auch Metallsaiten mit dem vorstehenden Gesetze für die Schwingungszahl übereinstimmende Resultate geben. Savart hat bei seinen kurzen Drähten wahrscheinlich Töne von an beiden Enden befestigten Stäben und nicht von Saiten beobachtet.

Aufg. 1. 1) Eine Saite eines Monochords von $l = 65$ cm Länge und $d = 0{,}3$ mm Dicke gibt bei einer Belastung von $P = 7$ kg den Ton c_1. α) Welche Länge l_1 muss die Saite erhalten, wenn sie die Terz e_1 geben soll? $c_1 : e_1 = 4 : 5$. β) Wie gross muss ihr Durchmesser d_1 für den Ton e_0 sein? $c_1 : e_0 = 8 : 5$. γ) Mit welchem Gewichte P_1 muss sie belastet werden, um den Ton g_2 hervorzubringen? $c_1 : g_1 = 2 : 3$ und $g_1 : g_2 = 1 : 2$. — ($l_1 = l \cdot 4/5 = 52$ cm; $d_1 = d \cdot 8/5 = 0{\cdot}48$ mm; $P_1 = 9 \cdot P = 63$ kg.) **2.** Wie verhalten sich die Tonhöhen zweier Saiten von gleicher Dicke und demselben Stoffe, wenn die eine Saite $l = 4$ dm lang ist und durch ein Gewicht $P = 18$ kg gespannt wird, die Länge der anderen Saite aber $l_1 = 3^1/_3$ dm, ihre Spannung $P_1 = 12{\cdot}5$ kg beträgt? — ($N : N_1 = 1$.) **3.** Eine $l = 1{\cdot}25$ m lange Saite gibt den Ton c_0 an. Wie gross muss ihre Länge sein, damit sie bei einer Vergrösserung ihrer Spannung um $k = 125\%$ den Ton h_0 angibt? $c_0 : h_0 = 8 : 15$. — ($l' = 1$ m). **4.** Wenn man eine Saite um $d = 3$ cm verlängert, so gibt sie den Kammerton a_1; verkürzt man sie um ebenso viel, so gibt sie die Quint des Kammertons; wie lang ist die Saite, welchen Ton gibt sie und welche Intervalle bestehen zwischen ihrem Tone und den Tönen der verlängerten oder verkürzten Saite? — (Aus $(x + d)/(x - d) = e_2 : a_1 = 3 : 2$ ergibt sich $x = 15$ cm; $N/a_1 = 18/15$, $N = c_2$; $c_2/a_1 = 6/5$ = kleine Terz, $e_2 : c_2$ = grosse Terz.) **5.** Eine Stimmgabel stimmt mit einer Saite von $l = 86{\cdot}7$ cm Länge im Tone genau überein, gibt aber, wenn man die Saite um $d = 0{\cdot}3$ cm verlängert, mit derselben in $t = 2$ Sec. $b = 3$ Stösse. Welchen Ton besitzt die Stimmgabel? — (Aus $(x - b/t) : x = l : (l + d)$ folgt $x = 435$.) [W. Budde.] — Anm. Die Intervalle der Durtonleiter erhält man aus den Dreiklängen (Grundton : Terz : Quint = 4 : 5 : 6) für Grundton (z. B. $c_1 = 1$) Quart (4/3) und Quint (3/2); nur für d_2 hat man die Octav $d_1 = d_2/2$ zu setzen.

§ 56. **Wellen in elastischen Raummedien**[1]. Wenn an einer Stelle eines elastischen Raummittels eine schwingende Bewegung unterhalten wird, so pflanzen sich diese Schwingungen nach allen Richtungen in der Weise fort, wie es in den vorhergehenden Paragraphen für Stäbe und Saiten gezeigt wurde. In einem isotropen Mittel beginnen alle Theilchen, welche in gleichen Abständen vom Erregungscentrum sich befinden, gleichzeitig zu schwingen und haben stets gleiche Schwingungsphase. Eine Fläche, auf welcher lauter Theile von einerlei Schwingungsphase liegen, heisst Wellenfläche. In isotropen Medien sind solche Flächen Kugelflächen um das Wellencentrum; die dazu normalen Radien nennt man Wellenstrahlen. Befindet sich das Wellencentrum unendlich ferne, so gehen die Wellenflächen in Wellenebenen über. Bei Krystallen, wo die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellen nach verschiedenen Richtungen verschieden sind, haben die Wellenflächen die Form von Ellipsoiden.

Für isotrope Mittel lassen sich die Schwingungsbedingungen und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach Lamé wie folgt entwickeln.

Man erhält aus der Gleichgewichtsgleichung für elastische Medien (§ 52, S. 181) die allgemeine Bewegungsgleichung, indem man die wirkenden Kräfte durch das Product aus Masse und Beschleunigung ausdrückt. Sind die Componenten der Verschiebung irgend eines Massentheilchens ξ, η, ζ, so gilt die Bewegungsgleichung

$$\delta \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_z}{dz}.$$

Nach § 49, S. 174 und 176 ist

$$X_x = \lambda\Theta + 2\mu\frac{d\xi}{dx}$$

$$X_y = \mu\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)$$

$$X_z = \mu\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right)$$

$$\Theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}.$$

Durch Substitution erhält man

$$\delta \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = (\lambda + \mu) \cdot \frac{d\Theta}{dx} + \mu\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2}\right)$$

und ebenso

$$\delta \cdot \frac{d^2\eta}{dt^2} = (\lambda + \mu) \cdot \frac{d\Theta}{dy} + \mu\left(\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dy^2} + \frac{d^2\eta}{dz^2}\right)$$

$$\delta \cdot \frac{d^2\zeta}{dt^2} = (\lambda + \mu) \cdot \frac{d\Theta}{dz} + \mu\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} + \frac{d^2\zeta}{dz^2}\right).$$

1) Christiansen, Theor. Ph. S. 115 ff.; V. v. Lang, Theor. Ph. S. 549.

Befindet sich das betreffende Massentheilchen, dessen Coordinaten x, y, z sind, in der Entfernung r vom Erregungspunkte, so gelten für die Projectionen seiner Elongation, welche mit den Richtungen der Coordinatenachsen die Winkel a, b, c einschliessen mögen, die Werte

$$\xi = A \cdot \cos a \cdot \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{C}\right)$$

$$\eta = A \cdot \cos b \cdot \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{C}\right)$$

$$\zeta = A \cdot \cos c \cdot \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{C}\right),$$

ferner ist

$$r = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma,$$

wenn die Fortpflanzungsrichtung r mit den Coordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet.

Für den Winkel, den die Schwingungsrichtung mit der Fortpflanzungsrichtung bildet, gilt

$$\cos\varphi = \cos a \cdot \cos\alpha + \cos b \cdot \cos\beta + \cos c \cdot \cos\gamma.$$

Mit Hilfe dieser Werte wird

$$\Theta = -\frac{2\pi}{C \cdot T} \cdot A \cos\varphi \cdot \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{C}\right)$$

und die Bewegungsgleichungen nehmen folgende Gestalten an:

$$(\mu - \delta C^2) \cdot \cos a + (\lambda + \mu) \cos\alpha \cdot \cos\varphi = 0$$

$$(\mu - \delta C^2) \cdot \cos b + (\lambda + \mu) \cos\beta \cdot \cos\varphi = 0$$

$$(\mu - \delta C^2) \cdot \cos c + (\lambda + \mu) \cos\gamma \cdot \cos\varphi = 0.$$

Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ multipliciert und dann addiert, so erhält man

$$(\lambda + 2\mu - \delta C^2) \cdot \cos\varphi = 0.$$

Das Product auf der linken Seite der Gleichung wird gleich Null, wenn ein Factor Null wird, also entweder wenn

$$\lambda + 2\mu - \delta C^2 = 0 \quad \text{oder wenn} \quad \cos\varphi = 0.$$

Aus der ersten Bedingung folgt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\delta}} = \sqrt{\frac{E(1 - \varepsilon)}{(1 - 2\varepsilon)(1 + \varepsilon)\delta}}.$$

Setzt man diesen Wert in die drei letzten Bewegungsgleichungen ein, berechnet daraus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, so findet man für

$$\cos\varphi = 1 \quad \text{oder} \quad \varphi = 0.$$

Die Wellen mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit C_1 sind daher longitudinale Wellen.

Die zweite Bedingung für die Schwingungen, nämlich $\cos\varphi = 0$

oder $\varphi = 90^0$ gilt für transversale Wellen; für diese erhält man aus den Bewegungsgleichungen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

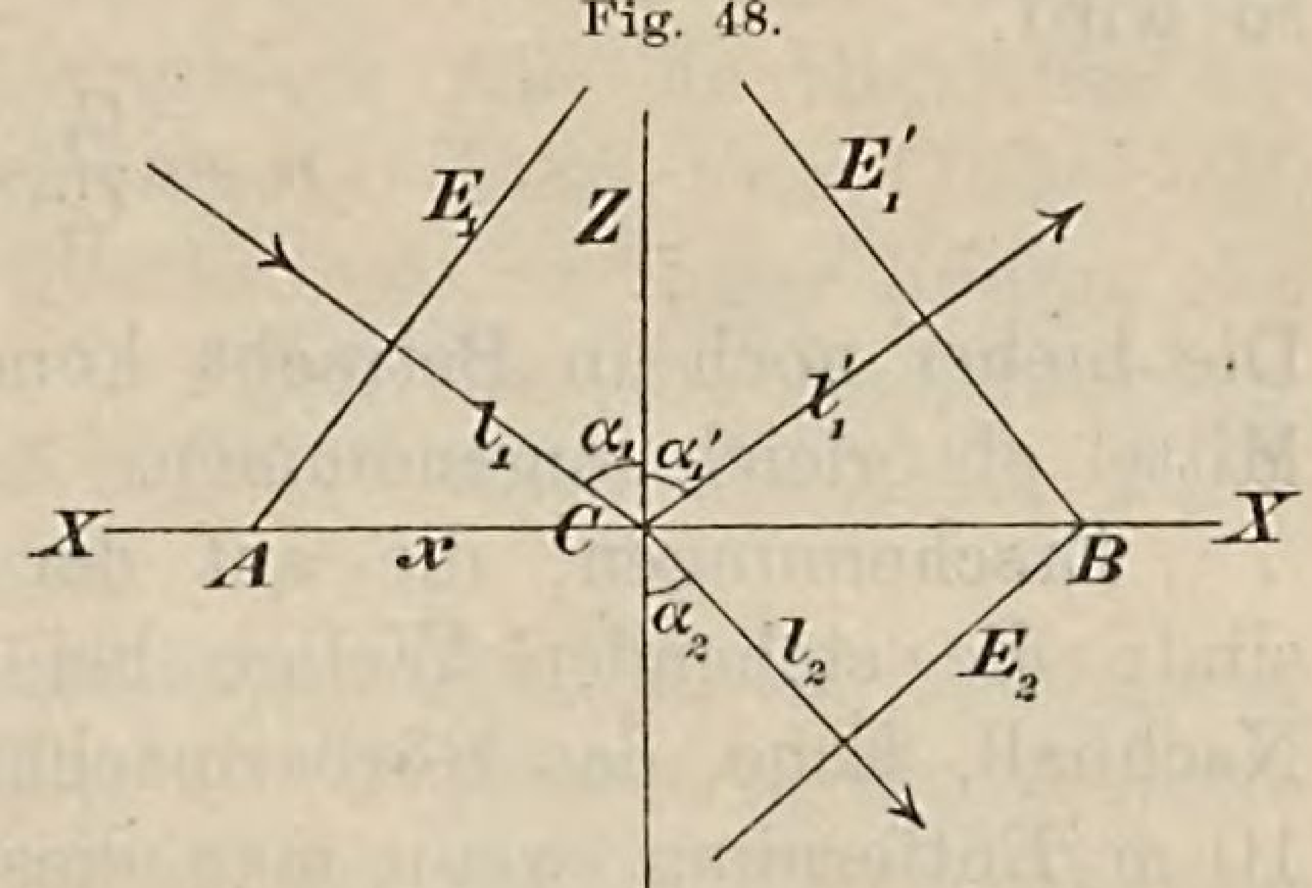
$$C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\delta}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\varepsilon)\delta}}.$$

Die gewonnenen Werte für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der longitudinalen und transversalen Wellen in unbegrenzten Medien stimmen daher mit jenen für schwingende Stäbe und Saiten nicht vollkommen überein.

§ 57. **Reflexion und Brechung der Wellen.** Als eine Anwendung des vorstehenden Gesetzes für die Schwingungsphase und des Begriffes der Wellenfläche mag noch das Gesetz für die Reflexion und Brechung der Wellen abgeleitet werden. Beide Erscheinungen treten ein, wenn eine Wellenbewegung aus einem elastischen Mittel in ein anderes von verschiedener Elasticität und Dichte übergeht. Die in dem ersten Mittel an die Grenzschichte ankommende schwingende Bewegung der Theilchen wird durch den Einfluss des zweiten Mittels geändert. Die resultierenden Schwingungen können dann als neue Erregungen betrachtet werden, die sich sowohl im ersten als auch im zweiten Mittel ausbreiten. Die erstere Welle heisst reflectierte, die letztere gebrochene Welle.

Behufs Ableitung des Reflexions- und Brechungsgesetzes[1]) wählen wir die xz-Ebene als Einfallsebene. In Fig. 48 sei l_1 ein einfallender, l_1' der zugehörige reflectierte und l_2 der gebrochene Wellenstrahl. Zu den entsprechenden Strahlen normal stehen die Ebene E_1 der einfallenden Welle, die Ebene E_1' der reflectierten Welle und die Ebene E_2 der gebrochenen Welle. Die Grössen l seien zugleich die Abstände der betreffenden Wellenebenen vom Punkte C der Grenzfläche, der Einfallswinkel sei α_1, der Reflexionswinkel α_1' und der Brechungswinkel α_2. Die einfallende Welle sei linear polarisiert, die Schwingungen η haben irgend eine Richtung. Dieselben sollen von E_1 ausgehen und sich bis zu E_1' und E_2 fortpflanzen. Die Schwingungen in E_1' und E_2 werden gleichzeitig vollführt. Den Elongationen in den Wellenebenen entsprechen dem obigen Schwingungsgesetze gemäss die Werte

Fig. 48.



$$\eta_1 = a_1 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

1) Siehe meine Schrift über den Ätherdruck. S. 47.

$$\eta_1' = a_1' \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l_1 + l_1'}{\lambda_1}\right),$$

$$\eta_2 = a_2 \sin 2\pi\left[\frac{t}{T} - \left(\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2}\right)\right].$$

Eine etwaige Phasendifferenz sei in t/T eingeschlossen.

Die Werte η gelten für beliebige Punkte in den bezüglichen Wellenebenen; sie lassen sich auf alle zu den gezeichneten Strahlen l parallelen Wellenstrahlen beziehen. Um die beliebige Lage der Lichtstrahlengruppe l_1, l_1', l_2 zum Ausdruck zu bringen, setzen wir für $AB = s$, $AC = x$ und darnach für

$$l_1 = x \sin \alpha_1, \quad l_1' = (s - x) \sin \alpha_1', \quad l_2 = (s - x) \sin \alpha_2.$$

Eine Wertveränderung des x darf keine Änderung der drei Elongationen zur Folge haben; diese Bedingung, in η_1' und η_2 eingeführt, gibt

$$\frac{\sin \alpha_1}{\lambda_1} = \frac{\sin \alpha_1'}{\lambda_1} \quad \text{oder} \quad \alpha_1 = \alpha_1',$$

d. i. das Reflexionsgesetz, und

$$\frac{\sin \alpha_1}{\lambda_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\lambda_2} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n,$$

d. i. das Brechungsgesetz.

n heisst Brechungsexponent. Ersetzt man in demselben die Werte für die Wellenlängen durch CT und die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten C durch den Elasticitätsmodul und die Dichte, so wird

$$n = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\sqrt{E_1/\delta_1}}{\sqrt{E_2/\delta_2}}.$$

Die hiebei noch in Betracht kommenden Werte ε werden für beide Mittel als gleich angenommen.

Erscheinungen, die auf der Reflexion des Schalles beruhen, sind: die stehenden Wellen bei Saiten- und anderen Instrumenten, Nachhall, Echo, das Hörbarmachen des Tickens einer Taschenuhr auf 10 m Entfernung, wenn man dieselbe in den Brennpunkt eines parabolischen Hohlspiegels bringt; ferner findet Schallreflexion statt beim Sprachrohr, Höhrrohr, Flüstergewölbe u. a.

Die Brechung des Schalles wurde durch Versuche im kleinen von Schellbach und Böhm (1879) nachgewiesen[1]): Die von einer Collodiumhaut erzeugten Wellen giengen von Luft in Kohlensäure, Kohlenoxyd u. a. Gase über; die Richtung des gebrochenen Strahles wurde mittelst Staubringen auf einer in dem betreffenden Gase befindlichen Glastafel bestimmt.

1) P. Reis, Phys. 8. Aufl. S. 339 ff.

Nach Reynolds (1875) ist die Wirkung des Windes auf den Schall eine Brechung im Grossen. Da die Geschwindigkeit des Windes in den oberen Luftschichten in der Regel grösser ist als in den unteren, so wird eine gegen den Wind sich fortpflanzende Welle oben mehr verzögert als unten; die Wellenfläche nimmt eine schräge Lage an, der Strahl wird nach oben gebrochen. Der Schall, der sich mit dem Winde fortpflanzt, wird nach unten gebrochen. Erscheinungen, die darauf beruhen, sind: der Schall gegen den Wind ist eine Strecke weit ganz deutlich hörbar, dann verschwindet er plötzlich; das Geläute einer Glocke ist mit dem Winde deutlicher und weiter hörbar als bei Windstille; ein Schall ist oft in der Höhe besser hörbar als am Boden. Wärme und Feuchtigkeit in verschiedenen Luftschichten üben einen ähnlichen Einfluss wie der Wind (Fizeau 1887).

§ 58. **Molecularkräfte der Flüssigkeiten**[1]. a) Erscheinungen. — Leonardo da Vinci (1452—1529) hatte von den Haarröhrchenerscheinungen bereits Kenntnis; er verbreitete dieselben aber nicht. Honoré Fabri führte in seiner Physik (1669) an, dass in einer engen Röhre, welche ins Wasser getaucht wird, dieses höher steigt, als es sich ausserhalb der Röhre befindet, und zwar umso höher, je enger die Röhre ist. Er betrachtete den Luftdruck als Ursache der Erscheinung. Borelli (1608—79) wies nach, dass die Erscheinung auch im luftverdünnten Raume stattfindet, und dass die Steighöhen sich umgekehrt verhalten wie die Durchmesser der Röhren. Er fand, dass zwei auf Wasser gelegte Messingbleche sich zu einander bewegen, als zögen sie einander an, dass dies ebenso mit zwei Holztellern geschieht, und dass ein Messingblech und ein Holzteller auf dem Wasser einander abzustossen scheinen. — Isaak Voss (1618—89) erwähnte zuerst die Depression des Quecksilbers in engen Röhren, die man in Quecksilber eintaucht. Boyle zeigte, dass die Haarröhrchenerscheinungen auch im Vacuum stattfinden, dass sie also nicht durch den Luftdruck verursacht sein können.

Zu derselben Gruppe von Erscheinungen gehören die Krümmung der Flüssigkeitsoberflächen in der Nähe der Gefässwände, die Tropfenbildung, das Liegenbleiben von Nähnadeln oder das Laufen von Wasserinsecten auf Wasseroberflächen, die Seifenblasen u. a. — Plateau (1843 bis 1863) gab Öltropfen in eine Mischung von Wasser und Weingeist, und zeigte, dass das vom Einfluss der Schwerkraft befreite Öl unter der Einwirkung der Molecularkräfte Kugelgestalt annimmt. Durch Zusatz von Glycerin in Seifenlösung stellte er eine Flüssigkeit her, die recht beständige Seifenhäutchen lieferte, tauchte sehr verschieden geformte Drahtnetze in die Lösung und beobachtete die die

1) Siehe meine Schrift über die Gesetze des Oberflächendruckes und der Oberflächenspannung in elem. Darstellung. 1890. Troppau.

Drähte verbindenden Flüssigkeitshäutchen; aus den betreffenden Figuren folgerte er zwei Gesetze: 1) Es treffen stets drei Flüssigkeitshäutchen unmittelbar in einer Kante zusammen und bilden unter einander nahezu gleiche Winkel von 120°; 2) es treffen stets vier von Flüssigkeitshäutchen gebildete Kanten zusammen und schliessen unter einander gleiche Winkel ein. — Van der Mensbrugghe gab (1866) folgenden Versuch an: Wenn man auf ein Seifenhäutchen eines Drahtrechteckes einen geschlossenen Seidenfaden legt und das vom Faden umschlossene Häutchenstück durchstösst, so rundet sich der Faden zur Kreislinie ab. Eine Seifenblase, die man an einem Ende einer Röhre aufbläst, sucht sich wieder zu verkleinern und drückt auf die innere Luft; hört man auf zu blasen, so zieht sich die Seifenhaut zusammen und erzeugt einen Luftstrom vor dem offenen Ende der Röhre, den man mittelst einer Kerzenflamme nachweisen kann.

Bestreut man nach Pasteur (1864) die Oberfläche von Quecksilber mit feinem Sande und taucht einen Glasstab vertical ins Quecksilber, so wird der Sand in der Nähe des Glasstabes von diesem mitgenommen und von der Oberfläche verschwinden, so als ob der Stab eine elastische, mit Sand bestreute Haut mit sich nähme. Beim Herausziehen des Glasstabes kommt der Sand wieder zum Vorschein. Derselbe Versuch gelingt auch mit Wasser, auf dessen Oberfläche Lykopodiumpulver gestreut wurde, wenn man den Stab vorher einfettet.

b) Theorie. Zur Erklärung der angeführten und anderen ähnlichen Erscheinungen sind verschiedene Theorien aufgestellt worden. Zu den ersten Erklärungsversuchen gehört die Annahme, dass im Haarröhrchen ein verminderter Luftdruck bestehe und darum das Aufsteigen von Flüssigkeit erfolge. Entsprechend unseren heutigen Anschauungen nimmt bereits Clairaut (1743) mit Rücksicht auf genauere Beobachtungen Kräfte an, welche zwischen den Molecülen der Körper nur auf einen „sehr kleinen Abstand" wirksam sind. Laplace (1805) nahm an, dass Molecularkräfte nur merklich sind bis zu verschwindend kleinen Entfernungen, ferner dass die Flüssigkeiten unzusammendrückbar sind und begründete damit eine vollständige Theorie der Capillarität[1]). Schon Ségner (1752) vergleicht die Oberflächenschichte einer Flüssigkeit mit einer elastischen Haut und Young (1805) verwendet diese Idee zur Erklärung der Haarröhrchenerscheinungen[2]). Gauss (1829) setzt wechselseitige mit der Entfernung rasch abnehmende Kräfte zwischen den Flüssigkeitstheilchen unter sich und zwischen den Flüssigkeitstheilchen und den berührenden festen Körper-

1) Laplace: Mecanique céleste. Tome IV. F. Braun: Winkelmann's Handbuch d. Ph. S. 452. Van der Waals: Die Continuität d. flüss. u. gasf. Zustd. Deutsch v. F. Rothe.

2) C. Maxwell: Theorie der Wärme. S. 320. Deutsch v. F. Neesen Tait: Eigenschaft d. Materie.

theilen voraus und berechnet durch die Variation von mehrfachen Integralen mit veränderlichen Grenzen mittelst des Principes der virtuellen Arbeit die Gesetze der Haarröhrchenerscheinungen[1]).

Die genannten Theorien haben bereits verschiedene Bearbeitungen und dadurch wesentliche Vereinfachungen erfahren. In elementarer Beziehung mag da neben der Darstellung nach Young noch jene hervorgehoben werden, welche den Satz, der von der Gauss'schen Theorie entwickelt und durch die Erfahrung bestätigt wird, zugrunde legt, dass zur Vergrösserung einer Flüssigkeitsoberfläche Arbeit erforderlich ist; nach diesem Grundsatze werden die weiteren Gesetze mittelst des Princips der virtuellen Bewegungen entwickelt[2]).

Im Folgenden soll dieser Satz erst ermittelt werden. Gestützt auf die angeführten Erscheinungen wollen wir die Wirkung der sogenannten Molecularkräfte auf ausserordentlich kleine Entfernungen voraussetzen und aus dieser Voraussetzung auf die Cohäsionsarbeit einer Flüssigkeit schliessen; die mathematische Form dafür entspricht einer Volumenergie beziehungsweise der allgemeinen Zustandsgleichung der Körper, von welcher das Spannungsgesetz der Gase ein specieller Fall ist. Das Princip der virtuellen Bewegung gibt darnach die Gesetze des Oberflächendruckes und der Oberflächenspannung und die sogenannten Capillaritätsgesetze. Der hierbei berechnete Arbeitswert der Flüssigkeit führt leicht auf die Stärke der wirkenden Kraft, und es folgt daraus die Übereinstimmung der Oberflächenspannung mit der Spannung einer elastischen Haut. Die beiden Sätze, welche den zwei erwähnten Theorien der Capillarität als Grundlage dienen, werden also einheitlich aus dem allgemeinen Kraftgesetze gewonnen und damit die betreffenden Theorien selbst in innige Verbindung gebracht. Das Kraftgesetz in der Form der Zustandsgleichung verknüpft zugleich in der natürlichsten Weise die zu behandelnden Lehren mit dem übrigen weiten Gebiete der Molecularphysik, insbesondere mit der Wärmelehre.

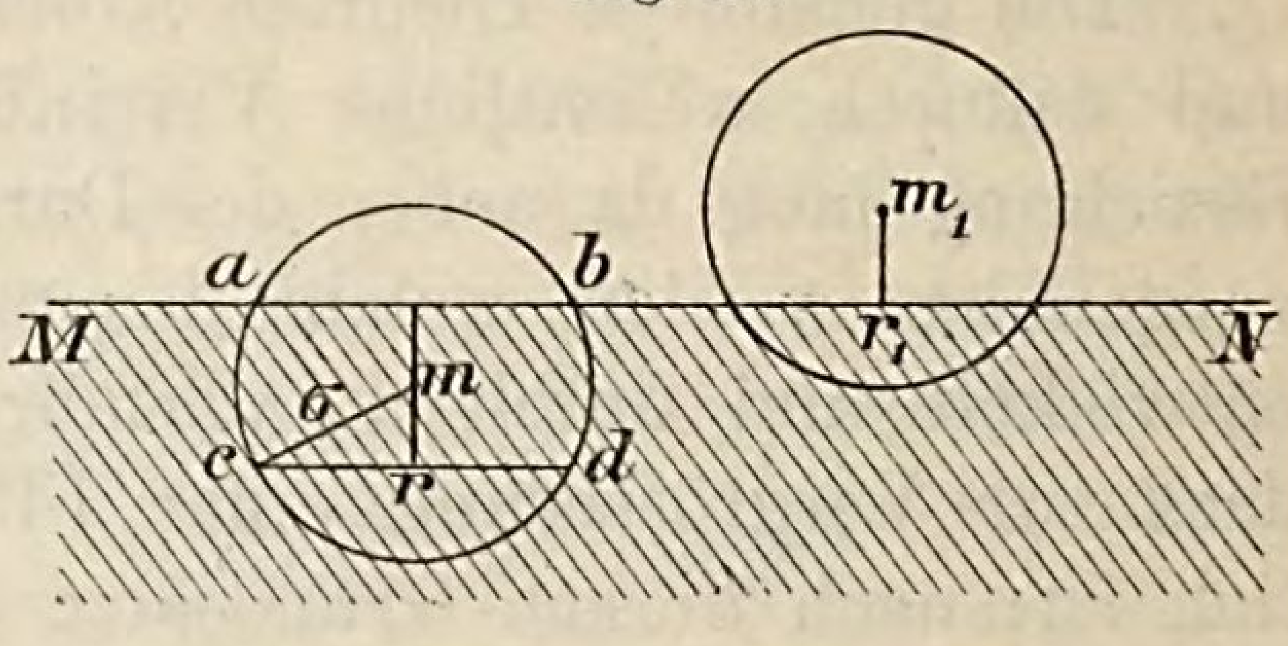
§ 59. **Die Arbeit und das Kraftfeld der Cohäsion.** Wir gehen von der Thatsache aus, dass Flüssigkeitstheilchen in unmittelbarer Nähe von einander gegenseitig eine anziehende Wirkung ausüben. Der Wirkungsraum eines Flüssigkeitstheilchens wird erfahrungsgemäss sehr klein und kugelförmig angenommen. Auf ein Theilchen im Innern der Flüssigkeit wirken nach allen Richtungen hin gleich starke Kräfte und heben sich gegenseitig auf; es kommen keine Druckunterschiede vor und herrscht deshalb überall derselbe Druck; bei Verschiebung eines Theilchens wird keine Arbeit geleistet. Anders verhält es sich mit Theilchen an der inneren oder äusseren Seite der Oberfläche. Ist m (Fig. 49) ein Theilchen in der Nähe der

1) Weinstein: Untersuchungen über Capillarität. Wiedemann A. 27. S. 544.

2) V. v. Lang: Einleitg. i. d. theor. Ph. S. 470; und Mousson: Über Theorie d. Capill. Pogg. A. 142. S. 405.

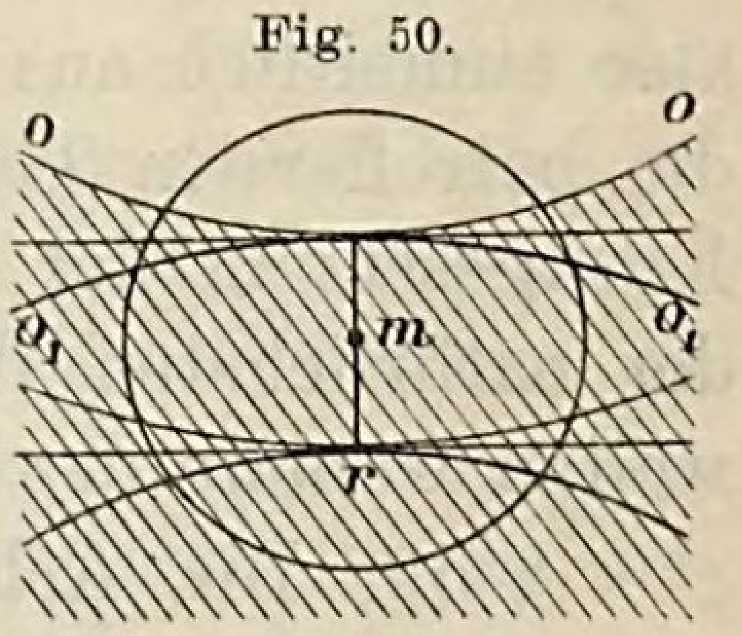
ebenen Oberfläche MN, σ der Halbmesser, mit welcher die kugelförmige Grenzfläche des Wirkungsfeldes (Wirkungskugel) verzeichnet wird, so findet für je zwei von m gleich weit entfernt gelegene Theilchen innerhalb des Raumes *abcd* eine Aufhebung der Wirkung statt, während die Wirkung der Theilchen im Raume r nicht aufgehoben wird; diese werden daher auf m einen zur Oberfläche normal gerichteten Zug ausüben. Dieselbe Betrachtung gilt für jeden Punkt m in der Oberflächenschichte von der Dicke σ. — Die Kraft auf Theilchen in der Entfernung σ und tiefer unterhalb der Oberfläche ist gleich Null; sie wächst beständig bis zur Oberfläche hin. Auf ein Theilchen m_1 ausserhalb der Oberfläche wirkt dieselbe Kraft wie auf m innerhalb, wenn die Oberfläche eben ist und beide Theilchen gleich weit von derselben entfernt sind. Zur Überwindung dieser Kräfte ist Arbeit erforderlich, wenn Flüssigkeitstheilchen aus dem Inneren fortgeschafft werden sollen. Es ist ersichtlich, dass hierbei die Arbeit zur Beförderung der Theilchen aus dem Inneren bis an die Oberfläche der Arbeit gleichkommt, welche die Theilchen aus der Oberfläche völlig ins Freie bringt; denn es wirken in beiden Fällen auf gleichen Wegelementen gleiche Kräfte. Dies ist nicht mehr der Fall, wenn die Oberfläche gekrümmt ist.

Fig. 49.



Eine einfache, in allen Lehrbüchern gebräuchliche geometrische Betrachtung ergibt, dass bei concaver Oberfläche oo (Fig. 50) die Menge der wirkenden Theilchen r geringer, bei convexer Oberfläche $o_1 o_1$ dagegen grösser ist, als bei ebener Oberfläche der Flüssigkeit. Die Arbeit der Fortbewegung der Flüssigkeitstheilchen durch die Oberflächenschichte ist deshalb auch bei concaven Oberflächen kleiner, bei convexen grösser als bei ebenen; die Arbeit der Fortführung von der Oberfläche nach auswärts ist dagegen bei concaven grösser und bei convexen Oberflächen kleiner.

Fig. 50.



Die gesammte Arbeit der Fortführung von Theilchen aus dem Inneren ist aber in allen Fällen dieselbe.

Man kann sich dabei die Arbeitsleistung im üblichen Sinne als eine Überwindung der unmittelbar von Molecül zu Molecül wirkenden Cohäsionskräfte denken. Man kann sie aber auch darin begründet ansehen, dass Massentheilchen aus einem im Zwangszustande befindlichen Kraftfelde (§ 53c) weggeführt werden[1]). In jedem Falle sind

1) Siehe meinen Vortrag über Raumenergie, Verhandlg. der Naturforschergesellschaft 1894.

Theilchen aus einem Volumen, das unter gewissem Drucke steht, fortzubewegen und vom Drucke zu befreien.

Die angegebenen Kräfte in der Oberflächenschichte bis zu der Dicke, welche dem Halbmesser der Wirkungssphäre gleich ist, sind nach einwärts gerichtet und suchen das Volumen der Flüssigkeit zu vermindern. Aber auch in der Oberflächenschichte selbst treten sie als eine Spannung auf, welche die Oberfläche stets zu verkleinern sucht und im Gleichgewichtszustande in der ganzen Schicht dieselbe Stärke besitzt.

Besteht diese Oberflächenschichte aus mehreren Molecüllagen, so summieren sich die Kräfte der einzelnen Lagen und ihre Summe gibt den Druck, unter dem die innere Flüssigkeit steht. Im Raume der Oberflächenschichte muss diesfalls ein mittlerer Druck in Betracht gezogen werden. Besteht jedoch die Oberflächenschichte nur aus einer Lage von Molecülen, dann sind die Drücke im Volumen der inneren Flüssigkeit und in der Oberflächenschichte einander gleich.

Aus den beschriebenen Umständen geht hervor, dass die Cohäsionsarbeit der inneren Flüssigkeit der Anzahl der Molecüle oder bei constanter Dichte dem Volumen v_i derselben proportional ist; wir schreiben dafür $P \cdot v_i$ und betrachten P vorläufig als Proportionalitätsfactor. Auch die Cohäsionsarbeit der Oberflächenschichte von der Dicke σ ist wegen des gleichen Druckes längs der ganzen Ausdehnung der Oberfläche S dem Volumen $S\sigma$ proportional, also einem Werte $P' \cdot S\sigma$ gleich, wenn P' den Proportionalitätsfactor angibt. — P und P' haben als Energiefactoren die Dimension $M \cdot L^{-1} T^{-2}$, sind daher Drücke auf die Flächeneinheit und müssen als Intensitätsfactoren der Volumenergie betrachtet werden. Hieraus und aus einer bald anzuführenden speciellen Anwendung des zu ermittelnden Wertes für die Cohäsionsarbeit folgt, dass beide Grössen Cohäsionsdrücke der Flüssigkeit angeben. Für die gesammte Cohäsionsarbeit erhält man somit die beiden Volumenergien, nämlich

$$W = P \cdot v_i + P' \cdot S\sigma .$$

Wenn das Volumen der ganzen Flüssigkeit $v = v_i + S\sigma$ und die Constante $H = (P - P')\sigma$ eingeführt werden, so wird

$$W = P \cdot v - HS .$$

Dieser Wert ist ein Näherungswert, weil in demselben die Dicke einer einzelnen Molecülschichte nicht berücksichtigt erscheint. Mit Beachtung dieser Dicke 2λ, welche auch der Entfernung der Mittelpunkte zweier benachbarter Molecüle gleich ist, erhält man für die Wirkungsweite, welche vom Mittelpunkte eines ersten bis zum Mittelpunkte des nten Molecüles reicht, $\sigma = (n - 1) 2\lambda$ und für das bis zur Oberfläche der äussersten Molecülschichte reichende Gesammt-

volumen $v = v_i + S \cdot \sigma + \lambda \cdot S$. Das hinzugefügte letzte Glied $S\lambda$ ist der halbe Raum der obersten Molecüllage, nämlich der Raum von den Mittelpunkten der Molecüle bis an die äussere Oberfläche. Die Volumenergie dieses Raumes, sie sei $P'' \cdot S\lambda$, kommt noch zum Arbeitswerte $P' \cdot S\sigma$ der Oberflächenschichte hinzu. Damit wird

$$W = P \cdot v - [(P - P')\sigma + (P - P'')\lambda] \cdot S.$$

Hierin gibt der Ausdruck in der eckigen Klammer den vollen Wert für die in der vorhergehenden Gleichung benützte Grösse H. Erstreckte sich die Wirkungsweite nur von einem Molecül bis zum benachbarten, dann wäre $\sigma = 2\lambda$, $P = P'$, $P'' = 0$ und

$$W = P \cdot v - \frac{1}{2} P \cdot \sigma \cdot S.$$

In jedem Falle lässt sich die Cohäsionsarbeit durch die Form darstellen

$$W = P \cdot v - HS.$$

Sie besteht also aus der Differenz der potentiellen Energie $P \cdot v$, wobei P die Energie der Raumeinheit angibt, und der Oberflächenenergie HS, wobei H die Energie der Flächeneinheit misst.

Deutlicher folgt die physikalische Bedeutung der Grösse H, wenn wir den Wert W auf eine Flüssigkeit beziehen, deren Oberfläche vergrössert wird. Fassen wir ein rechteckiges Stück $l \cdot b$ ins Auge, das sich um $\Delta S = l \cdot \Delta b$ ändert, so ist die aufgewandte Arbeit, da das Volumen constant bleibt,

$$\Delta W = H \cdot \Delta S = (H \cdot l) \cdot \Delta b.$$

Aus dem ersteren Werte $H \cdot \Delta S$ folgt ohne weiteres die Bedeutung von H als Energie der Oberflächeneinheit. Nach dem zweiten Werte lässt sich $(H \cdot l)$ als eine längs des Weges Δb wirkende Kraft und somit H als eine auf jede Längeneinheit von l wirkende normale Kraft oder als Oberflächenspannung auf die Längeneinheit ansehen. Die Gleichung gibt den Satz: Die Oberflächenenergie der Flächeneinheit ist der Oberflächenspannung für die Längeneinheit gleich. Die Existenz der Oberflächenspannung begründet den Vergleich der Oberflächenschichte mit einer elastischen Haut, den bereits Young (1805) zur Erklärung der Haarröhrchenerscheinungen verwendete.

Die Bedeutung von P als Cohäsionsdruck folgt aus dem Vergleiche des vorstehenden Wertes W für die Cohäsionsarbeit mit der Zustandsgleichung (§§ 41, 42, 48). Auch diese bestimmt dieselbe Arbeit; sie berücksichtigt nur noch das Molecularvolumen, jedoch die Verschiedenheit der Energie in der Oberflächenschichte nicht. Nach ihr ist der Intensitätsfactor P dem Quadrate des Volumens v umgekehrt proportional, und daher gewinnt man die Form

$$W = \frac{a}{v} - HS.$$

Die angegebene physikalische Bedeutung von P wird von dem ersten Capillaritätsgesetz bestätigt.

§ 60. **Capillaritätsgesetze.** (Laplace 1819.) a) Der Oberflächendruck. Das Gesetz für denselben erhält man aus einer Cohäsionsarbeit dW, durch welche eine Flüssigkeit ihr Volumen dv und die Oberfläche um dS ändert; die Erscheinung tritt bei einer Erwärmung ein. Man erhält aus dem allgemeinen obigen Werte für W

$$dW = d(P \cdot v) - H \cdot dS.$$

Die Arbeit $d(P \cdot v)$ kann auch von Kräften P_0, die zur Oberfläche normal nach auswärts wirken, verrichtet gedacht werden und daher dem Werte $- P_0 \cdot dv$ gleich gesetzt werden. Zu demselben Werte führt auch die Einführung von $P = a/v^2$ und überdies zu $P = P_0$. Damit erhält man

$$dW = - P_0 \cdot dv - H \cdot dS,$$

und wenn man den Gesammtdruck von nun an mit P bezeichnet,

$$P = - \frac{dW}{dv} = P_0 + H \cdot \frac{dS}{dv}.$$

Besitzt die Flüssigkeit ein kugelförmiges Volumen, so sind $v = \frac{4}{3} r^3 \pi$ und $S = 4 r^2 \pi$ und es wird

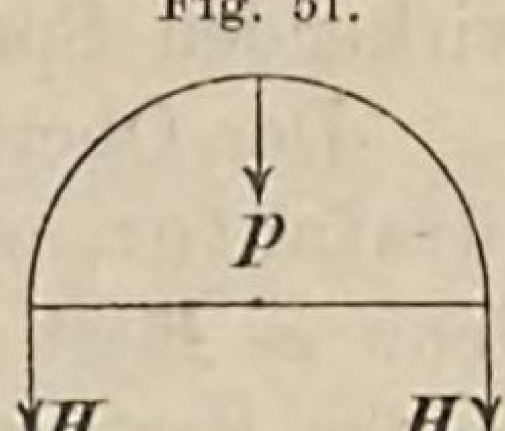
$$P = P_0 + \frac{2H}{r}.$$

Demnach besteht der Oberflächendruck aus dem Normaldruck P_0, der als Cohäsionsdruck bei ebenen Oberflächen auftritt, und aus der Kraft $2H/r$, welche von der Oberflächenspannung H und der Krümmung der Oberfläche herrührt.

H heisst auch Capillaritätsconstante; sie wurde von Laplace mit $H/2$ und von Quincke mit α bezeichnet. Es wird auch die Kraft $2H/r$ Oberflächenspannung genannt[1]).

Der von der Krümmung der Oberfläche herrührende Theil des Oberflächendruckes ist eine Wirkung der Oberflächenspannung H und kann auch ermittelt werden, indem man sich über der Flüssigkeitsoberfläche eine elastische Haut auf jeder Längeneinheit mit der Kraft H gespannt denkt. Ist die Fläche (Fig. 51) in Übereinstimmung mit der vorstehenden Entwickelung halbkugelförmig, so ist das spannende Gewicht rings um den Basiskreis der Halbkugel $H \cdot 2 r \pi$; dieses übt auf die Flächeneinheit den Druck p, also auf die Kreisfläche, den Querschnitt einer etwaigen cylindrischen Flüssigkeitssäule, die Kraft aus

Fig. 51.



1) Siehe Pfaundler, Phys. I. S. 422.

$$p \cdot r^2 \pi = H \cdot 2 r \pi .$$

Daraus wird

$$p = \frac{2H}{r} .$$

Dieser Spannungsdruck infolge der Flächenkrümmung stimmt mit dem vorhergehenden Resultate für dieselbe Grösse überein.

Hat die freie Flüssigkeitsoberfläche eine beliebige Form, so kann dS/dv wie folgt berechnet werden: Man denke sich die ganze Oberfläche in n gleiche rechteckige Flächenelemente getheilt und führe durch Abkürzung des zu berechnenden Bruches die Betrachtung auf ein Oberflächen- beziehungsweise Volumelement zurück. Mit Hilfe der Hauptkrümmungshalbmesser r_1 und r_2 an der betreffenden Stelle der Oberfläche kann man die Seiten des Elementarrechteckes als Bogenelemente $r_1 \varphi_1$ und $r_2 \varphi_2$ und das Flächenelement als deren Product $r_1 r_2 \varphi_1 \varphi_2$ darstellen. Bei einer Verschiebung des Flächenelementes um dr ist dessen Änderung

$$dS = \varphi_1 \cdot \varphi_2 (r_1 + r_2) \cdot dr$$

und die Volumsänderung

$$dv = \varphi_1 \varphi_2 \cdot r_1 r_2 \cdot dr .$$

Durch Division folgt

$$\frac{dS}{dv} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) .$$

Damit erhält man

$$P = P_0 + H\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

das allgemeine Gesetz für den Oberflächendruck in der von Laplace gegebenen Form. Die Bedeutung der einzelnen Glieder wurde bereits erörtert. Es ist nur noch zu bemerken, dass der gewonnene Ausdruck sowohl für convexe, als auch für concave Oberflächen gilt; im letzteren Falle ist das von der Krümmung abhängige zweite Glied negativ zu nehmen, denn die Krümmungshalbmesser sind nach auswärts gerichtet; die Oberflächenspannung übt einen Zug auf die innere Flüssigkeit aus. Man kann sich von der Richtung des Druckes infolge der Krümmung leicht überzeugen, wenn man für irgend ein Theilchen der Oberflächenschichte die zu beiden Seiten in einer Ebene wirkenden Spannungen zu einer Resultierenden zusammensetzt.

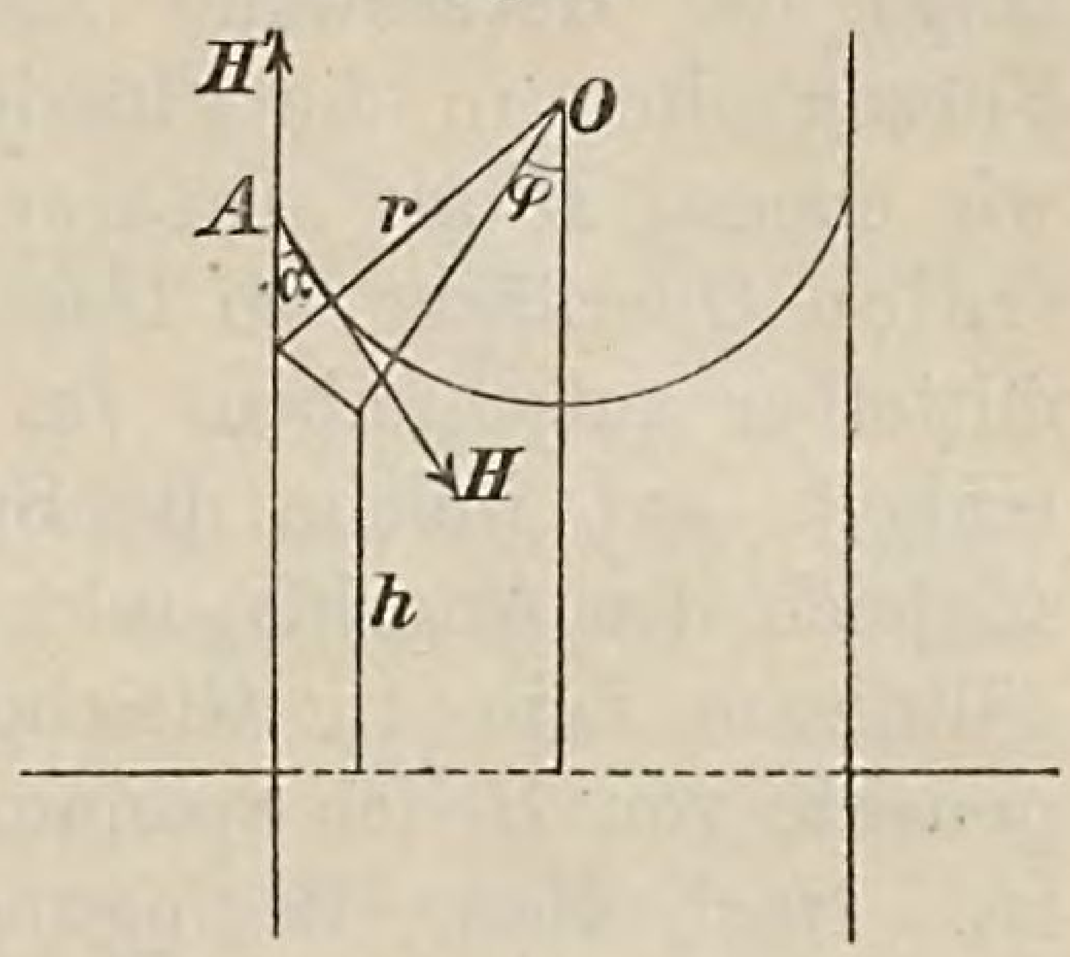
Der Oberflächendruck gibt für die Volumenergie den Intensitätsfactor an; der Extensitätsfactor ist das Flüssigkeitsvolumen; denn es lässt sich der obige Wert für die Cohäsionsarbeit als Product beider Factoren in folgender Form darstellen[1]):

$$- dW = P \cdot dv = \left[P_0 + H\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right] \cdot dv .$$

1) Siehe meine Abhandlg.: Zur Übereinstimmung der verschiedenen phys. Arbeitsgesetze. Realschulztsch. Wien. 1892. S. 524.

b) Der Randwinkel. Wir betrachten eine Flüssigkeitssäule in einem cylindrischen Haarröhrchen, das in eine in einem weiteren Gefässe befindliche Flüssigkeit getaucht sei (Fig. 52). Die freie Flüssigkeitsoberfläche im Haarröhrchen ist wegen der gleichen Kräftevertheilung rings um die Röhrenachse eine Rotationsfläche. Von derselben fassen wir die Randzone ins Auge, deren Höhe über dem ausserhalb des Röhrchens befindlichen Flüssigkeitsspiegel gleich h sei. Der thatsächlich vorhandene Randwinkel sei α. Veranlasst man eine virtuelle Verschiebung der Randzone in der Richtung des Krümmungshalbmessers r, so wird ein Flüssigkeitselement verdrängt[1]), dessen Gewicht um die Höhe h sinkt, indem eine gleich grosse Flüssigkeitsmenge zum Niveau der äusseren Flüssigkeit transportiert wird. Mit den Flüssigkeitstheilchen am Rande verschwinden gleichzeitig die an die Luft und an die Wand grenzenden Oberflächenelemente und die denselben entsprechenden Energien. Aus der Bedingung, dass die Summe aller Energieänderungen gleich Null sein muss, kann der Randwinkel berechnet werden.

Fig. 52.



Ist nun S die Fläche der unmittelbar an die Röhrchenwand grenzenden Zone, $\frac{1}{2} S \cdot dr$ das Volumen der weggeschobenen Flüssigkeitstheilchen und f das specifische Gewicht, so ist die Arbeit der Schwerkraft $\frac{1}{2} S \cdot dr \cdot f \cdot h$; die mit dem Verschwinden der Zone verbundene Änderung der Oberflächenenergie ist SH. Das an der Gefässwand anliegende Flächenelement am Rande der Flüssigkeit hat den Inhalt $S/\cos\alpha$, seine Energie ist $SH'/\cos\alpha$. Das Princip der virtuellen Verschiebung liefert die Gleichung

$$S \cdot H - \frac{S \cdot H'}{\cos\alpha} + \frac{1}{2} S \cdot h \cdot f \cdot dr = 0 .$$

Ist hierin dr verschwindend klein, und wird infolge dessen das letzte Glied gegenüber den anderen Gliedern vernachlässigt, so ergibt sich

$$\cos\alpha = \frac{H'}{H} = \text{const.},$$

d. h. der Cosinus des Randwinkels ist gleich dem Quotienten aus den Oberflächenspannungen der Flüssigkeit an der Gefässwand und an der freien Oberfläche, er ist nur von den Stoffen der Flüssigkeit und der Gefässwand, nicht aber von geometrischen Verhältnissen abhängig.

Aus der näheren Bestimmung von H' im nächsten Paragraph wird hervorgehen, dass dessen Grösse und Richtung durch die in der

1) Die etwaige gleichzeitige Verschiebung der übrigen freien Oberfläche wird in c) beim dritten Gesetz berücksichtigt.

Berührungsschichte wirkende Cohäsion und Adhäsion bedingt ist. Hier wollen wir noch H' als Spannung auffassen und bemerken, dass sie die Resultierende der Cohäsions- und Adhäsionsspannung in der Berührungsschichte angibt; bei benetzenden Flüssigkeiten ist sie längs der Gefässwand nach aufwärts und bei nicht benetzenden Flüssigkeiten in die Flüssigkeit nach abwärts gerichtet. Betrachten wir ebenso H als elastische Spannung für die Längeneinheit der freien Oberfläche, so lässt sich das Gesetz des Randwinkels unmittelbar aufschreiben. Ist A (Fig. 52) der Mittelpunkt der Längeneinheit, auf welche die Spannungen H und H' wirken, so ist er zugleich der Angriffspunkt der Kräfte, die unter den gegebenen Verhältnissen dann im Gleichgewichte stehen, wenn die verticale Componente von H der Spannung H' gleich und entgegengesetzt gerichtet ist. Nach dieser Bedingung besteht die Gleichung

$$H \cos \alpha = H',$$

die mit dem Gesetze für den Randwinkel identisch ist.

Bei convex gekrümmten Oberflächen (Quecksilber in Glasröhren) wirken die Spannungen H und H' in Bezug auf die Verticale nach entgegengesetzten Richtungen.

c) Die Steighöhe. Wir fassen in der angenommenen Zusammenstellung (Fig. 52) eine nicht am Rande gelegene Zone der freien Flüssigkeitsoberfläche ins Auge und nehmen mit derselben eine virtuelle Verschiebung dr längs des Halbmessers r vor. Im Gleichgewichtszustande ist die Änderung der Oberflächenenergie gleich der Arbeit der Schwerkraft, welche durch den Transport der verdrängten Flüssigkeitstheilchen von der freien Oberfläche im Röhrchen bis zum Spiegel der Flüssigkeit ausserhalb des Röhrchens, also beim Falle um die Höhe h geleistet wird. Diese Bedingung liefert das gesuchte Gesetz. Die Fläche der Zone ist

$$S = (2r \sin \varphi \cdot \pi) \cdot r \cdot d\varphi = 2r^2\pi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi,$$

ihre Änderung $\qquad dS = 4r\pi \cdot dr \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi.$

Das verdrängte Flüssigkeitsgewicht ist $S \cdot f \cdot dr$. Das Princip der virtuellen Bewegung gibt

$$H \cdot dS = S \cdot f \cdot dr \cdot h.$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf die Werte für S und dS

$$h = \frac{2H}{r \cdot f},$$

oder mit Benützung des Randelementes, für das r durch den Röhrchenhalbmesser r' ausgedrückt werden kann,

$$h = \frac{2H \cos \alpha}{r' \cdot f}.$$

Dies ist das Gesetz für die Steighöhe der Flüssigkeit.

Dasselbe wird noch einfacher gewonnen, wenn man die Flüssigkeit im Röhrchen durch die Spannung H' der Berührungsschichte, welche dem Werte $H \cdot \cos \alpha$ gleich ist, gehoben denkt. Die Spannung rings am Rande $2r'\pi$ hält dem Flüssigkeitsgewichte das Gleichgewicht, und es besteht die Gleichung

$$2r'\pi \cdot H \cdot \cos \alpha = r'^2\pi \cdot f \cdot h.$$

Daraus folgt ohne weiteres das vorstehende Gesetz für die Flüssigkeitshöhe h.

Aufg. 1. In einem Glasröhrchen von der Weite 0·2 mm steigt Wasser (Dichte 1) 75 mm, Glycerin (Dichte 1·26) 57 mm, Schwefelsäure (Dichte 1·85) 34 mm, Alkohol (Dichte 0·79) 32 mm, Salpetersäure (Dichte 1·54) 27 mm, Äther (Dichte 0·71) 25 mm hoch empor. Wie gross sind die Oberflächenspannungen H in Milligrammen für 1 mm Länge? — (Bei Wasser 7·5, Glycerin 7·2, Schwefelsäure 6·3, Alkohol 2·5, Salpetersäure 4·2, Äther 1·8 mgr/mm.) **2.** Wie hoch steigt das Wasser in einem Haarröhrchen, dessen Wände es vollkommen benetzt, und dessen Halbmesser 0·01 mm ist? Die Oberflächenspannung ist 7·5 mgr/mm. — (150 cm.) **3.** Nach Desains ist die Oberflächenspannung des Quecksilbers 45·6 mgr/mm und dessen Randwinkel an Glas 37^0 52′; wie gross ist die Capillardepression in einem Barometerrohr von 1 cm Durchmesser? — (0·53 mm.) **4.** Die Achse eines engen conischen Röhrchens bilde mit den Erzeugenden der Mantelfläche den Winkel β; der Randwinkel einer Flüssigkeit im Röhrchen sei α; mit welcher Kraft wird die Flüssigkeit in dem horizontal liegenden Röhrchen bewegt, wenn die Begrenzungskreise der Flüssigkeit die Radien R und r haben? — ($F = 2H \cos \alpha \cdot \cos \beta\,(1/r - 1/R)$.) **5.** Wie hoch steigt eine Flüssigkeit, deren Oberflächenspannung H und deren spec. Gewicht f sind, zwischen zwei parallelen Wänden auf, wenn dieselben einen kleinen Abstand $\varDelta$ haben? — (Ist die Länge der Wände l, so ist die gesammte Spannung an den beiden oberen Rändern der Flüssigkeit $2l \cdot H$; dieselbe muss dem gehobenen Flüssigkeitsgewichte gleich sein. Demnach ist $h = 2H/f\,.\,\varDelta$.) **6.** In welcher Beziehung steht die Flüssigkeitshöhe h' zwischen zwei nahen parallelen Wänden zu jener h in einem Haarröhrchen, wenn $\varDelta = 2R$? — ($h' = h/2$.) **7.** Welches Gewicht eines Flüssigkeitstropfens, der sich an der unteren Öffnung einer engen Röhre bildet, kann von dessen Oberflächenspannung getragen werden? Der Röhrchenhalbmesser sei $r = 0{\cdot}5$ mm, die Oberflächenspannung $H = 7{\cdot}5$ mgr/mm. Die Einschnürung der Flüssigkeit am Ende der Röhre soll nicht in Betracht kommen. — ($x = 2r\pi \cdot H = 23{\cdot}6$ mgr.) **8.** Wie lässt sich aus dem Gewichte der aus einer engen Röhre fallenden Tropfen die Oberflächenspannung der Flüssigkeit bestimmen? — (Nach der vorhergehenden Aufgabe.) **9.** Welchen Druck übt eine kugelförmige Seifenblase vom Halbmesser $r = 3$ cm auf die eingeschlossene Luft aus, wenn die Oberflächenspannung $H = 7$ mgr/mm ist? — (Die Summe der Oberflächendrücke auf der convexen und concaven Seite ist für die Flächeneinheit $(P_0 + 2H/r) - (P_0 - 2H/r) = 4H/r$ und für die ganze Kugelfläche $16rH \cdot \pi = 10{\cdot}56$ g.) **10.** Welche Gleichgewichtsbedingung ergibt sich

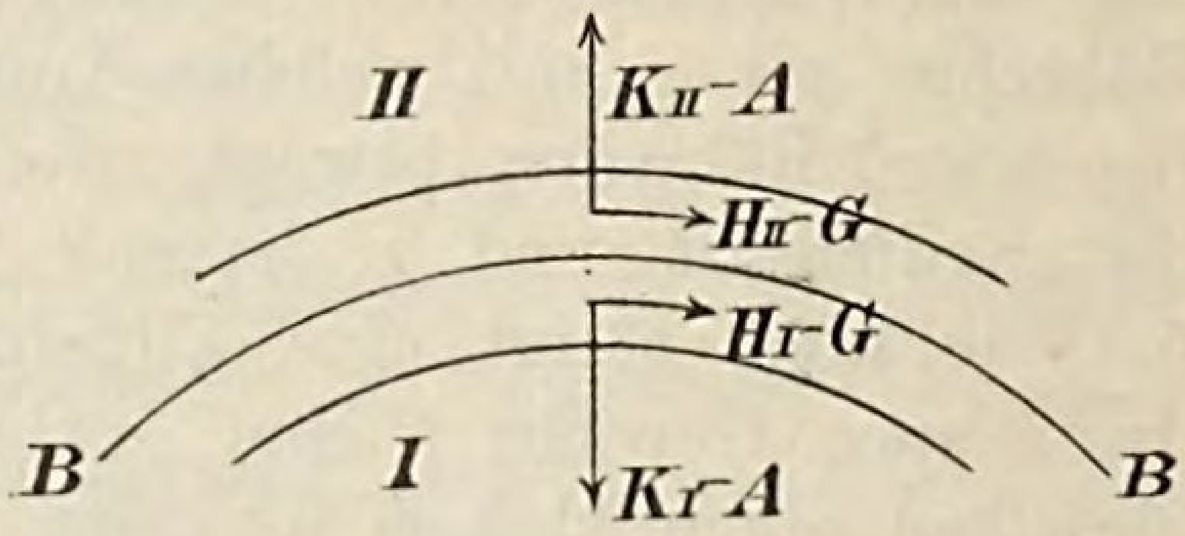
aus der Gleichheit der Oberflächendrücke an jeder Stelle zu beiden Seiten der Seifenhäutchen an Drahtnetzen? — (Aus der Bedingung

$$P_0 + H(1/r_1 + 1/r_2) = P_0 - H(1/r_1 + 1/r_2)$$

folgt für die mittlere Krümmung $1/r_1 + 1/r_2 = 0$. Die Forderung wird erfüllt, wenn $r_1 = r_2 = \infty$, d. h. wenn das Seifenhäutchen eben ist, oder wenn eine Krümmung concav und die andere convex ist. Der erste Fall wird verwirklicht an Seifenhäutchen an einem ebenen Drahtrahmen, der zweite Fall tritt ein, wenn z. B. ein System von zwei gleich grossen parallelen Drahtringen mit Seifenhäutchen überzogen wird; hierbei entspricht die Sattelform des Häutchens der Bedingung $r_1 = -r_2$.)

§ 61. **Die Doppelschichte zweier sich berührender Flüssigkeiten**[1]. Der Oberflächendruck, die Spannung und die Energie der Oberflächenschichte erfahren eine Änderung, wenn eine Flüssigkeit mit einer anderen Flüssigkeit in Berührung tritt, indem sich die Adhäsion zwischen den beiden Flüssigkeiten geltend macht. Bleiben die Flüssigkeiten getrennt, so wirkt die Adhäsion der Cohäsion jeder einzelnen Flüssigkeit entgegen und vermindert diese. Der betreffende Einfluss äussert sich in den beiden sich berührenden Oberflächenschichten der Flüssigkeiten, welche zusammen eine Doppelschichte bilden. Um das Verhalten dieser Doppelschichte zu untersuchen, nehmen wir (Fig. 53) die Flüssigkeiten I und II mit der gemeinschaftlichen, kugelförmigen Berührungsfläche BB und berechnen die Oberflächendrücke für I und II. Hierzu beachten wir, dass auf jede einzelne Oberflächenschichte die Cohäsion K derselben Flüssigkeit nach einer und die Adhäsion A nach der entgegengesetzten Richtung wirken; in dem Gesetze für den Oberflächendruck einer Flüssigkeit ist daher die Differenz $(K - A)$ statt K zu setzen. Aus demselben Grunde sind auch die Oberflächenspannungen der einzelnen Flüssigkeiten um die entsprechende Adhäsionswirkung G zu vermindern, und wir können für die fraglichen Oberflächendrücke schreiben

Fig. 53.



$$P_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}} - A + 2\,\frac{H_{\mathrm{I}} - G}{R},$$

$$P_{\mathrm{II}} = K_{\mathrm{II}} - A - 2\,\frac{H_{\mathrm{II}} - G}{R}.$$

Dabei ist die Fläche von I convex und die von II concav vor-

1) Siehe meine Schrift über die Gesetze des Oberflächendruckes etc., 1890. Troppau.

ausgesetzt. Der resultierende Druck der Doppelschichte ist dem Unterschiede seiner Componenten gleich, also

$$\Delta P = K_{\mathrm{I}} - K_{\mathrm{II}} + 2\,\frac{H_{\mathrm{I}} + H_{\mathrm{II}} - 2G}{R}.$$

Der Zähler des Bruches gibt die resultierende Spannung der Doppelschichte; wir schreiben dafür:

$$H_{\mathrm{I\,II}} = H_{\mathrm{I}} + H_{\mathrm{II}} - 2G = 2\left[\frac{H_{\mathrm{I}} + H_{\mathrm{II}}}{2} - G\right].$$

Diese Spannung leistet eine Arbeit, wenn die Berührungsfläche B vergrössert wird, und zwar so, dass gleichwie bei der freien Flüssigkeitsoberfläche die Spannung H für die Längeneinheit der Arbeit für die Flächeneinheit gleich kommt. Die Bemerkung gestattet einige Schlüsse über das Verhalten der Doppelschichte.

Je nach dem Vorzeichen von $H_{\mathrm{I\,II}}$, also je nachdem das arithmetische Mittel der Cohäsionsspannungen grösser oder kleiner als die Adhäsionsspannung ist, wird bei Vergrösserung der Berührungsschichte Arbeit verbraucht, oder gewonnen; da nun aber die wirkenden Kräfte stets das Bestreben haben, die möglichst grösste Arbeit zu leisten, so wird im letzteren Falle die Doppelschichte das Bestreben zeigen, sich auszudehnen und zu vergrössern, im ersteren Falle dagegen sucht sie sich zusammen zu ziehen. Zu demselben Resultate ist K. Fuchs in anderer Weise gelangt[1]). Dasselbe gestattet im Zusammenhange mit dem Druckwerte auch über das Verhalten der Flüssigkeiten gegeneinander eine weitere Folgerung. Sucht die Berührungsfläche den kleinsten Wert zu gewinnen, so wird das Ziel erreicht sein, wenn sie die Kugelform angenommen hat. Im Inneren der Kugelfläche muss sich die Flüssigkeit mit stärkerer Cohäsion zusammenziehen und aussen jene mit geringerer Cohäsion anlegen. Ist die Berührungsschichte ausdehnsam, so kann ihr Bestreben dadurch erreicht werden, dass die Theilchen der Flüssigkeit mit geringerer Cohäsion von einander getrennt und in der Flüssigkeit mit grösserer Cohäsion vertheilt werden. Die Berührungsfläche umgibt dann alle zertheilten Theilchen der ersteren Flüssigkeit und hat auf diese Weise eine möglichst grosse Ausdehnung gewonnen.

Solche Vorgänge finden jedenfalls bei Bildung von Emulsionen, bei Mischungen und Lösungen statt.

Nach Quincke sind einige besondere Werte folgende:

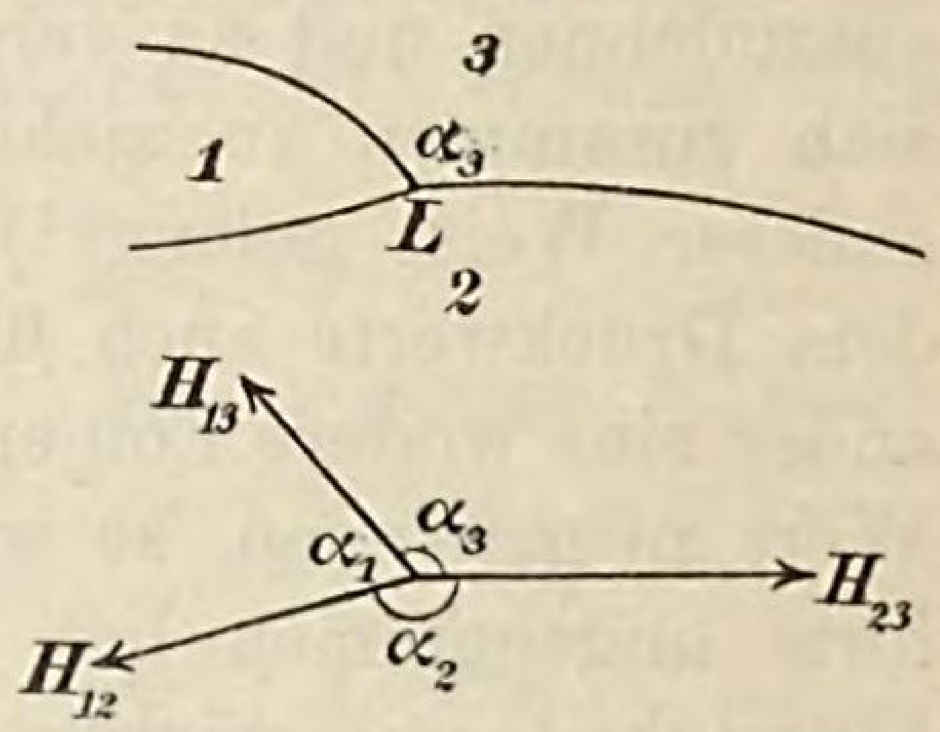
Quecksilber-Wasser	$H_1 = 55{\cdot}03$,	$H_2 = 8{\cdot}25$,	$H = 42{\cdot}58$
„ -Alkohol	„ „	$H_2 = 2{\cdot}60$,	$H = 40{\cdot}71$
„ -Olivenöl	„ „	$H_2 = 3{\cdot}76$,	$H = 34{\cdot}19$
Schwefelkohlenstoff-Wasser	$H_1 = 3{\cdot}27$,	$H_2 = 8{\cdot}25$,	$H = 4{\cdot}26$
Olivenöl-Wasser	$H_1 = 3{\cdot}76$,	$H_2 = 8{\cdot}25$,	$H = 2{\cdot}09$.

1) K. Fuchs: Über den Randwinkel einander berührender Flssgk. Wied. A. Bd. 29. S. 144.

Nach den Versuchsergebnissen kann man aus der allgemeinen Beziehung zwischen H und den Cohäsions- und Adhäsionsspannungen die letztere, nämlich G, bestimmen. Wir finden dieselbe zwischen Quecksilber-Wasser 10·35, zwischen Quecksilber-Alkohol 8·46 und Olivenöl-Wasser 4·96. Bestände jede Oberflächenschichte nur aus einer Lage von Molecülen, wäre also nach § 49 $H = P\sigma/2$ und wären die Wirkungsweiten der sich berührenden Stoffe gleich, so würden die Werte für die Cohäsions- und Adhäsionsspannungen die Verhältniszahlen für Cohäsion und Adhäsion angeben.

§ 62. **F. Neumann's Gesetz der Randwinkel.** Überall da, wo eine Flüssigkeit mit einem festen Körper in Berührung kommt, bildet ihre freie Oberfläche an der Berührungsgrenze mit dem festen Körper einen bestimmten Winkel, den Randwinkel. Sei es, dass eine Flüssigkeit die Gefässwand berührt, oder dass ein Flüssigkeitstropfen auf einer Platte liegt oder unten anhängt, immer kommen drei Mittel in einer Grenzlinie zusammen, nämlich der feste Körper, die Flüssigkeit und die Luft. Auf die gemeinschaftliche Grenzlinie wirken nun die Oberflächenspannungen der drei Berührungsflächen und halten sich gegenseitig das Gleichgewicht. Die Gleichgewichtsbedingung gibt das Neumann'sche Gesetz der Randwinkel. Um die Entwickelung möglichst allgemein zu gestalten, nehmen wir drei Flüssigkeiten 1, 2, 3 (Fig. 54) mit beliebigen Berührungsflächen, die in einer Linie L zusammentreffen. Auf die Längeneinheit von L wirken in den verlängerten Tangentenrichtungen der Oberflächen die Oberflächenspannungen. Ist das dritte Mittel Luft, in welchem Falle man die Berührungsflächen von 1 und 2 mit 3 als freie Oberflächen ansieht, so gelten für die Oberflächenspannungen die Werte

Fig. 54.



$$H_{13} = H_1, \quad H_{23} = H_2 \quad \text{und} \quad H_{12} = H_1 + H_2 - 2G.$$

G bedeutet hierin die Spannung infolge der Adhäsion in der Doppelschichte 12.

Drei in einem Punkte angreifende Kräfte halten einander das Gleichgewicht unter folgender Bedingung

$$\frac{H_{12}}{\sin\alpha_3} = \frac{H_{13}}{\sin\alpha_2} = \frac{H_{23}}{\sin\alpha_1}.$$

Die drei Kräfte müssen sich nämlich zu einem Kräftedreieck zusammensetzen lassen, wenn ihre Resultierende gleich Null sein soll. Ist aber eine Kraft, z. B. H_{12}, grösser als die Summe der beiden anderen, dann lässt sich kein Dreieck bilden und es wird auch kein Gleich-

gewicht erreicht; eine Flüssigkeit 1 breitet sich dann so weit aus, bis der flüssige Zustand verloren geht. Beispiele solcher Ausbreitung sind: Öl auf reinem Wasser, Wasser auf Quecksilber. Eine Wirkung der Oberflächenspannung ist die Beruhigung der Meereswellen durch eine oberflächliche Ölschichte. Fettflecke werden mit Benzol fortgeschafft, indem man das letztere ringförmig um den Fleck vertheilt und immer näher an den sich gegen die Mitte zusammenziehenden Fleck heranbringt; die resultierende Oberflächenspannung zieht die Fetttheilchen vom Rande gegen die Mitte, wo sie mittelst Löschpapier abgehoben werden können[1]).

Die Grösse des Winkels α_3 zwischen den freien Oberflächen lässt sich aus dem Kräftedreieck H_{12}, H_{13}, H_{23} nach dem Carnot'schen Lehrsatze bestimmen; man erhält dafür

$$\cos\alpha_3 = \frac{H_{12}^2 - H_{23}^2 - H_{13}^2}{2 \cdot H_{23} \cdot H_{13}}$$

und nach Substitution obiger Werte

$$= \frac{4G[G - (H_1 + H_2)] + 2H_1 H_2}{2H_1 H_2}$$

$$= 2G\frac{G - (H_1 + H_2)}{H_1 H_2} + 1.$$

Der Winkel α_3 ist demnach durch die Cohäsions- und Adhäsionsspannungen völlig bestimmt und ist somit immer derselbe, so oft nur die Flüssigkeiten 1 und 2 mit einander in Berührung kommen.

Ist 1 dieselbe Flüssigkeit wie 2, so wird $H_1 = H_2 = G$ und damit $\alpha_3 = 180^0$, wie es sein muss, da ja dann nur e i n e Flüssigkeitsoberfläche besteht.

Ist α_3 spitz, so wird die Oberflächenspannung H_1 die Flüssigkeit zurückhalten; ist α_3 stumpf, so wirkt H_1 ausbreitend auf 1. Der Wert $\cos\alpha_3$ darf 1 nicht übersteigen, wenn Gleichgewicht möglich sein soll.

In dem Falle, dass 2 ein unlöslicher fester Körper, etwa die Wand eines Gefässes oder eine Platte ist, die von der Flüssigkeit 1 berührt wird, ist die Oberflächenspannung H_2 gegenüber H_1 und G sehr gross und dürfen H_1/H_2 und G/H_2 als Glieder fortgelassen werden; darnach erhalten wir

$$\cos\alpha_3 = -\frac{2G}{H_1} + 1.$$

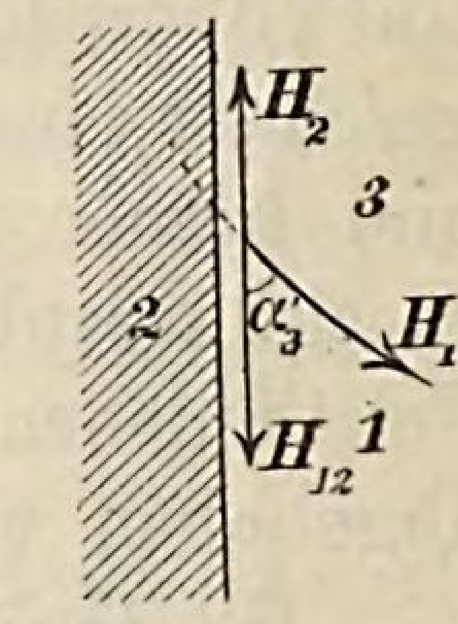
Bezeichnen wir nun den in der Flüssigkeit liegenden Winkel $(180^0 - \alpha_3) = \alpha_3'$ als den R a n d w i n k e l, so erhalten wir für denselben den Wert

$$\cos\alpha_3' = \frac{2G}{H_1} - 1.$$

1) C. Maxwell: Theorie der Wärme. S. 322 u. 333.

Derselbe Ausdruck folgt unmittelbar, wenn man die Flüssigkeit 1 in Berührung mit einer ebenen Fläche (Fig. 55) annimmt und die Gleichgewichtsbedingung zwischen den Spannungen H_1, H_2 und $H_{12} = (H_1 + H_2 - 2G)$ aufstellt. Die längs der ebenen Fläche wirkenden Componenten müssen sich gegenseitig aufheben.

Fig. 55.



Nach diesem Gesetze hängt der Randwinkel nur von den Cohäsions- und Adhäsionsspannungen, also von der Natur der sich berührenden Körper ab und ist zwischen denselben beiden Körpern bei derselben Temperatur immer derselbe. Mit der Veränderung der Oberflächenspannung z. B. durch Verunreinigung der Oberflächen ändert sich auch der Randwinkel.

Jenachdem $2G \gtrless H_1$ ist der Randwinkel spitz oder stumpf, d. h. jenachdem die doppelte Adhäsionsspannung grösser oder kleiner als die Cohäsionsspannung der Flüssigkeit ist, breitet sich die Flüssigkeit etwas aus oder zieht sich zusammen; im ersten Falle wird der feste Körper von der Flüssigkeit benetzt, im zweiten tritt keine Benetzung ein.

Eine Folge des Gesetzes der Constanz des Randwinkels ist die Krümmung der Flüssigkeitsoberflächen in der Nähe der Gefässwände, die bereits zur Erklärung der Capillaritätsgesetze verwendet wurde.

Aus den im § 61 angegebenen speciellen Werten der Oberflächenspannungen an der Grenze von Öl, Wasser und Luft ersieht man, dass mit denselben kein Dreieck construiert werden kann. Der Überschuss der Spannung der freien Wasserfläche und die negative Spannung der Ölschichte ($H_1 - G = 3{\cdot}76 - 4{\cdot}9$) verursachen eine rasche Ausbreitung des Öles und eine Verminderung des Oberflächendruckes. — Oberbeck untersuchte das Verhalten der Ölschichte, indem er zuerst Schwefelpulver auf reines Wasser streute und dann einen Luftstrom, unter 30^0 gegen die Oberfläche geneigt, erzeugte. Damit wurde das Schwefelpulver an den entgegengesetzten Rand des Gefässes geschoben. War das Wasser mit einer Ölschichte bedeckt, so setzte diese der zusammenschiebenden Wirkung des Luftstromes einen Widerstand entgegen; das Pulver blieb über der Oberfläche ausgebreitet. Die Dicken der wirksamen Schichten wurden berechnet bei Rüböl zu $1{\cdot}7 \cdot 10^{-6}$ mm, bei Olivenöl $2{\cdot}2 \cdot 10^{-6}$ mm. Auch Röntgen und Rayleigh fanden wirksame Ölschichten ca. $2 \cdot 10^{-6}$ mm stark. Die Werte geben zugleich Dimensionen für die moleculare Wirkungsweite.

Nach Lord Rayleigh schäumen reine Flüssigkeiten nicht. Nur Flüssigkeitsgemische, z. B. Wasser und Alkohol, Wasser und Essigsäure, bilden beim Schütteln Blasen. Wenn Teiche, Bäche oder Meere schäumen, so befindet sich auf dem Wasser ein aus Pflanzen gezogener Stoff, der die Oberflächenspannung vermindert und die Blasenbildung ermöglicht.

Ausser den bereits behandelten Haarröhrchenerscheinungen gehören hierher auch folgende von van der Mensbrugghe angegebene Erscheinungen[1]). Ein in der Mitte zusammengefaltetes Stück Papier, das mit einer Hälfte auf die Wasseroberfläche gelegt wird, streckt sich und legt sich seiner ganzen Ausdehnung nach auf das Wasser. Beim Einbiegen werden die Theilchen des Papieres an der inneren Seite der Faltungskante einander genähert, an der äusseren Seite dagegen entfernt und dadurch aufgelockert; tritt nun aber an der Bruchstelle Feuchtigkeit bis zu der inneren Seite, so erfolgt auch hier eine Auflockerung der Theilchen und damit eine Streckung des Papieres. Nach F. Leconte öffnet sich zusammengefaltetes Papier, wenn man die Kante von aussen befeuchtet. Ebenso geschieht es mit geknickten Grashalmen und Hölzchen; werden die geknickten Gegenstände an beiden Enden mittelst Fäden aufgehängt und an die Knickungsstelle ein Tropfen Wasser gebracht, so strecken sich dieselben, bis sie in die horizontale Lage gelangen.

Ähnlich wie bei diesen Vorgängen wirkt auch die Feuchtigkeit bei anderen Erscheinungen in der Pflanzenwelt; die Fruchtgrannen des Storchschnabels rollen sich im feuchten Zustande auf und strecken sich, sie kehren beim Trocknen wieder in den früheren Zustand zurück. Beim Anfeuchten der Seile verdicken sich die einzelnen Kordeln und werden länger; da die Verdickung bewirkt, dass die einzelnen Kordeln im Seile nicht so viele Windungen wie im trockenen Zustande bilden können, so muss gleichzeitig eine Verkürzung des Seiles eintreten.

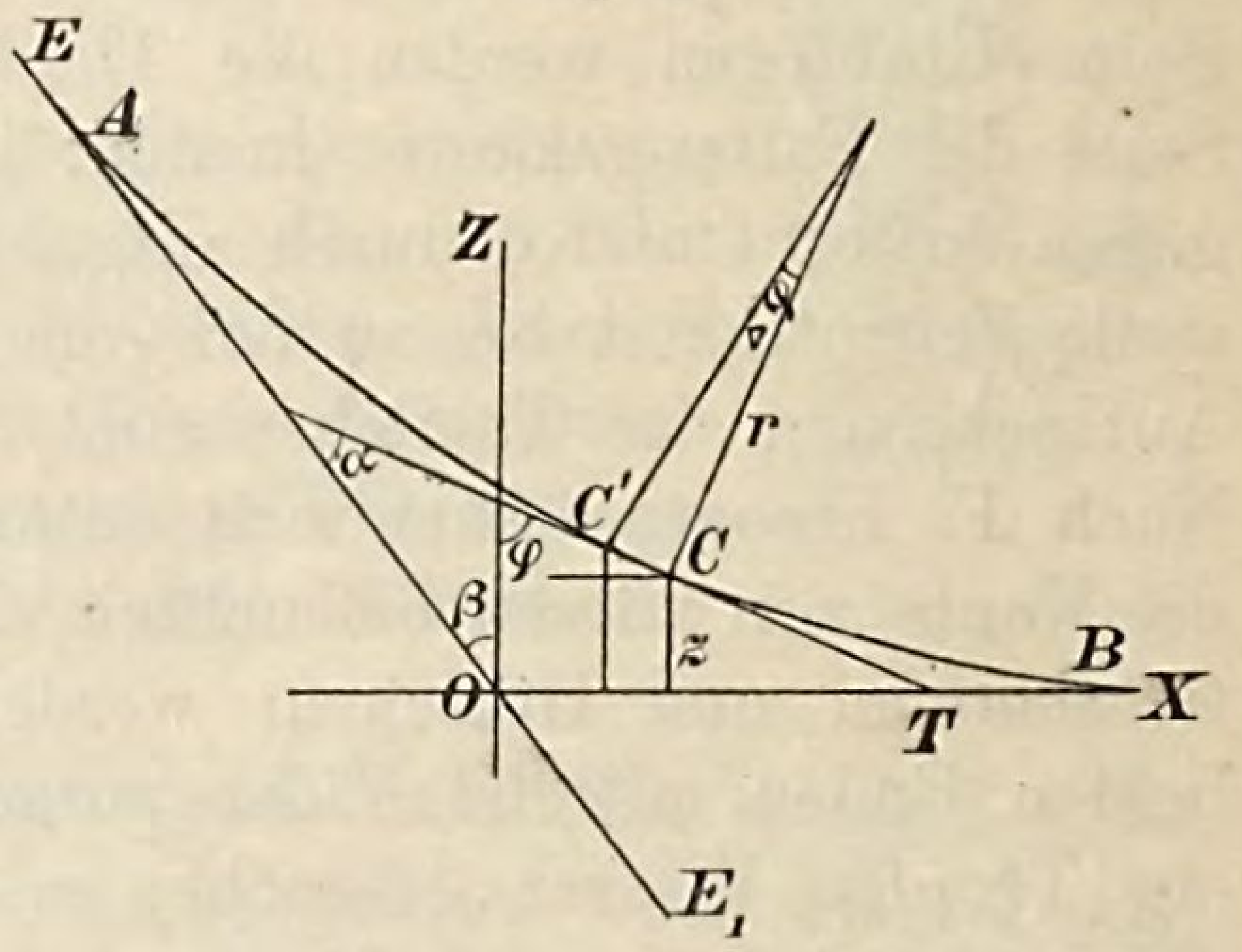
§ 63. **Gestalt der freien Oberfläche einer Flüssigkeit**[2]). a) Unter dem Einfluss der Schwerkraft stellt sich jede Flüssigkeitsoberfläche horizontal. Es ist bereits bemerkt worden, dass in der Nähe der Gefässwände die Oberfläche die Richtung ändern muss, um allmählig jene Richtung anzunehmen, welche durch den Randwinkel bestimmt ist. Es soll nun die Gestalt der Oberfläche in der Nähe einer ebenen Wand ermittelt werden. Da die Flüssigkeit längs der ganzen Wand in gleicher Weise emporgehoben oder herabgedrückt wird, jenachdem eine Benetzung stattfindet oder nicht, so ist im allgemeinen anzunehmen, dass das betreffende gekrümmte Flächenstück ein Theil eines Cylindermantels ist, dessen Erzeugenden horizontal und parallel zur Wand sind. Behufs Bestimmung der Leitlinie sei in Fig. 56 ein normaler Schnitt zur Wand dargestellt: EE_1 sei der Schnitt mit der Wand, ACB der Schnitt mit der Flüssigkeitsoberfläche, die von B aus horizontal verlaufe. Wir beziehen die Punkte der Oberfläche ACB auf das rechtwinklige Coordinatenkreuz OX, OZ und bestimmen den Abstand z für den beliebigen Punkt C. Der Krümmungshalbmesser für das Bogenelement CC' in der Zeichnungsebene sei r. Die

1) Poske's Zeitsch. f. d. phys. u. chem. Unterr. III. S. 197.

2) Siehe meine Abhdlg. über d. Oberflächendruck.

Ebene, welche durch r gelegt wird und normal zur Zeichnungsfläche ist, schneidet die cylindrische Oberfläche längs einer erzeugenden Geraden; daher ist der zweite Hauptkrümmungshalbmesser unendlich gross. Mit Rücksicht darauf wird der Oberflächendruck in dem Flächenelemente bei C

Fig. 56.



$$P = P_0 - \frac{H}{r}.$$

Die Beziehung zwischen diesem Druck und der Schwerkraft ergibt sich nach dem Principe der virtuellen Bewegung. Wir denken uns eine sehr kleine Verschiebung dr des Oberflächenelementes ds gegen das Innere der Flüssigkeit. Bei derselben leistet die Oberflächenspannung die Arbeit $-\frac{H}{r} \cdot ds \cdot dr$ und die Schwerkraft befördert das Flüssigkeitstheilchen vom Gewichte $(ds \cdot dr \cdot f)$ in das horizontale Niveau, das um die Strecke z tiefer liegt als der Punkt C. Gleichgewicht besteht, wenn die Summe der Arbeiten gleich Null ist, also wenn

$$-\frac{H}{r} \cdot ds \cdot dr + ds \cdot dr \cdot f \cdot z = 0,$$

oder wenn

$$z = \frac{H}{r \cdot f}.$$

Dieselbe Bedingung erhält man, wenn man den Druck oder Zug infolge der Oberflächenspannung in C dem darunter befindlichen, gehobenen Flüssigkeitssäulchen gleichsetzt.

Drückt man den Krümmungshalbmesser r durch die Coordinaten des Punktes C aus, so lässt sich die Gleichung der Leitlinie ermitteln. Wir beschränken uns auf die Bestimmung des höchsten Punktes A und stellen zu diesem Zwecke eine Beziehung zwischen der Ordinate z und dem Winkel φ auf, den die Tangente CT mit der Ordinatenachse Z bildet[1]). Für einen dem Punkte C benachbarten Punkt C' geht $\sphericalangle\, \varphi$ über in $(\varphi + d\varphi)$; $d\varphi$ ist der Winkel zwischen den zwei aufeinander folgenden Tangenten, zugleich aber auch der Winkel zwischen den gezeichneten zwei auf einander folgenden Normalen. Mit Benützung der Winkel φ und $d\varphi$ lässt sich das Bogenelement CC', der Ordinatenunterschied dz und daraus z selbst berechnen. Man erhält für das concav gekrümmte Bogenelement

$$CC' = -r \cdot d\varphi,$$

und für $\quad dz = CC' \cdot \cos\varphi = -r \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = -r \cdot d \sin\varphi.$

1) V. v. Lang: a. a. O. S. 479.

Wird hieraus r gerechnet und in die Gleichung für z eingesetzt, so erhält man

$$z \cdot dz = -\frac{H}{f} \cdot d \sin \varphi$$

und durch Summierung der beiden Gleichheitsseiten

$$\frac{1}{2}(z^2 - z_0^2) = -\frac{H}{f}(\sin \varphi - \sin \varphi_0).$$

Beginnt die Zählung von B, so ist $z_0 = 0$ und $\varphi_0 = 90^0$ und daher die Gleichung

$$\frac{1}{2} z^2 = \frac{H}{f}(1 - \sin \varphi).$$

Nach diesem allgemeinen Gesetze lässt sich die Erhebung jedes Punktes der gekrümmten Oberfläche und insbesondere auch die Erhebung des höchsten Punktes A der Flüssigkeit angeben.

Ist die Wand vertical, so wird für den höchsten Punkt der Flüssigkeit $z = h$ und $\sphericalangle \varphi$ gleich dem Randwinkel; damit erhält man die Erhebung

$$h = \sqrt{\frac{2H}{f}(1 - \sin \varphi)}.$$

Bei vollständiger Benetzung ist

$$h = a = \sqrt{\frac{2H}{f}};$$

daraus folgt

$$H = f \cdot \frac{a^2}{2}.$$

Die Gleichung kann dazu dienen, die Oberflächenspannung H zu berechnen.

Anstatt H wird nach Quincke auch häufig die Grösse a in Rechnung gezogen; der Wert a^2 heisst auch specifische Cohäsion.

Wenn die Flüssigkeit die Wand nicht benetzt, dann ist der Randwinkel $\alpha > 90^0$; bei Auflösung der quadratischen Gleichung nach z beziehungsweise h hat man in diesem Falle das negative Zeichen der Wurzel zu benützen; die Oberfläche in der Nähe der Wand ist convex und erscheint somit herabgedrückt.

b) Tauchen zwei verticale Platten parallel nebeneinander in eine Flüssigkeit, welche eine Platte benetzt und die andere nicht, so zeigt die Flüssigkeitsoberfläche zwischen den Platten an der Übergangsstelle von der concaven zur convexen Gestalt einen Wendepunkt, dessen Tangente mit der Verticalen den Winkel φ_0 einschliesst, der nicht 90^0 ist. Durch Einführung dieser Bedingung in die allgemeine Gleichung für die Erhebung z eines Punktes der Oberfläche erhält man für die Steighöhe

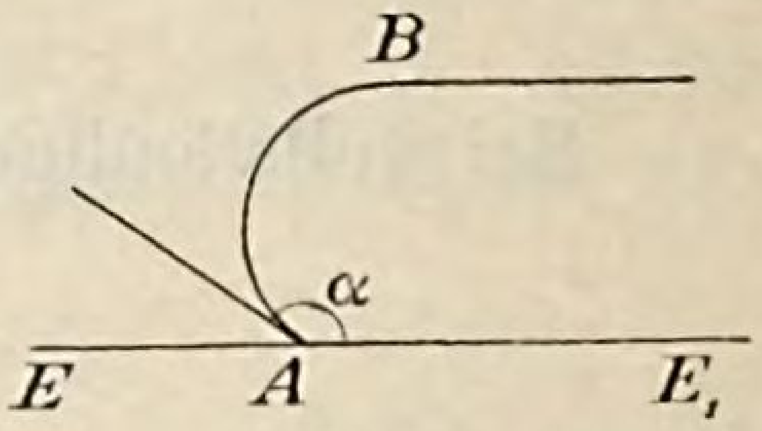
$$h = \sqrt{\frac{2H}{f}(\sin \varphi_0 - \sin \varphi)}.$$

Dieser Wert ist kleiner als der obige Wert für h und es folgt, dass die Erhöhung beziehungsweise Erniedrigung des Flüssigkeitsrandes an den Innenseiten der Platten geringer ist als an den Aussenseiten.

c) Wir verwenden noch das allgemeine Gesetz für die Ordinate z zur Bestimmung der Oberflächengestalt eines Tropfens, der auf einer horizontalen Fläche aufliegt. Die horizontale Ausdehnung des Tropfens sei kreisförmig und der Halbmesser des Kreisumfanges gegenüber dem seitlichen Krümmungshalbmeser eines zweiten Hauptschnittes sehr gross, damit die mittlere Krümmung in einem Punkte der seitlichen Oberfläche mit der vorstehenden Berechnung sich im Einklang befinde. Zu unserem Zwecke führen wir (Fig. 56) die Neigung β der Wand gegen die Verticale und $\sphericalangle \alpha$ ein, welchen die Tangente CT mit der Wand einschliesst. Es ist nun $\varphi = \alpha + \beta$ und damit erhalten wir

$$z^2 = \frac{2H}{f}\left[1 - \sin(\alpha + \beta)\right].$$

Fig. 57.



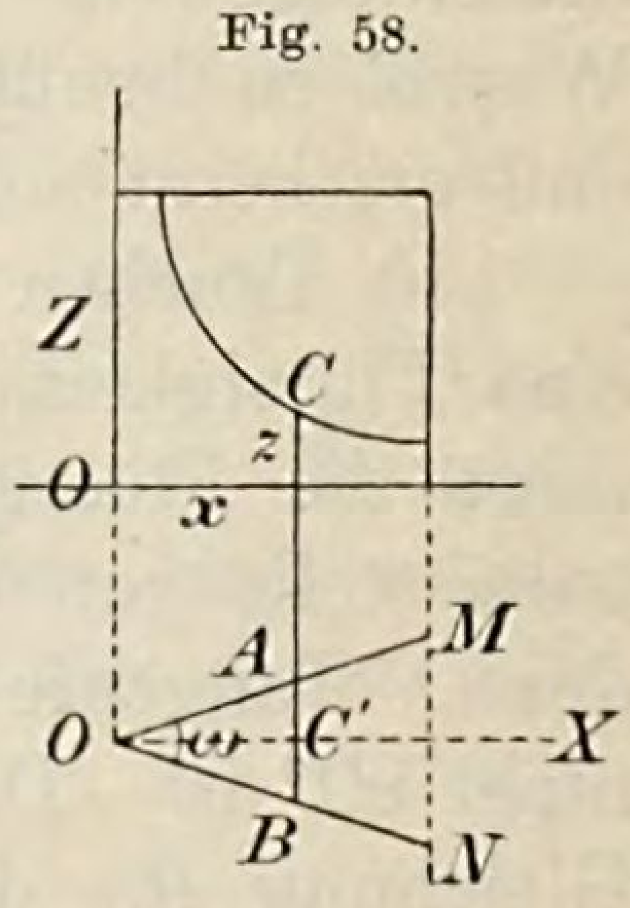
In dem Falle des Tropfens (Fig. 57) ist die Wand EE_1 horizontal, $\sphericalangle \alpha$ entspricht dem Randwinkel und $\beta = 90^0$; z, bezogen auf den Randpunkt A, bedeutet die Dicke H des Tropfens; diese wird demnach

$$h = \sqrt{\frac{2H}{f}(1 - \cos\alpha)}.$$

Auch dieses Gesetz wird zur Bestimmung der Oberflächenspannung H benützt. Gay-Lussac fand für Quecksilber aus $180^0 - \alpha = 45^0 30'$ $H = 43{\cdot}52$ und Desains aus dem Winkel $41^0\,36'\,30''$ $H = 45{\cdot}32$. Die Abweichungen der Werte rühren von der Verschiedenheit, namentlich von der Reinheit der Oberflächen her.

Das Gesetz gilt auch für die Luftblasen, die sich unten an eine horizontale Ebene ansetzen, welche in eine Flüssigkeit getaucht wird; der Tropfen liegt jedoch dann nicht auf der Ebene EE_1, sondern er befindet sich unter derselben und ist die Darstellung (Fig. 57) um EE_1 um 180^0 gedreht zu denken.

Fig. 58.



d) Die Gestalt der Flüssigkeitsoberfläche zwischen zwei verticalen Wänden, die mit einander einen kleinen Winkel einschliessen, erhält man auf einfache Weise. In dem engeren Raume des Flächenwinkels steht die Flüssigkeit höher als in dem weiteren. Die Erhebung an einer bestimmten Stelle C kann nach dem Gesetze für die Steighöhe der Flüssigkeit zwischen parallelen Wänden berechnet werden. Seien OM und ON (Fig. 58) die Grundspuren der beiden Platten

und OX die Halbierende des Neigungswinkels ω, ferner $AB = \varDelta$, und x, z die Coordinaten eines Punktes C der Oberfläche in der Mitte zwischen den Platten, dann ist der Plattenabstand

$$\varDelta = 2 \cdot x \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \cdot$$

Für diese Distanz ist die Steighöhe (S. 211, Aufg. 5)

$$z = \frac{2H \cos \alpha}{\varDelta \cdot f} = \frac{H \cos \alpha}{f \cdot x \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}},$$

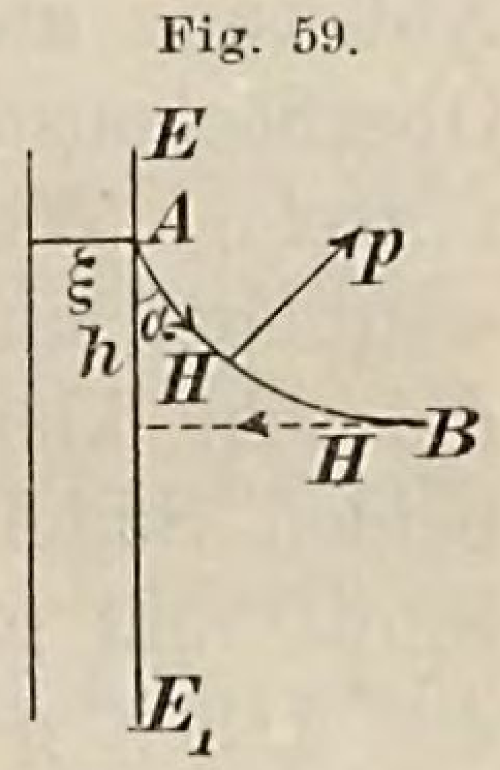
daraus folgt

$$xz = \frac{H \cos \alpha}{f \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}} \cdot$$

Diese Gleichung entspricht einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten mit den Achsen x und z zusammenfallen. Längs dieser Linie steigt die Flüssigkeit zwischen den Platten empor. (Fig. 58.)

§ 64. **Anziehung und Abstossung durch die Oberflächenspannung.** Gleichwie die Oberflächenspannung das Gewicht einer Flüssigkeit verändert, so bewirkt sie auch eine Änderung des hydrostatischen Druckes auf die Seitenwände. Es ist sofort ersichtlich (Fig. 59), dass in der Nähe einer Wand der Druck p infolge der Oberflächenspannung, welcher in der Richtung der Hauptkrümmungshalbmesser wirkt, auf die Wand einen Zug ausüben muss. Die Grösse dieses Zuges P auf die ebene Wand E erhalten wir mittelst des Principes der virtuellen Bewegung. Wir verschieben die Ebene E parallel zu zu sich selbst um die kleine Strecke ξ; bei der betreffenden Arbeit sind die Spannungen H bei A und B und die auf die Wand wirkende Kraft P der Flüssigkeitssäule thätig. Ist die Länge der Wand l und der Randwinkel α, dann gilt für die Arbeiten die Gleichung

Fig. 59.



$$P \cdot \xi = -(H \cdot l) \cdot \xi + (H \cdot l) \cdot \xi \sin \alpha,$$

daraus wird

$$P = -H \cdot l(1 - \sin \alpha).$$

Wird H nach dem vorstehenden Gesetze durch die Steighöhe der Flüssigkeit an der Wand ausgedrückt, so folgt

$$P = -\frac{1}{2} \cdot f \cdot h^2 \cdot l.$$

Dieser Ausdruck stimmt auch mit dem hydrostatischen Druck auf die Wand in der Höhe $\frac{h}{2}$ überein; die Wirkung desselben wird also durch die Oberflächenspannung aufgehoben. Setzt man diese Bedingung für den Gleichgewichtszustand voraus, so können die zwei

letzten Gleichungen dazu dienen, in der einfachsten Weise die Steighöhe h der Flüssigkeit an der Wand zu berechnen.

Da der Zug P auf die Wand proportional dem Quadrate der Steighöhe h ist, so bleibt er seiner Richtung nach unverändert, ob die Höhe positiv oder negativ, also ob die Oberfläche concav oder convex ist.

Die berechnete Wirkung der Oberflächenspannung auf die Seitenwand kann bei einer in die Flüssigkeit getauchten Platte oder Wand keine Erscheinung hervorrufen, da sie auf beiden Seiten der Wand in gleicher Stärke aber in entgegengesetzter Richtung erfolgt. Sie wird sich geltend machen, wenn zwei Platten in einer Flüssigkeit einander nahe gegenüber stehen. Wird eine Platte benetzt und die andere nicht, so sind, wie nachgewiesen worden ist, sowohl die Erhebung als auch die Depression an den inneren Seiten der Platten kleiner als an den äusseren; die äusseren Zugkräfte haben das Übergewicht und die beiden Platten müssen sich von einander entfernen, als ob sie sich abstiessen.

In den Fällen, wo beide parallele Platten von der Flüssigkeit benetzt oder nicht benetzt werden, bedeutet h die Steighöhe der Flüssigkeit zwischen den Platten; es sind demnach die Kräfte zwischen den Platten grösser als ausserhalb und es erfolgt eine Annäherung, eine Anziehung der beiden Platten. —

Da die letztere Anwendung des vorstehenden Gesetzes aus der Ableitung nicht unmittelbar klar ist, wollen wir den Wanddruck der Oberflächenspannung auf zwei parallele, verticale Platten direct ermitteln. Wir verwenden auch hier das Princip der virtuellen Bewegungen und zwar für die Verschiebung einer der beiden Platten um die sehr kleine Strecke ξ. Die Arbeiten der Spannungen H zu beiden Seiten der bewegten Platte geschehen im entgegengesetzten Sinne und geben zusammen den Arbeitswert Null. Es bleibt nur die Arbeit der Schwerkraft zu berücksichtigen, welche der Arbeit des Wanddruckes gleich sein muss. Die letztere Arbeit sei $P \cdot \xi$. Die Arbeit der Schwerkraft lässt sich mittelst der Steighöhe h der Flüssigkeit zwischen den Platten bestimmen. Bei der vorgenommenen Verschiebung einer Platte um ξ geht die Entfernung der Platten von $\varDelta$ über in $(\varDelta + \xi)$, die Höhe h vermindert sich um dh und der Schwerpunkt der gehobenen Flüssigkeit sinkt um $\frac{1}{2} \cdot dh$; das Flüssigkeitsgewicht zwischen den Platten bleibt unverändert. Es besteht demnach folgende Gleichgewichtsbedingung

$$P \cdot \xi = (l \cdot h \cdot \varDelta \cdot f + q) \cdot \frac{1}{2} \cdot dh.$$

Aus den Ausdrücken für die Steighöhen h und $(h + dh)$ bei den Plattenabständen $\varDelta$ und $(\varDelta + \xi)$ (S. 211, Aufg. 5) ergibt sich leicht die Beziehung

$$\frac{dh}{\xi} = -\frac{h}{\varDelta}.$$

Darnach wird

$$P = -\left(\frac{f}{2}\, l \cdot h^2 + \frac{1}{2}\, q \cdot \frac{h}{\varDelta}\right).$$

Lässt man bei höherem Flüssigkeitsstande h das Gewicht q in den Winkeln des Meniscus gegenüber dem gehobenen Flüssigkeitsgewichte fort, so erhält man für den Wanddruck

$$P = -\frac{1}{2} \cdot f \cdot h^2 \cdot l$$

das obige Gesetz.

Ebenso wie die Anziehung und Abstossung von nahen Platten in einer Flüssigkeit erklärt auch das Gesetz eine scheinbare Wechselwirkung zwischen schwimmenden Körpern. Zwei Korkkugeln (auch Korkstöpsel), die auf Wasser schwimmen und einander entsprechend genähert werden, ebenso zwei Glaskugeln, die auf Quecksilber schwimmen, üben eine lebhafte Anziehung aus; zwei Kugeln, die auf einer Flüssigkeit schwimmen und von denen die eine benetzt wird und die andere nicht, stossen einander ab, wenn sie entsprechend genähert werden. — Auch beim Weichwerden fester Körper und bei der Auflösung von Salzen in Flüssigkeiten mag sich die Seitenwirkung der Oberflächenspannung geltend machen und zur Auflockerung der festen Theilchen beitragen.

§ 65. **Adhäsionsplatten.** Als eine Aufgabe über Oberflächenenergie soll noch die Kraft berechnet werden, mit welcher Adhäsionsplatten aneinander haften. Zwischen zwei Platten befinde sich eine dünne Flüssigkeitsschichte, welche die Platten benetzt. Das Gewicht einer Platte sei Q. Die beiden Berührungsflächen der Flüssigkeitsschichte seien Kreise vom Inhalte $S = r^2\pi$. Die Oberflächenspannung in jeder Berührungsschichte sei H, die Dicke der Flüssigkeitsschichte z. Wird nun die obere Platte um dz gehoben, so wird der Schwerkraft entgegen die Arbeit $Q \cdot dz$ geleistet; gleichzeitig ändert sich jede der beiden Flächen S um $dS = 2r\pi \cdot dr$ und verschwindet bei abnehmendem S die Oberflächenenergie $2H \cdot dS$. Die Gesammtarbeit ist daher

$$dW = Q \cdot dz - 2H \cdot 2r\pi \cdot dr.$$

Nun ist das Volumen der Flüssigkeit $r^2\pi \cdot z = \text{const.}$ und somit

$$2r\pi \cdot dr = -\frac{r^2\pi}{z} \cdot dz.$$

Mit Rücksicht darauf wird die Kraft zur Hebung

$$F = \frac{dW}{dz} = Q + \frac{2H \cdot r^2\pi}{z}.$$

Eine äussere Kraft von dieser Grösse vermag den Kräften dieses Systemes Gleichgewicht zu halten; eine geringe Vermehrung derselben verursacht ein Reissen der Flüssigkeitsschichte.

Wenn keine Benetzung stattfindet, z. B. zwischen Quecksilber und Glas, dann ist H negativ; für sehr kleine z, d. h. bei einer sehr dünnen Flüssigkeitsschichte, kann dann auch F negativ werden; denn in diesem Falle muss eine Belastung angebracht werden, um die obere Platte in ihrer Lage gegen die untere zu erhalten.

§ 66. **Diffusion der Flüssigkeiten.** Kork oder Öl, ins Wasser gebracht, steigen an die Oberfläche und schwimmen auf derselben; Kochsalz oder Weingeist dagegen breiten sich allmählig im ganzen Wasser aus, sie geben beziehungsweise eine Lösung oder Mischung. Der feste Körper wird zunächst auch flüssig, und seine Ausbreitung erfolgt so wie die einer Flüssigkeit. Bei der Mischung durchdringt jede Flüssigkeit die andere; der Vorgang wird mit dem Namen Diffusion bezeichnet.

Dutrochet hat (1827) zuerst diese Erscheinung mit Hilfe seines Endosmometers untersucht[1]). Der Apparat besteht aus einem Fläschchen, dessen Boden von einer Membran (Schweinsblase) gebildet wird, und dessen Hals sich in eine getheilte Röhre verlängert. Füllt man das Fläschchen mit Alkohol und taucht den Apparat in Wasser ein, so bemerkt man ein Ansteigen der Flüssigkeit in der getheilten Röhre; es ist durch die Membran Wasser zum Alkohol und Alkohol zum Wasser übergetreteten. Dutrochet nennt die beiden Strömungen Endosmose und Exosmose. In ähnlicher Weise geht der Austausch von Flüssigkeiten im lebenden Organismus vor sich.

Nach Versuchen von Jolly, Eckhard, Ludwig u. a. mit Wasser und verschiedenen Salzlösungen hängt die Diffusionsgeschwindigkeit von der Natur der Flüssigkeit, von der Concentration der Lösung und von der Membran ab. Sobald die Concentration der Lösung auf beiden Seiten der Membran gleich ist, so hört die Diffusion auf.

Die Diffusion ohne Scheidewand, die sogenannte freie Diffusion hat zuerst Graham (1850) untersucht. Die zu untersuchende Lösung wird mittelst einer Pipette auf den Boden eines mit Wasser gefüllten Glascylinders gebracht; nach einigen Tagen saugt man mit einem capillaren Heber Proben aus verschiedenen Höhen ab und analysirt sie. Graham fand, dass die Salzmengen, die aus den Lösungen herausdiffundieren, abhängen von der Natur des Salzes, proportional sind der Concentration der Lösung und mit der Temperatur wachsen.

Die Bewegungen rühren offenbar von Druckdifferenzen her, welche durch das Zusammenwirken der Cohäsionen der zu mischenden Stoffe

1) Violle. Lehrb. II. S. 676.

und der Adhäsion zwischen ihnen bedingt ist. Vom Standpunkte des Energieprincipes spielt jedenfalls die Oberflächenenergie eine wichtige Rolle. Ist in der Berührungsschichte beider Stoffe die doppelte Spannung infolge der Adhäsion grösser als die Summe der Cohäsionsspannungen (§ 61, S. 213), dann ist die Flächenenergie in dieser Doppelschichte negativ, es wird bei der Ausbreitung derselben Arbeit gewonnen. Bei dem Bestreben des Systems, das Minimum der potentiellen Energie zu erreichen, wird die Doppelschichte in die inneren leeren Räume eines Stoffes eindringen, der Stoff wird aufgelöst und bei der Ausbreitung desselben möglichst in seine Elemente zerlegt. Ist die Lösung eine gleichmässige, so ist auch der Druck im ganzen Volumen derselbe und es herrscht Gleichgewicht.

Eine Anwendung findet die Diffusion zur Trennung der Krystalloide von Colloiden, weil die Krystalloidlösungen rascher diffundieren. (Dialyse.)

§ 67. **Mischungs- und Lösungsarbeit** [1]). Die Moleculararbeit einer Lösung oder Mischung ist bei jeder Flüssigkeit durch die hydrostatische Grundgleichung, beziehungsweise durch die Volumenergie gegeben; sie ist bestimmt durch das Product aus dem herrschenden Druck (dem Wirkungsgrad) in das Volumen (den Wirkungsraum). Der erstere soll unter der Voraussetzung entwickelt werden, dass die Lösung in allen in der Rechnung zu benützenden Volumelementen dieselbe Zusammensetzung besitzt. Es ist nur nöthig, die wirkenden Kräfte in der Oberflächenschichte zu bestimmen. Denn diese üben den ganzen Druck auf das Flüssigkeitsvolumen aus; die inneren Kräfte heben einander gegenseitig auf.

Die oberste Schichte von der Dicke der Wirkungsweite eines Molecüles, für sich allein betrachtet, befindet sich im Gleichgewichte und übt keinen Druck nach abwärts aus, wenn von dem Einfluss einer etwaigen Krümmung abgesehen wird. Erst durch die Wirkung der Nachbarschichte von gleicher Dimension auf die erste entsteht der Oberflächendruck. Die Rückwirkung auf die zweite Schichte trägt zum inneren Drucke nichts bei, weil auf sie von der äusseren und inneren Seite gleiche Kräfte wirken, die einander gegenseitig aufheben. Aus demselben Grunde sind auch alle folgenden inneren Schichten auf den Druck ohne Einfluss.

Die Molecularkräfte zwischen den zwei obersten Schichten auf die Oberflächenschichte bestehen nun aus der Cohäsion K_1' des gelösten Stoffes, der Cohäsion K_2' des Lösungsmittels, der Adhäsion A' zwischen dem gelösten Stoffe in der Oberflächenschichte und dem Lösungsmittel in der Nachbarschichte und endlich der Cohäsion A' zwischen dem Lösungsmittel in der Oberflächenschichte und dem

1) Siehe meine Schrift über d. Oberflächendruck. 1890. S. 37.

gelösten Stoffe der Nachbarschichte. Der Druck für die Flächeneinheit ist somit

$$P = K_1' + K_2' + 2A'.$$

Die einzelnen Molecularkräfte lassen sich nun aus den Massen μ der beiden obersten Schichten über der Flächeneinheit, beziehungsweise aus der Dichte δ und dem Gewichte q der betreffenden Stoffe und aus dem Volumen v der ganzen Lösung in allgemein giltiger Form wie folgt darstellen:

$$K_1' = \mu_1^2 \cdot \varphi(r_1) = a_1 \delta_1^2 \cdot f(r_1) = a_1 \left(\frac{q_1}{v}\right)^2 \cdot f(r_1).$$

Hierin ist r_1 die Entfernung der Massenmittelpunkte der beiden Nachbarschichten; sie wird durch die Wirkungsweite der Molecüle bestimmt. — Ähnlich erhält man für die Cohäsion des Lösungsmittels

$$K_2' = a_2 \,.\, \left(\frac{q_2}{v}\right)^2 \cdot f(r_2)$$

und für die Adhäsion

$$A' = a_3 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{v^2} \cdot f(r_3).$$

Damit wird der Arbeitswert der Lösung oder Mischung

$$\begin{aligned} W &= P \cdot v \\ &= v \cdot \left[a_1 \cdot \left(\frac{q_1}{v}\right)^2 \cdot f(r_1) + a_2 \cdot \left(\frac{q_2}{v}\right)^2 \cdot f(r_2) + 2a_3 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{v^2} \cdot f(r_3)\right]. \end{aligned}$$

Um die Arbeit zu finden, welche durch die Bildung der Mischung aus den gegebenen einzelnen Stoffen verrichtet wird, müssen wir von W die Arbeitswerte W_1 und W_2 der letzteren in Abzug bringen. Sind v_1 und v_2 die Volumen der Flüssigkeiten vor der Mischung, so sind ihre Volumenenergien

$$W_1 = K_1 v_1 = a_1 \cdot \left(\frac{q_1}{v_1}\right)^2 \cdot f(r_1) \cdot v_1 \text{ und } W_2 = K_2 v_2 = a_2 \cdot \left(\frac{q_2}{v_2}\right)^2 \cdot f(r_2) \cdot v_2$$

und die Mischungsarbeit wird

$$\begin{aligned} \varDelta W &= W - (W_1 + W_2) \\ &= -\frac{1}{v}\left[a_1 \cdot q_1^2 \cdot \frac{v - v_1}{v_1} \cdot f(r_1) + a_2 \cdot q_2^2 \frac{v - v_2}{v_2} \cdot f(r_2) - 2a_3 q_1 q_2 \cdot f(r_3)\right]. \end{aligned}$$

Im allgemeinen ist die Summe der Volumen der einzelnen Stoffe vor der Mischung nicht gleich dem Volumen der Mischung; wir benützen deshalb einen Contractionscoefficienten γ und setzen

$$v_1 + v_2 = (1 + \gamma) v.$$

Damit und durch Einführung der Moleculardrücke der ungemischten Stoffe K_1, K_2 und A erhält man

$$\Delta W = -\frac{v_1 v_2}{v} \cdot [K_1 + K_2 - 2A] + \gamma(K_1 v_1 + K_2 v_2)$$
$$= -\frac{v_1 v_2}{v} \cdot [K_1 + K_2 - 2A] + \frac{\Delta v}{v}(W_1 + W_2).$$

Diese Mischungsarbeit kann positiv oder negativ sein, und darnach tritt entweder eine äquivalente Erwärmung oder Abkühlung ein. Ist die Raumänderung der sich mischenden Stoffe und damit auch γ sehr gering, so können wir behaupten, dass eine Erwärmung dann eintritt, wenn die Adhäsion grösser ist, als das arithmetische Mittel der beiden Cohäsionswerthe; ist aber das Mittel der Cohäsion grösser als die Adhäsion, so wird die Mischung abgekühlt. Thatsächlich treten beide Erscheinungen ein; so zeigt sich bei einer Mischung von Äther und Chloroform Erwärmung, bei Äther und Schwefelkohlenstoff Abkühlung. Viele Salze lösen sich unter Wärmeverbrauch und werden deshalb zu Kältemischungen benützt, wie z. B. Kochsalz, Salmiak, Salpeter u. a. Solche Salze werden sich bei Erwärmung der Flüssigkeit leichter lösen. Die wenigen Salze, welche beim Lösen Wärme erzeugen, wie Kalkhydrat, schwefelsaures Cer und Natrium, sind bei höherer Temperatur weniger löslich.

Die Arbeit ΔW beziehungsweise die äquivalente Wärme ist auch von dem Mischungsverhältnis abhängig und wie leicht zu erweisen ist, wird sie am stärksten sein, wenn die Volumen v_1 und v_2 der zu mischenden Stoffe einander gleich, nämlich gleich $\frac{1}{2}v$ sind. Der grösste Wert der Mischungsarbeit ist dann

$$\Delta W' = -\frac{v}{4}(K_1 + K_2 - 2A).$$

Mit Rücksicht auf das Verhältnis γ der Volumsveränderung wird man sagen können, dass eine Raumverminderung, wobei γ positiv ist, stets erwärmend, dagegen eine Raumvergrösserung abkühlend wirkt. Die betreffende Wirkung wird durch Steigerung des Druckes, wodurch die Cohäsionen K verstärkt werden, im entsprechenden Sinne vermehrt. Nach der Zustandsgleichung ist Kv der absoluten Temperatur proportional, daher steigende Temperatur im Sinne der Druckvermehrung wirkt. Diese Gesetze hat Braun experimentell bestätigt[1]).

In eine innige Beziehung würde die Mischungsarbeit zur Oberflächenspannung treten, wenn die Oberflächenschichte nur aus einer Lage von Molecülen bestände und die Wirkungsweite σ beider Stoffe gleich gross wäre; unter dieser Voraussetzung sind (nach § 59, S. 206)

$$H_1 = \frac{1}{2} K_1 \cdot \sigma \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{1}{2} K_2 \cdot \sigma$$

1) F. Braun. Winkelmann's Handb. d. Phys. S. 466.

und die Spannung in der Berührungsschichte (nach § 61)

$$H = \frac{1}{2}\sigma(K_1 + K_2 - 2A).$$

Damit wird bei Vernachlässigung einer etwaigen Volumsänderung die Mischungsarbeit

$$\Delta W = -2 \cdot \frac{v_1 v_2}{v \cdot \sigma} \cdot H.$$

v_1/σ ist unter allen Umständen der Oberfläche der aufgelösten Substanz proportional; das Product mit H gibt die Arbeit der Obenflächenspannung bei der Lösung; dieser Arbeit ist auch die gesammte Lösungs- oder Mischungsarbeit proportional. Je nachdem nun die Spannung positiv oder negativ ist, also zusammenziehend oder ausdehnend wirkt, je nachdem wird Arbeit verbraucht oder gewonnen, es tritt beziehungsweise eine Erwärmung oder Abkühlung ein.

§ 68. **Der osmotische Druck.** Derselbe ist durch die Druckänderung einer Flüssigkeit infolge der Auflösung eines Körpers bestimmt. Das Studium desselben wurde von Traube (1867) vorbereitet durch die Erfindung seiner künstlichen Zelle oder Niederschlagsmembran. Man erhält eine solche z. B. indem man in eine Lösung von Kupfersulfat einen Tropfen Ferrocyankalium träufelt; an der kugelförmigen Grenzfläche der beiden Flüssigkeiten bildet sich dann eine Niederschlagsmembran von Ferrocyankupfer, welche den Tropfen umschliesst. Durch richtige Concentration der Lösungen kann man der Membran die hier wesentliche Eigenschaft ertheilen, dass sie keines von beiden Salzen durchlässt, wohl aber Wasser, dass sie halbdurchlässig, ein moleculares Sieb ist. Nach Pfeffer's osmotischen Untersuchungen (1877) kann auch eine Thonzelle halbdurchlässig sein und zur Darstellung und Messung des osmotischen Druckes dienen: Eine unverglaste Thonzelle, deren Boden und Wände mit einem Niederschlag von Kupferferrocyanid, Eisenoxyd, Kieselsäure o. dgl. überzogen wird, wird mit einer Salz- oder Zuckerlösung gefüllt, auf der offenen Seite mit einem Kolben geschlossen und ins Wasser gelegt. Boden und Wand lassen das Wasser, nicht aber das Salz hindurchtreten, sie sind halbdurchlässig. Ist nach Wassereintritt Gleichgewicht hergestellt, so herrscht im Innern der Lösung gegenüber dem Lösungsmittel der osmotische Druck.

Nach van't Hoff (1887) gilt für den osmotischen Druck verdünnter Lösungen das Gasspannungsgesetz. Wir wollen für denselben aus dem vorstehend abgeleiteten Gesammtdruck der Lösung eine Beziehung zur Cohäsion und Adhäsion ermitteln. Zu diesem Zwecke bilden wir die Differenz aus dem Lösungsdrucke P und dem Cohäsionsdrucke K_2 des Lösungsmittels und erhalten im Anschluss an den vorhergehenden Paragraph den osmotischen Druck

$$p = P - K_2$$
$$= \frac{1}{v^2}[a_1 \cdot q_1^2 \cdot f(r_1) + a_2 \cdot q_2^2 \cdot f(r_2) + 2 \cdot a_3 \cdot q_1 \cdot q_2 f(r_3)] - a_2 \left(\frac{q_2}{v_2}\right)^2 \cdot f(r_2)$$
$$= \frac{1}{v^2} \cdot \left[a_1 \cdot q_1^2 \cdot f(r_1) + a_2 \cdot q_2^2 \cdot \frac{v_2^2 - v^2}{v_2^2} \cdot f(r_2) + 2a_3 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot f(r_3)\right]$$
$$= \frac{1}{v^2} \cdot [K_1 \cdot v_1^2 - K_2(v + v_2)v_1 + 2A \cdot v_1 \cdot v_2]$$
$$= \frac{v_1}{v^2} \cdot [K_1 \cdot v_1 - K_2 \cdot (v + v_2) + 2A \cdot v_2].$$

Bei sehr verdünnten Lösungen kann das Glied mit dem Volumen v_1 des gelösten Stoffes vernachlässigt und das Volumen v_2 der Flüssigkeit dem Gesammtvolumen v gleich gesetzt werden; darnach ist

$$p = 2\,\frac{v_1}{v}\,(A - K_2).$$

Der osmotische Druck ist demnach dem Mischungsverhältnis in Volumtheilen und dem Unterschiede zwischen der Adhäsion und der Cohäsion des Lösungsmittel proportional. Messungen bestätigen die erstere Beziehung. Nach Pfeffer beträgt p für 1% Zuckerlösung $^2/_3$ Atm., für Salpeterlösung 3 Atm. und wächst proportional der Concentration.

Die erhaltene Gleichung gibt in der Form eines Arbeitswertes

$$p \cdot v = 2v_1(A - K_2)$$

Übereinstimmung mit dem Gasspannungsgesetze, beziehungsweise mit dem Gesetze von van't Hoff. Die Vervollständigung des Gesetzes bietet die Wärmelehre, in der gezeigt wird, dass der Arbeitswert der absoluten Temperatur proportional ist. Durch Versuche wird nachgewiesen, dass der betreffende Proportionalitätsfactor mit jenem der Gase übereinstimmt. Darauf weist aber auch der Vergleich des Arbeitswertes W (S. 226) für verdünnte Lösungen hin, wenn man den aus der letzten Gleichung folgenden Wert für $2Av_1$ einführt; man erhält unter Vernachlässigung des Gliedes mit v_1 die Gleichung

$$W = (K_2 + p) \cdot v,$$

in der die Form des Gasspannungsgesetzes $pv = R$ enthalten ist. Zuverlässig folgt bereits aus der abgeleiteten Gleichung die Grösse der Arbeit, wenn durch eine Kolbenbewegung mit dem Drucke p Wasser vom Volumen $\varDelta v$ aus der Lösung herausgedrückt wird; dieselbe ist

$$w = p \cdot \varDelta v = -\,v \cdot \varDelta p.$$

Der osmotische Druck ist die bewegende Kraft bei den Diffusionserscheinungen.

§ 69. **Mischung und Lösung der Gase.** Während sich zwei Flüssigkeiten, die man zusammenbringt, nicht in allen Fällen mischen, thun dies zwei Gase immer. Diese Thatsache hat Berthollet (1803) durch

ein berühmtes Experiment nachgewiesen[1]). Von zwei mit Hahnfassungen versehenen Ballons, die aufeinander geschraubt werden können, wird der eine mit Wasserstoff und der andere mit Kohlensäure gefüllt. Nachdem dieselben in der Weise verbunden worden sind, dass der mit Wasserstoff gefüllte sich oben befindet, öffnet man die beiden Hähne. Nach einigen Tagen findet man, dass in jedem der Ballons der Druck gleich dem ursprünglichen Atmosphärendrucke geblieben ist, und dass sich in jedem derselben ein Gemisch aus gleichen Theilen Wasserstoff und Kohlensäure befindet. Auch ein einfacher und effectvoller Versuch von Volta gehört hierher. Hält man zwei Reagensgläser, von denen das obere mit Wasserstoff und das untere mit Luft gefüllt ist, mit ihren Öffnungen einige Augenblicke aneinander, so erfolgt nach dem Auseinandernehmen bei Annäherung einer Kerzenflamme in jedem Glase eine Explosion. Damit wird die Mischung der beiden Gase bewiesen.

Der Vorgang der Mischung heisst Diffusion. Derselbe kann ebenso wie bei Flüssigkeiten durch poröse Scheidewände oder frei erfolgen. Für den ersteren Fall hat Graham (1834) das Gesetz aufgestellt: Die Diffusionsgeschwindigkeit ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Dichte der Gase. Das Gesetz kann als eine Folge des Ausflussgesetzes der Gase (§ 44) betrachtet werden. Bunsen hat allerdings nachgewiesen, dass das Gesetz nicht streng gilt, weil die Poren der Wände capillare Wirkungen ausüben.

Ist nach der Diffusion Gleichgewicht eingetreten, so ist jedes Gas in dem ganzen Raum der Mischung gleichmässig ausgebreitet und verhält sich so, als ob es in dem Raume allein vorhanden wäre, vorausgesetzt, dass keine chemische Wirkung stattfindet. Dieses Gesetz hat Dalton 1801 aufgestellt. Dasselbe wird leicht aus dem Gasspannungsgesetze, als Arbeitswert oder Volumenergie aufgefasst, gewonnen. Haben einzelne Gase die Volumen v_1, v_2, v_3 und die Drücke p_1, p_2, p_3, und hat die Mischung das Volumen V und den Druck P, so ist, da Arbeitsleistung von äusseren und inneren Kräften ausgeschlossen ist, der Arbeitswert der Mischung gleich der Summe der Arbeitswerte der einzelnen Gase, also

$$P \cdot V = p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 .$$

Sind die Volumen gleich geworden, nämlich $v_1 = v_2 = v_3 = V$, so folgt

$$P = p_1 + p_2 + p_3 ,$$

der mathematische Ausdruck für das Dalton'sche Gesetz.

Es ist aber auch nach E. Dühring für das Gleichgewicht die Bedingung berechtigt, dass die Drücke der einzelnen Gase in der Mischung einander gleich seien, dass also $p_1 = p_2 = p_3 = P$; dann folgt

1) Violle, Lehrb. Deutsche Ausgabe. II. S. 869.

$$V = v_1 + v_2 + v_3$$

der Satz: das Volumen der Mischung ist der Summe der Volumen der einzelnen Mischungsbestandtheile gleich.

Die angegebenen Gesetze der Gasmischungen gelten nur unter denselben Bedingungen wie das Boyle'sche Gesetz. —

Gase können auch von flüssigen und festen Körpern aufgenommen, absorbiert werden. Die Aufnahme in einer Flüssigkeit wird auch Auflösung genannt. Dieselbe geht nach folgendem Gesetz vor sich, das von Henry (1802) herrührt:

In der Lösung eines Gases, welche sich bei einer gegebenen Temperatur im Gleichgewichte befindet, besteht ein constantes Verhältnis zwischen dem Drucke des gelösten und dem des äusseren Gases. Dieses constante Verhältnis heisst der Absorptionscoefficient des Gases für die betreffende Flüssigkeit.

Ein Gesetz für die Berechnung dieses Coefficienten β ergibt sich aus dem Gasspannungsgesetze, beziehungsweise aus dem Gesetze der Gasmischungen. Henry und Bunsen bestimmten das Volumen v und den Druck p eines Gases, gaben dann in den Gasraum die Flüssigkeit und förderten durch Schütteln die Auflösung des Gases. Der Gasdruck des ungelösten Gases ist dann nach Henry's Versuch unverändert gleich p, das Volumen v_1, der Druck des gelösten Gases βp und das Volumen v_2. Nach dem Gasmischungsgesetz ist

$$p \cdot v = p \cdot v_1 + \beta \cdot p \cdot v_2$$

und daraus

$$\beta = \frac{v - v_1}{v_2}.$$

Diesem Ausdrucke entsprechend wird der Absorptionscoefficient auch als das constante Verhältnis zwischen dem Volumen des gelösten Gases und dem Volumen der absorbierenden Flüssigkeit erklärt. Derselbe hängt ab von der Natur der Flüssigkeit, der Natur des Gases und von der Temperatur.

Die Absorptionscoefficienten einiger Gase in Wasser bei verschiedenen Temperaturen (nach Bunsen 1857) sind:

	Wasserstoff	Stickstoff	Sauerstoff	Kohlensäure	Ammoniak
0° C.	0·0193	0·0204	0·0411	1·7967	1050
10° C.	0·0193	0·0161	0·0325	1·1847	813
20° C.	0·0193	0·0140	0·0284	0·9014	654

Absorbierte Gase sind enthalten in Mineralwässern, Säuerlingen, moussierenden Getränken; bei Verminderung des äusseren Druckes oder bei Erwärmung entweicht ein Theil der absorbierten Kohlensäure und veranlasst das Schäumen. Beim Döbereiner'schen Feuerzeug wird durch die Arbeit der Volumverminderung des vom Platinschwamm

absorbierten Wasserstoffes so viel Wärme erzeugt, dass sich der Wasserstoff entzündet. Hygroskopische Stoffe (Haare, Fischbein, Salze etc.) absorbieren den Wasserdampf der Luft; manche Salze und Steine thun dies bei feuchtem Wetter in solchem Masse, dass sich der Wasserdampf condensiert und die Salze gelöst werden. Bei Grahams Versuchen absorbierte Palladium das 1000fache Volumen Wasserstoff; dabei wird dieses Gas wahrscheinlich flüssig, ja sogar fest; denn auch im Vacuum entweicht es nicht. In diesem Zustande besitzt der Wasserstoff das specifische Gewicht 0·8, welches ebenfalls auf den festen Zustand hindeutet. Graham nennt diesen Wasserstoff Hydrogenium. Um solchen zu erzeugen, sollen nach Böttger (1874) auch Kobalt, Nickel und Zinn geeignet sein.

V. Wärme.

§ 70. **Wärmeerscheinungen.** Wenn wir zur Winterszeit im Freien mit Eis, Wasser, Steinen, Luft u. a. Körpern in Berührung kommen, so erscheinen uns alle diese Gegenstände kalt; im Sommer erscheinen uns das Flusswasser, der Regen, die Luft kühl oder auch lau, und Steine, welche die Sonne beschien, und Wasser, das am Feuer stand, rufen in uns Gefühle hervor, die wir als warm, beziehungsweise als heiss bezeichnen. Wir nennen die angegebenen Empfindungen „Wärmeempfindungen" und die Ursache derselben „Wärme". Dabei nehmen wir an, dass jeder Körper eine bestimmte Wärmemenge besitzt, die um so grösser ist, je wärmer uns der Körper erscheint.

Es war zu allen Zeiten bekannt, dass die Wärme auf alle Körper eine mächtige Wirkung ausübt: Durch Berührung mit Feuer wird jeder Körper heiss, die Strahlen der Sonne erwärmen die Körper, sie schmelzen auch den Schnee; erhitztes Wasser verdampft und durch Abkühlung wird der Dampf wieder in Wasser verwandelt. Die bekannten Wärmewirkungen wurden auch seit den ältesten Zeiten in Anwendung gebracht, so z. B. zur Bereitung der Speisen, zum Formen von Waffen, Werkzeugen und Gefässen; um sich vor Hitze und Kälte zu schützen, benützte man schlechte Wärmeleiter wie Holz und Stroh für den Bau der Hütten und Pelze für Kleider; da Metalle gute Wärmeleiter sind, indem sie sich im Feuer rasch erhitzen, so wurden an Feuerwerkzeugen zum Schutze der Hände Handgriffe aus Holz verfertigt. Ebenso wurde die Wärmestrahlung der Sonne benützt zum Trocknen der Kleider und des Getreides, zum Reifen der Früchte u. s. w. Es sind also die Erscheinungen der Erwärmung durch Leitung und Strahlung und die Änderung des Aggregatzustandes längst allgemein bekannt.

Ein genauer Einblick in die Erscheinungen der Wärme und eine solche Verwendung, wie sie diese Kraft heute in der Technik findet, war aber solange nicht möglich, als die Wärmezustände der Körper nach der menschlichen Empfindung beurtheilt wurden; denn diese ist ein ganz unverlässlicher Massstab: Im Winter erscheint uns die Luft im Vorhause kalt, wenn wir aus dem warmen Zimmer kommen, dagegen warm, wenn wir vorher einen Schneesturm empfunden haben;

ein Stück Eisen erscheint uns kälter als ein ebenso kaltes Stück Holz. Unser Urtheil über den Wärmezustand eines Körpers hängt nicht bloss von dem Körper, sondern vielmehr davon ab, ob uns derselbe mehr oder weniger Wärme entzieht oder zuführt. Eine sichere Bestimmung des Wärmezustandes muss unabhängig von unserer Empfindung erfolgen; ein Mittel hierzu bietet die Ausdehnung der Körper durch die Wärme.

§ 71 α. **Ausdehnung. Temperatur.** a) Die Ausdehnung der Körper durch die Wärme war bereits Heron von Alexandria (um 100 v. Chr.) bekannt. Den ersten messenden Versuch über die Ausdehnung zum Zwecke der Bestimmung des Wärmezustandes machte der Araber Alkhazini (1120) mit seiner „Wage der Weisheit“, indem er das specifische Gewicht des Wassers im Winter und im Sommer bestimmte; er fand, dass das Wasser durch die Wärme specifisch leichter, also ausgedehnt werde, und sah auch seine Messung als eine genaue Bestimmung des Wärmezustandes des Wassers an[1]). Verwendbarer war das Thermoskop von Galilei (1597). Dasselbe bestand aus einer Glasröhre, an welcher eine Kugel angeblasen war; die Luft in dem Gefässe war durch einen verschiebbaren Wassertropfen abgesperrt. Wird ein solches Thermoskop mit einem anderen Körper in Berührung gebracht, so dehnt sich die Luft aus oder zieht sich zusammen, jenachdem sie Wärme aufnimmt oder abgibt. Nach einiger Zeit wird das Volumen constant, der Wärmezustand wird nicht mehr geändert; es wird also angenommen, dass das Thermoskop und der dasselbe berührende Körper gleiche Wärmezustände besitzen. Das Instrument kann nur dazu dienen, die Änderungen des Wärmezustandes zu erkennen; zu einer genauen Messung ist es nicht geeignet, weil auch Luftdruckdifferenzen mitwirken, die sich von der Wärmewirkung nicht unterscheiden lassen.

Die Florentiner Akademie construierte (1657 und 1667) Thermometer in der Form von Glasröhren, die luftleer gepumpt, theilweise mit Weingeist gefüllt, vollständig geschlossen und mit einer Eintheilung versehen waren. Die Fixpunkte waren aber unzuverlässig; man benützte zu deren Bestimmung die grösste Winterkälte und die grösste Sonnenhitze in Florenz. Der Abstand beider Punkte war in 12 Theile oder Grade getheilt.

Newton verwendete als thermometrische Substanz Leinöl und als Fixpunkte den Stand der Flüssigkeit, wenn das Thermometer von schmelzendem Eise umgeben war, und den Stand, wenn die Thermometerkugel im Munde oder unter dem Arm eines gesunden Menschen gehalten wurde; der erstere Punkt wurde mit „0“ bezeichnet, der Abstand beider Punkte in 12 Theile oder Grade getheilt und die Ein-

1) Siehe Rosenberger's Geschichte d. Phys.

theilung nach oben und unten fortgesetzt[1]). Die Anzahl der Grade, welche alsdann das Thermometer bei Berührung mit einem anderen Körper angibt, heisst die Temperatur dieses Körpers. Dieselbe gibt also den bestimmten Grad eines Wärmezustandes, gemessen durch das Volumen der thermometrischen Substanz in einem eigenen Masse, an.

Newtons Fortschritt wurde aber nicht allgemein beachtet. Erst durch Fahrenheit (1724) wurde das richtige Constructionsprincip zur Geltung gebracht. Dieser verfertigte erst Weingeistthermometer und dann auch, angeregt durch Amontons Untersuchungen über die Ausdehnung des Quecksilbers, Quecksilberthermometer. Als Nullpunkt wählte er die Temperatur der grössten Kälte im strengen Winter 1709, benützte ferner eine Mischung von Wasser und Eis, bestimmte den Eispunkt und bezeichnete denselben als 32. Temperaturgrad. Nach dieser Eintheilung siedet das Wasser bei 212°.

Der Abstand vom Eis- bis zum Siedepunkte wird als Fundamentalabstand betrachtet; Réaumur bezeichnete (1730) den Eispunkt mit 0° und den Siedepunkt mit 80°; Celsius führte (1742) die hunderttheilige Scala ein, indem er den Eispunkt mit 0° und den Siedepunkt mit 100° bezeichnete.

Gegenüber dem Quecksilberthermometer hoben Dulong und Petit (1812) die Vorzüge des Luftthermometers hervor und Regnault stellte dieselben (1847) für präcise wissenschaftliche Messungen vollends klar. Für Temperaturen zwischen dem Eis- und Siedepunkte sind die Angaben des Quecksilber- und Luftthermometers nur sehr wenig voneinander verschieden, aber das Geltungsgebiet des letzteren ist ein viel grösseres als das des ersteren.

b) Mit Hilfe des Thermometers, das die Temperatur der Körper zu messen gestattet, vermag man nun auch die Ausdehnung der Körper genau zu untersuchen. Lavoisier und Laplace (1778) bestimmten die Verlängerung eines festen Körpers in Stabform mittelst des Fühlhebels, dessen Drehung leicht abgelesen und zur Berechnung der Verlängerung benützt werden konnte. Matthiessen benützte den Auftrieb im Wasser, um die Volumsänderung erwärmter Metalle und Legierungen zu bestimmen, und den Auftrieb, den geschliffene Glasstücke in mehr oder minder erwärmten Flüssigkeiten erfahren, um die Ausdehnung der Flüssigkeiten zu ermitteln.

Gay-Lussac verwendete das sogenannte Gewichtsthermometer zur Erforschung der Ausdehnung der Flüssigkeiten; er bestimmte das Gewicht der Flüssigkeit in einem Glasgefässe, erwärmte sodann, entfernte die Flüssigkeit, die sich über den früheren Stand erhob und wog wieder ab. Aus den Gewichten der kalten und erwärmten Flüs-

1) E. Warburg, Experimental-Phys. S. 192.

sigkeit konnte die Ausdehnung berechnet werden. Die Methode ist ungenau, wegen des Einflusses der gleichzeitigen Volumsveränderung des Gefässes.

Dulong und Petit (1816) benützten für Flüssigkeiten das Princip der communicierenden Gefässe. —

Zur Bestimmung der Ausdehnung der Gase gebrauchte Gay-Lussac ein Dilatometer, eine Röhre mit angeblasener Kugel, in der sich trockene Luft befand, die durch einen Quecksilbertropfen in der Röhre abgesperrt war. Die Röhre war eingetheilt, das Verhältnis der einzelnen Scalentheile zum Volumen der Kugel war bestimmt. Die Kugel wurde neben einem Thermometer ins Wasser getaucht und das Wasser erwärmt; aus der Stellung des Quecksilbertropfens ergab sich die Ausdehnung der Luft. Verbesserungen dieses Verfahrens wurden von Magnus, Regnault u. a. angegeben.

Um eine Beziehung zwischen der Temperatur- und Volumsänderung aufzustellen, benützt man den Begriff des Ausdehnungscoefficienten. Der lineare Ausdehnungscoefficient ist die Verlängerung der Längeneinheit eines Stabes bei der Temperaturerhöhung um 1^0; wird derselbe mit α bezeichnet, so ist die ganze Verlängerung eines Stabes von der Länge l gleich $\alpha \cdot l$. Wird die Temperatur um t^0 erhöht und bleibt α constant, so ist die Verlängerung $l \cdot \alpha \cdot t$, also die Länge des Stabes nach der Erwärmung um t^0

$$l_t = l + l \cdot \alpha \cdot t = l(1 + \alpha \cdot t).$$

Die angegebenen Versuchsmethoden gestatten, l_t, l und t zu messen und darnach α zu berechnen. Die Resultate zeigen, dass, wenn l auf den Eispunkt bezogen wird, die Metalle zwischen dem Eis- und Siedepunkt einen constanten Ausdehnungscoefficienten α besitzen, dass sie sich also regelmässig ausdehnen.

Einige lineare Ausdehnungscoefficienten in Millionteln der Länge sind: Quecksilber 61, Silber 20, Kupfer 17, Gold 15, Eisen 12, Stahl 11, Platin 9, Glas 8, Holz 3. — Quecksilber dehnt sich zwischen -20^0 und 200^0 C. ziemlich gleichmässig aus.

Der cubische Ausdehnungscoefficient gibt die Vergrösserung der Volumseinheit bei der Erwärmung um einen Temperaturgrad an. Er steht mit dem linearen Ausdehnungscoefficienten in einer einfachen Beziehung, die gewonnen werden kann, wenn man z. B. die Volumsvergrösserung eines Würfels aus den Kantenlängen l_0 bei der Temperatur von 0^0 C. für den Fall einer Temperaturerhöhung um t^0 berechnet; man erhält so

$$v_t = [l_0(1 + \alpha t)]^3 = v_0(1 + 3\alpha t).$$

Bei Vernachlässigung höherer Potenzen von α ist daher der cubische Ausdehnungscoefficient das Dreifache des linearen. Einige cubische Ausdehnungscoefficienten sind in Millionteln: für Äther ca. 1500,

Weingeist 1000, Olivenöl 800, Schwefelsäure 600, Wasser 500, Quecksilber 180. Mit Ausnahme des Quecksilbers dehnen sich die Flüssigkeiten unregelmässiger aus als die Metalle; ihre Ausdehnung ist bei höherer Temperatur grösser.

Ein ganz abweichendes Verhalten zeigt das Wasser zwischen 0° und 4° C., indem es sich hier bei der Erwärmung zusammenzieht und bei der Abkühlung ausdehnt. Ist sein Volumen bei 0° = 1, so ist dasselbe nach Kopp bei 4° = 0·999875, bei 10° = 1·000124, bei 20° = 1·001567 und bei 100° = 1·042986, woraus die unregelmässige Volumsänderung zu entnehmen ist [1]). Während des Erstarrens dehnt sich das Wasser noch weiter aus. Boyle hat diese Erscheinung bereits gekannt; er erwies sie durch Sprengen von Flintenläufen. Das abweichende Verhalten des Wassers in Bezug auf die Volumsänderung zwischen 0° und 4° C. ist im Haushalte der Natur von grosser Bedeutung. (Eisbildung an der Oberfläche, das Sprengen der Felsen beim Gefrieren u. s. w.)

Der Ausdehnungscoefficient der verschiedenen Gase, die entsprechend weit von ihren Condensationspunkten entfernt sind, ist nach Untersuchungen von Charles (1787), Dalton (1801), Gay-Lussac (1802) und nach genaueren Arbeiten von Regnault, Rudberg, Magnus und Jolly sehr nahe gleich 1/273 oder 0·00367, bezogen auf das Volumen bei 0° C.

c) Das Charles-Boyle'sche Gesetz, auch das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz genannt. Die Gesetze der Zusammendrückung und der Ausdehnung der Gase lassen sich zu einem einzigen Gesetze verbinden. Wir gelangen zu dem mathematischen Ausdrucke dafür, wenn wir die einzelnen Gesetze für folgende Zustandsänderungen eines Gases anwenden: Es werde die Luft, deren Volumen v_0 sei, von 0° auf t^0 C. erwärmt und dann zusammengedrückt, so dass der Druck von p_0 auf p erhöht und das Volumen auf v gebracht werden. Für die Erwärmung gilt die Gleichung

$$v_t = v_0(1 + \alpha t)$$

und für die Zusammendrückung nach Boyle

$$v_t \cdot p_0 = v \cdot p.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$p \cdot v = p_0 \cdot v_0(1 + \alpha t),$$

das vereinigte Charles-Boyle'sche Gesetz.

Aus dem Gesetze ergibt sich ohne weiteres der „Spannungscoefficent" der Gase. Bleibt nämlich das Gasvolumen ungeändert,

1) Reis, Lehrb. 8. Aufl. S. 509; Fliedner, Aufg., Anhang 16.

ist also $v = v_0$, und wird die Temperatur von 0^0 auf t^0 erhöht, so wird

$$p = p_0(1 + \alpha t).$$

Hierin hat α die Bedeutung des Spannungscoefficienten; der Wert desselben ist gleich dem des Ausdehnungscoefficienten.

Vielfache Anwendung findet das Charles-Boyle'sche Gesetz zur Reduction der Gasvolumen auf 0^0 C. und den Normaldruck von 760 mm Barometerstand, ferner zur Berechnung von Gasgewichten.

Aufg. 1. Wie viel Meter beträgt der Längenunterschied einer bei 0^0 C. $a = 19$ Meilen (zu 7500 m) langen Schienenstrecke zwischen -17^0 und $+31^0$ C.? Der Ausdehnungscoefficient des Eisens $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ Wie viel Spielraum muss zwischen den einzelnen Schienen gelassen werden, wenn auf jede Meile $b = 1600$ Zwischenräume kommen? — ($d = a \cdot 7500 \cdot 48\alpha = 82{\cdot}08$ m; $x = d/ab = 2{\cdot}7$ mm). **2.** Eine Silberstange hat bei 0^0 C. eine Länge von $l_0 = 1000$ mm und bei $t_1 = 100^0$ C. von $l_1 = 1002$ mm, ist aber bei der Rothglühhitze $l_2 = 1011{\cdot}6$ mm lang. Wie gross ist die Temperatur des rothglühenden Silbers? — (580^0.) **3.** Zwei um $l = 10$ m von einander entfernte Wände sind um $d = 0{\cdot}06$ m auseinander gewichen; man will sie durch Zusammenziehung eines heissen Eisenankers wieder zurückführen. Auf welche Temperatur muss die Eisenstange vor der Verankerung erhitzt werden? $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$. — ($500^0$.) **4.** Ein eisernes Pendel von $l = 994$ mm Länge schwingt bei $t = 77^0$ *F* Secunden. Wieviel wird die durch das Pendel regulierte Uhr in 24 Stunden gewinnen, wenn die Temperatur auf $t_1 = -12^0$ R. sinkt? Für 1^0 C. ist $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$. — ($20{\cdot}736$ Sec.) **5.** Es ist in der Gestalt eines Rostes ein Secunden-Compensationspendel aus Messing und Stahl anzufertigen. Wieviel Centimeter von jedem der beiden Metalle hat der Mechaniker zu nehmen, wenn von 0^0 bis 100^0 Stahl um $\alpha = 1/800$ und Messing um $\beta = 1/500$ seiner Länge sich ausdehnt? (Ist die Länge des Messingstabes, auf einer Hälfte des Rostes gemessen, M und jene des Stahles S, so ist $S - M = a/\pi^2$ und $S\alpha = M\beta$, wonach $S = 265{\cdot}056$ cm und $M = 165{\cdot}66$ cm.) **6.** Bei einer Temperatur $t = 12^0$ C. und einem Barometerstande $b = 730$ mm ist ein Volumen atmosphärischer Luft $V = 7{\cdot}5$ cm^3. Wie gross ist das auf 0^0 C. und $b' = 760$ mm reducierte Volumen? Wieviel wiegt dasselbe, wenn 773 cm^3 unter dem Drucke $b' = 760$ mm und bei 0^0 C. 1 g wiegen? — ($V' = 6{\cdot}9007$ cm^3; $f = 0{\cdot}00893$ g.) **7.** Wie viel Milligramm wiegt ein Liter Luft bei einem Barometerstande $b = 608$ mm und einer Temperatur $t = 30^0$ C., wenn das spec. Gewicht der Luft bei 760 mm Barometerstand und 0^0 C. $f = 0{\cdot}0012936$ ist? — ($932{\cdot}42$ mg.) **8.** Ein Luftpyrometer aus Platin habe bei 0^0 C. das Volumen $V = 20$ cm^3; dasselbe nehme nach der Erhitzung und dem darauf folgenden Abkühlen in eiskaltem Wasser $V_1 = 16$ cm^3 Wasser auf. Wie hoch war die Temperatur, wenn der lineare Ausdehnungscoefficient $\alpha = 88 \cdot 10^{-7}$, der cubische A.-C. der Luft $\beta = 0{\cdot}003665$ beträgt? — (Aus $(V - V_1)(1 + \beta t) = V(1 + \alpha t)$ folgt $t = 1132^0$.) **9.** Es soll der bei $t = 20^0$ C. beobachtete Barometerstand $b = 764{\cdot}4$ mm auf 0^0 C. reduciert werden. Dabei soll berücksichtigt

werden, dass die Messingscala für 0^0 C. richtig ist. Der lineare A.-C. des Messings sei $\alpha = 192 \cdot 10^{-7}$, der cubische A.-C. des Quecksilbers $\beta = 18153 \cdot 10^{-8}$. —

($b_0 = b(1 + \alpha t)/(1 + \beta t) = b[1 - (\beta - \alpha)t] = 761{\cdot}92$ mm.)

10. Um die Ausdehnung des Wassers zu finden, hat man ein Glasrohr mit fein ausgezogener Spitze mit Wasser gefüllt und das Gewicht dieser Wassermenge bei 0^0 C. zu $q = 157$ g gefunden. Durch Erwärmen bis zu $t = 100^0$ C. waren $d = 6$ g ausgetreten. Wie gross ist die Ausdehnung des Wassers von 0^0 bis 100^0 C.? Der lineare A.-C. des Glases ist $\alpha = 86 \cdot 10^{-7}$. — (Aus $(q-d)(1+x)/(1+3\alpha t) = q$ folgt $x = 0{\cdot}0424$.)

11. Man hat den Gewichtsverlust eines festen Körpers, welchen man in eine Flüssigkeit von 0^0 C. brachte, $q = 50$ g gefunden; der Gewichtsverlust desselben Körpers in derselben Flüssigkeit betrug bei $t = 20^0$ $q' = 49{\cdot}26$ g. Der cubische A.-C. des festen Körpers ist $\alpha = 0{\cdot}00008$. Wie gross ist der cubische Ausdehnungscoefficient der Flüssigkeit? — (0·000832.) [Budde.]

§ 71β. **Wärmemessung. Calorie.** Schon die einfachste Überlegung zeigt, dass die Temperatur nicht die Wärmemenge eines Körpers unmittelbar angeben kann; denn es ist ohneweiters klar, dass zwei Körper von gleichem Stoffe, z. B. 1 kg und 100 kg Wasser, zu einer Temperaturerhöhung um 10^0 unmöglich auch gleiche Wärmemengen erfordern — die Wärme mag irgend etwas noch ganz Unbestimmtes sein. 10 kg des schwereren Körpers enthalten offenbar schon so viel Wärme als der ganze erstere, 10 kg schwere Körper, wenn beide Körper gleiche Temperatur besitzen; und zur Erwärmung braucht der schwerere Körper mehr Wärme als der leichtere.

Black (1760) und Wilcke (1762) haben die Mischungsmethode angewandt, um die Wärmemenge zu messen[1]). Nach derselben mischt man z. B. 1 kg Wasser von 10^0 C. mit 1 kg Wasser von 30^0 C. und erhält, wie das Thermometer zeigt, eine Mischung von 20^0 C. Das erstere Wasser gewinnt, das letztere verliert 10^0 C. Mischt man 3 kg Wasser von 10^0 C. und 1 kg Wasser von 30^0 C., so erhält man eine Mischung von 15^0 C. Dabei wird die Temperatur der 3 kg Wasser um 5^0 C. erhöht und jene von 1 kg Wasser um 15^0 C. erniedrigt. Bei dem Versuche kommt daher jedes Kilogramm Wasser zur Geltung. Man wählt nun jene Wärmemenge als Wärmeeinheit oder Calorie, welche 1 kg Wasser um 1^0 C. zu erwärmen vermag, oder die 1 kg Wasser bei der Abkühlung um 1^0 C. abgibt. Der angedeutete Versuch ergibt, dass das eine Wasser $3 \times 5 = 15$ Cal. Wärme aufgenommen und das andere Wasser $1 \times 15 = 15$ Cal. Wärme abgegeben hat. Die Wärmeeinheit, welche sich auf 1 kg Wasser bezieht, heisst auch kg-Cal. zum Unterschiede von der g-Cal., die auf 1 g bezogen wird. Bei sehr genauen Mes-

1) E. Mach, Grundriss d. Naturlehre. S. 162.

sungen benützt man als Wärmeeinheit jene Wärmemenge, welche 1 kg Wasser von 0° auf 1° C. erwärmt, oder nach Bunsen die mittlere Calorie, d. i. den 100. Theil der Wärme, welche 1 kg Wasser von 0° auf 100° C. zu erwärmen imstande ist.

Etwas anders wie bei gleichen Stoffen gestalten sich die Mischungsresultate bei Anwendung verschiedener Stoffe. Werden 1 kg Wasser von 31° C. und 1 kg Eisenfeilspäne von 20° C. zusammengemischt, so zeigt schliesslich die Mischung 30° C.; das Wasser hat eine Wärmeeinheit den Eisenfeilspänen abgegeben, und diese wurden um 10° C. erwärmt. 1 kg Eisen braucht daher nur ungefähr 0·1 Cal. zur Temperaturerhöhung um 1° C. Die Wärmemenge, die erforderlich ist, um die Temperatur von 1 kg irgend eines Stoffes um 1° C. zu erhöhen, heisst die specifische Wärme dieses Stoffes.

Bestimmungen der specifischen Wärme nach der angegebenen Mischungsmethode haben bereits Black und Wilcke ausgeführt. Darnach lässt sich die specifische Wärme C eines Körpers folgendermassen ermitteln: Ist das Körpergewicht Q, dessen Temperatur T, ferner das Wassergewicht im Calorimeter q, die Temperatur des Wassers anfangs t und nach dem Temperaturausgleiche beider Stoffe T', so ist die von dem Körper abgegebene und vom Wasser aufgenommene Wärme

$$C \cdot Q(T - T') = q(T' - t)$$

und daraus die spec. Wärme

$$C = \frac{q \cdot (T' - t)}{Q \cdot (T - T')}.$$

Lavoisier und Laplace (1780) benützten zur Messung der Wärmemenge die Eisschmelzmethode. Dabei wird als Wärmeeinheit jene Wärme angenommen, welche 1 kg Eis von 0° C. in 1 kg Wasser von 0° C. zu verwandeln imstande ist; die Anzahl der geschmolzenen Kilogramme Eis gibt auch die Zahl der Wärmeeinheiten an. Eine Reduction dieser Wärmemenge auf Calorien wird leicht durch Multiplication mit 80 durchgeführt, indem 80 Cal. Wärme zum Schmelzen von 1 kg Eis erforderlich sind.

Die specifischen Wärmen für einige Körper zwischen 0° und 100° C. nach Dulong, Petit und Regnault sind: Eisen 0·1098, Kupfer 0·0949, Quecksilber 0·0330, Alkohol 0·602, Äther 0·521, Schwefelkohlenstoff 0·218.

Dulong und Petit (1818) bemerkten, dass das Product aus der specifischen Wärme und dem Atomgewichte für alle festen Grundstoffe (mit Ausnahme des Kohlenstoffs) ungefähr eine und dieselbe Zahl, im Durchschnitt 6·4 ist.

Um die specifische Wärme der Gase zu bestimmen, wird nach Delaroche und Berard (1813) eine Gasmasse vom Gewichte q in

jeder Minute durch ein Schlangenrohr eines Ölbades geleitet, in welchem das Gas auf die Temperatur t^0 gebracht wird, sodann durch ein Schlangenrohr eines Kühlgefässes, in welchem es auf t'^0 abgekühlt wird. Wurde das Kühlwasser vom Gewichte Q um τ^0 erwärmt, so ist die vom Gase abgegebene Wärme

$$q \cdot C(t - t') = Q \cdot \tau$$

und die spec. Wärme

$$C = \frac{Q \cdot \tau}{q(t - t')}.$$

Regnault fand mittelst sehr sorgfältiger Versuche für Luft 0·23741, für Sauerstoff 0·21751, für Wasserstoff 3·4090 und für Stickstoff 0·2438.

Von der so gefundenen specifischen Wärme c_p bei constantem Drucke unterscheidet sich die specifische Wärme c_v bei constantem Volumen. Um das Verhältnis beider specifischen Wärmen zu finden, erwärmt man z. B. 1 kg Luft um t^0 bei einem bestimmten äusseren Drucke; die zugeführte Wärme ist $c_p \cdot t$. Bei der Temperaturerhöhung hat das Gasvolumen um $\alpha v t$ zugenommen. Bringt man nun rasch durch erhöhten Druck die Luft auf ihr ursprüngliches Volumen, so erwärmt sie sich noch um τ^0; der Wärmegewinn hierbei ist $c_v \cdot \tau$. Dieselbe Wärme, die beim Zusammendrücken des Gases gewonnen wurde, wurde bei der früheren Ausdehnung verbraucht, und es folgt, dass die Wärme $c_p . t$ das Gas um die Temperatur $(t + \tau)$ zu erwärmen vermöchte, wenn keine Ausdehnung stattfände; daher ist $c_p . t = c_v(t + \tau)$. Die Temperaturerhöhung τ wurde von Clément und Desormes (1819) mittelst eigener Apparate nach genauer Bestimmung der wirkenden Drücke aus der Gleichung $p = p_0(1 + \alpha t)$ berechnet. Für das Verhältnis der beiden specifischen Wärmen fanden die genannten Forscher

$$\frac{c_p}{c_v} = 1{\cdot}357.$$

Neuere Rechnungen ergaben 1·410.

Aufg. 1. $q = 80$ g Quecksilber von $t = 98^0$ C. wurden in $q_1 = 112$ g Wasser von $t_1 = 10^0$ C. gegossen. Nach Ausgleichung der Temperatur ergab sich dieselbe zu $T = 12^0$ C. Wie gross ist hiernach die spec. Wärme des Quecksilbers? (0·032558.) **2.** Welche Temperatur erhält man, wenn man $q = 10$ kg Quecksilber von $t = 22{\cdot}5^0$ mit $q_1 = 8$ kg Wasser von $t_1 = 100^0$ C. mischt? Spec. Wärme des Hg ist 0·033. — (96·93^0 C.) **3.** Man mischt $q = 325$ g Schwefelkohlenstoff von $t = 18^0$ C. mit $q_1 = 400$ g Wasser von $t_1 = 20^0$ C. und erhält eine Mischungstemperatur von $T = 19{\cdot}7^0$ C. Wie gross ist die spec. Wärme des Schwefelkohlenstoffes? (0·217.) **4.** Eine glühende Platinkugel, die $q = 208{\cdot}5$ g wiegt, wird in $q_1 = 1897$ g Wasser geworfen, das $t_1 = 10{\cdot}5^0$ C. warm ist. Die spec. Wärme des Platins ist $c = 0{\cdot}0398$. Wie hoch ist die

Temperatur der Platinkugel, wenn das Wasser auf $T = 16^0$ C. erwärmt wird? (1273⁰.) **5.** In einem Eiskalorimeter werden $q = 0{\cdot}35$ kg Eis von $q_1 = 3$ kg Kupfer, dessen Temperatur $t = 95^0$ C. ist, geschmolzen. Wie gross ist die spec. Wärme des Kupfers? (0·098248.) **6.** Welche Wärmemenge ist erforderlich, um die Luft in einem Zimmer, welches $l = 5$ m lang, $b = 4$ m breit und $h = 4$ m hoch ist, von 0^0 auf 17^0 C. zu erwärmen, wenn die Luft 773 mal leichter als Wasser und ihre spec. Wärme $c = 0{\cdot}2375$ ist? (417·85 Cal.) [Budde.]

§ 72. **Hypothesen über das Wesen der Wärme.** a) Aristoteles sah die Wärme als eine elementare Qualität an, die vor allem dem Feuer, aber mit diesem auch allen Körpern eigen sei, und Demokrit nahm an, dass sie in der Bewegung der Körperatome ihren Grund habe. Beide Ansichten in mehr oder minder veränderter Form fanden zu allen Zeiten ihre Anhänger. Auch seitdem die Theorien auf genaue Beobachtungen gestützt werden, war zeitweise die eine, dann wieder die andere Ansicht vorherrschend. Im 18. Jahrhundert, als Black und Wilcke die Versuche über die specifische Wärme und über die Schmelz- und Verdampfungswärme angestellt hatten, als man erkannte, dass die aus einem Körper austretende Wärmemenge vollständig in einen anderen übergeht, und dass sie in diesem „frei“ oder „gebunden (latent)“ bis zum Wiederaustritt verbleibt, gewann die Stofftheorie das Übergewicht. Dem angenommenen Wärmestoffe wurden alle der Wärme zukommenden Eigenschaften, namentlich Ausdehnsamkeit, zugeschrieben.

Schon vorher hatten Boyle und Baco die Wärme als eine ausdehnende Bewegung der Körperatome und Newton als Schwingungen des zwischen den Körperatomen vorhandenen Äthers erklärt. Diese Bewegungshypothesen vermochten damals nicht mehr zu leisten als die Stofftheorie. Auch die bei der Reibung und Pressung der Körper entwickelte Wärme wurde von der letzteren aus einer entsprechenden Vertheilung des Wärmestoffes in den verschiedenen Körpern erklärt; es sollte durch Ausquetschen Wärmestoff von einem Körper zum anderen übergeführt werden. — Erst die folgenden Versuche unterstützten wesentlich die mechanische Theorie.

Rumford (1798) liess in der Kanonenbohranstalt zu München einen stumpfen Bohrer mit einem Drucke von 10000 Pfund auf den Boden einer fertigen Kanone drücken und dann durch Pferde ungefähr 32mal in der Minute um seine Achse drehen. Die Kanone stand in einem Holzkasten, welcher 26·6 Pfund Wasser enthielt. Nach $2\frac{1}{2}$ Stunden war das Wasser bis zum Siedepunkt erhitzt. Der Versuch zeigte deutlich, dass keine Wärme von einem Körper zum anderen übergegangen sei. Rumford zog den Schluss, dass die Bewegung des Bohrers den Metalltheilchen mitgetheilt worden sei und so die Erscheinung der Wärme hervorbrächte. Er schätzte auch die

geleistete Arbeit, welche der Entwickelung einer Wärmeeinheit entspricht.

Davy (1799) zeigte, dass bei der Reibung beide geriebenen Körper Wärme gewinnen; er brachte nämlich unter der Glocke einer Luftpumpe, die durch eine Kältemischung unter 0⁰ C abgekühlt war, durch Reibung zwei Eisstücke zum Schmelzen.

Von grosser Wichtigkeit waren die Versuche Mellonis (1835), durch welche er die Theorie der strahlenden Wärme begründete. Melloni wies nach, dass die Wärmestrahlen sich ebenso fortpflanzen, ebenso reflectiert, gebrochen und absorbiert werden wie die Lichtstrahlen, und folgerte, dass Licht- und Wärmestrahlen ihrem Wesen nach einerlei seien. Zur Zeit Mellonis war die Wellentheorie des Lichtes von Huygens bereits allgemein anerkannt, und daher musste angenommen werden, dass auch der Wärmezustand ein Bewegungszustand sei. Die Anschauung fand in dem immer allgemeiner werdenden Gebrauche der Dampfmaschine eine wesentliche Unterstützung, indem bei derselben die Verwandlung von Wärme in mechanische Arbeit deutlich zutage tritt.

Eine entscheidende Wendung in den Ansichten über die Natur der Wärme trat aber erst mit der Anerkennung des Principes der Erhaltung der Energie ein, das zuerst der deutsche Arzt Robert Mayer (1842) allgemein aussprach und dessen Geltung für die Wärmelehre damit begründete, dass er durch einen Compressionsversuch mit der Luft die Umwandlung jeder Arbeitseinheit in eine äquivalente Wärmemenge ziffermässig nachwies[1]); der Versuch soll im folgenden Paragraphen dazu verwendet werden, um das mechanische Äquivalent der Wärmeeinheit zu berechnen.

Nach Mayer haben Joule, Hirn u. a. genauere Bestimmungen des mechanischen Wärmeäquivalentes vorgenommen. Im Jahre 1843 fand Joule, dass beim Durchgang des Wassers durch enge Röhren Wärme erzeugt wird; später liess er in einer Wassermasse ein Schaufelrad durch ein fallendes Gewicht in Bewegung versetzen und ermittelte das Verhältnis der geleisteten Arbeit zur erzeugten Wärme. Hirn bestimmte das mechanische Wärmeäquivalent, indem er Bleimassen, die sich zwischen einem aufgehängten grossen Eisenblock und einem Steinblocke befanden, durch den stossenden Eisenblock deformierte und erwärmte und alsdann das Verhältnis der aufgewandten Arbeit zur entwickelten Wärme berechnete.

Diese Nachweise, dass eine geleistete Arbeit nicht verloren geht, sondern in eine gleichwertige Wärmemenge verwandelt wird, die wieder in Arbeit zurückverwandelt werden kann, brachte die Anschauung, dass die Wärme in einem Bewegungszustand begründet

1) R. Mayer, Die Mechanik der Wärme. Herausgegeben von Weyrauch.

sei, zur allgemeinen Geltung; die auf dieser Grundanschauung entwickelte Theorie heisst die mechanische Wärmetheorie. Um nach derselben die Wärmeerscheinungen zu behandeln, ist es nicht nothwendig, eine bestimmte Art der Bewegung als Wärme anzunehmen; es lassen sich vielmehr viele quantitative Beziehungen der Wärmegrössen unmittelbar aus dem Principe der Erhaltung der Energie aufstellen. Ja es kann vom Standpunkte dieses Principes sogar dahin gestellt bleiben, ob die Wärme überhaupt ein Bewegungszustand sei; R. Mayer war der Ansicht, dass die Wärme aufhören müsse, Bewegung zu sein, um Wärme werden zu können, und W. Ostwald bekämpft in neuester Zeit geradezu die mechanische Auffassung.

Da die mechanische Wärmetheorie der Forderung der Anschaulichkeit entspricht, so ist sie für die Naturlehre von grösster Bedeutung. Die Theorie erreicht ihren Zweck schon damit, dass sie allgemein annimmt, die Wärme bestehe aus der lebendigen Kraft der Molecüle und Atome des Körpers.

Einzelne Forscher haben indessen versucht, von den Vorgängen im Körper ein bestimmteres Bild zu entwerfen. Redtenbachers Anschauung (1857), die früher von Poisson, Cauchy, Lamé u. a. ausgesprochen worden war, geht dahin, jedes Körperatom bestehe aus einem ponderablen Kerne, der mit einer Ätherhülle umgeben sei; die Ätheratome seien viel kleiner als die Körperatome; die ersteren wirken abstossend auf einander und anziehend auf die letzteren; die schweren Massentheilchen üben eine unvermittelte Anziehung auf einander aus. Ein Atom mit seiner Ätherhülle nennt Redtenbacher Dynamide. Wenn die Abstossung der Ätherhüllen überwiege, so sei der Körper gasförmig; hielten Anziehung und Abstossung einander das Gleichgewicht, so sei der Körper flüssig oder fest. Die Wärme bestehe — dies ist Redtenbachers eigene Hypothese — aus einer oscillatorischen und zwar radialen Bewegung der Ätherhüllen, also aus einer zusammenziehenden und ausdehnenden Bewegung der Äthersphären; die Temperatur sei der lebendigen Kraft der bewegten Äthertheilchen proportional. Beim Erwärmen geschehe die Oscillation rascher, die Abstossung der Theilchen wachse und der Körper dehne sich aus.

Die Theorie Redtenbachers stützt sich auf unbegreifliche Kraftqualitäten, auf Anziehung und Abstossung, die von Atom zu Atom unvermittelt in die Ferne wirken sollen. Sie vermag die Wärmeabsorption und den Unterschied zwischen Wärmeleitung und -Strahlung nicht zu erklären. Wenn Wärmestrahlen durch einen Körper hindurchgehen, so muss der Äther im Körper in Schwingungen versetzt werden; nach Redtenbachers Annahme müsste dann auch die lebendige Kraft der Ätherhüllen und somit auch die Temperatur des Körpers zunehmen; dagegen spricht aber die Erfahrung, die lehrt, dass ein Körper beim Durchgang von Wärmestrahlen nicht erwärmt

wird. Die Wärme könnte sich nur von Ätherhülle zu Ätherhülle fortpflanzen, und es wäre nicht einzusehen, wodurch die Wärmeleitung d. i. die Fortpflanzung der Wärme von einem Körpertheilchen zum anderen, von der Wärmestrahlung, die den Körper nicht erwärmt, unterschieden werden sollte.

Zweckentsprechender ist die Hypothese, die bereits von Boyle und Baco aufgestellt und von Clausius (1856) vervollkommnet wurde, nach welcher es eine Bewegung der Molecüle selbst ist, die wir als Wärme empfinden. Die Hypothese ist heute ziemlich allgemein angenommen. Nach derselben vollführen die Molecüle der Gase eine fortschreitende Bewegung (vgl. § 42, Aufg. 1) und üben durch ihren Stoss an die Gefässwände die Gasspannung aus; durch die häufigen Zusammenstösse kommen die Molecüle auch in rotierende Bewegung und ihre Bestandtheile, die Atome, werden in Schwingungen versetzt. Die Wärme wird durch die gesammte lebendige Kraft der Molecular- und Atombewegungen bestimmt; sie ist der lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung der Molecüle proportional. Die Hypothese heisst die kinetische Gastheorie. — Im festen Körper wird die Bewegung so gedacht, dass sich die Molecüle um gewisse Gleichgewichtslagen bewegen, ohne dieselben ganz zu verlassen; ausser den vibrierenden Bewegungen der Molecüle kommen auch noch die Schwingungen der Atome in Betracht; letztere können hin- und hergehende und drehende um den Schwerpunkt des Molecüles sein. — Im flüssigen Zustande oscillieren die Molecüle nicht um bestimmte Gleichgewichtslagen, sondern sie bewegen sich so lebhaft, dass sie in ganz veränderte und immer neue Lagen zu einander kommen. Schon Clausius hat anlässlich der Erklärung der Elektrolyse angenommen, und die Theorie des osmotischen Druckes hat neuerdings dazu geführt, die Bewegung der Flüssigkeitsmolecüle von gleicher Art wie jene der Gase anzunehmen, also auf die Flüssigkeiten die kinetische Gastheorie anzuwenden. Die Ausdehnung der Körper aller drei Aggregatzustände durch die Wärme wird aus der Vergrösserung der Molecülbahnen erklärt. Die strahlende Wärme wird zum Unterschiede von der geleiteten als eine Bewegung des Äthers betrachtet, der sich zwischen den Körpermolecülen befindet.

Die angegebene kinetische Moleculartheorie vermag nur das Ausdehnungsbestreben der gasförmigen und flüssigen Körper infolge der Wärme gut zu erklären; jedoch bei den festen Körpern genügt sie hiezu allein nicht. Es müssen deshalb neben der kinetischen Theorie noch aus Redtenbachers Dynamidenlehre die anziehenden Kräfte zwischen den ponderablen Molecülen und die Abstossung zwischen Ätheratomen herangezogen werden. Der Mangel der Theorie folgt aus einer einfachen Überlegung. Nähert sich ein Molecül einem anderen, so wächst die Cohäsion, die Anziehung wird stärker und die

Annäherung wird beschleunigt; es besteht aber kein Grund zur Umkehr des Molecüles. Auch bei Beachtung der Einwirkung aller umliegenden Molecüle auf ein in Bewegung befindliches Molecül findet man immer nur noch stärkere Annäherung an die nächsten Molecüle, aber keine Kraft zum Entfernen von denselben. Es muss daher eine besondere Ausdehnungskraft angenommen werden; als Träger derselben werden nach Redtenbacher die Ätherhüllen um die Molecüle betrachtet.

Nach Rankine (1850) besteht jedes Körperatom aus einem Kerne, umgeben von einer elastischen Atmosphäre, welche durch anziehende Kräfte von dem Kerne in ihrer Lage gehalten wird. Die elastische Kraft der Wärme entsteht durch Rotation und Vibration der elastischen Atmosphäre der Atome, und die Wärmemenge eines Körpers ist die lebendige Kraft dieser Rotationen und Vibrationen. Die Absorption von Licht und Wärme wird als Übergang der Bewegung von den Atomkernen des betreffenden Mediums zu ihrer Atmosphäre und die Strahlung durch die umgekehrte Übertragung dargestellt. Die Atomkerne sollen unabhängig oder fast unabhängig von ihren Atmosphären vibrieren.

b) Wir versuchen im Folgenden, die unbegreifliche Annahme der anziehenden und abstossenden Kräfte fallen zu lassen und ohne diese die Wärme mechanisch zu erklären. Geeignet hiezu ist eine Modification der Rankine'schen Hypothese, eine Anpassung derselben an die Anschauungsweise Faradays über das Kraftfeld[1]). Faraday nimmt an (vgl. §§ 19 und 53), dass eine Masse mittelst des rings um sie befindlichen Kraftfeldes auf andere entfernte Massen wirke. Das Kraftfeld befindet sich in einem Zwangszustande, der bei der Bildung der Masse erzeugt worden sein muss. Will man keine neue Materie in die Lehren der Physik einführen, so muss der Äther als Träger des Kraftfeldes betrachtet werden, und für die Molecularkräfte folgt sofort, dass ihr Sitz in dem die Molecüle umgebenden Ather ist, dass die moleculare Äthersphäre auch die Wirkungssphäre darstellt. Zwei Molecüle treten in Wechselwirkung, wenn ihre Kraftfelder mindestens theilweise über einander zu liegen kommen. Die bei der Veränderung des gemeinschaftlichen Kraftfeldes geleistete Arbeit bestimmt die Wechselwirkungsenergie. (Vgl. § 53c.)

Hiernach erscheint der Ather um die Molecüle als Träger der anziehenden Cohäsionskräfte, und er kann daher nicht mehr für abstossende Kräfte und für die Wärme in Anspruch genommen werden; die letzteren Kräfte müssen durch einen Bewegungszustand der Molecüle erklärt werden. Hiezu genügt die fortschreitende Be-

1) Siehe meine Schrift über den Atherdruck als einheitl. Naturkraft. S. 54 Teschen 1893.

wegung für den Fall, als die Molecüle den Planeten oder Kometen im Himmelsraume ähnliche Bahnen beschreiben können; dann vermag die lebendige Kraft eines Molecüles dasselbe wieder aus der Wirkungssphäre eines Nachbarmolecüles hinauszuführen. Wenn die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung nicht so gross ist, wenn die Molecüle so gehäuft sind, dass die einzelnen Molecüle stets innerhalb der Wirkungssphären der umliegenden gehalten werden und mehr an eine Stelle gebunden sind, wie es bei Flüssigkeiten und namentlich bei den festen Körpern der Fall zu sein scheint, dann muss eine andere Art der Bewegung zur Versinnlichung der Wärme herangezogen werden.

Es liegt nun nahe, die rotierende Bewegung in Erwägung zu ziehen. Soll diese die Erscheinung der Ausdehnung hervorbringen, so wird man zu einer weiteren Annahme über die Constitution der Molecüle genöthigt. Denn es ist ohneweiters klar, dass etwa ein festes kugelförmiges Molecül durch Rotation keine Fliehkraft entwickelt, welche den Schwerpunkt des Molecüles verschieben könnte. Zweckentsprechend ist die Annahme, dass die Molecüle Wirbel bilden, deren Form veränderlich ist: Es können kleinste Massentheilchen (Atome der Urmaterie) auf der Oberfläche des Molecüles sich bewegen und etwa Kreise daselbst beschreiben. Ist das Molecül von allen Seiten gleichmässig durch Kräfte in Anspruch genommen, so sind alle Richtungen der Ebenen mit den kreisförmigen Bahnen gleichberechtigt, die in allen möglichen grössten Kreisen rotierenden Massentheilchen bilden ein kugelförmiges Molecül. Die Fliehkräfte sind nach allen Seiten hin gleich und üben überall den gleichen Druck aus.

Werden zwei Molecüle einander genähert, so werden dieselben durch die Kraft des Feldes deformiert, bis jedes die Form einer Niveaufläche in Bezug auf die Cohäsion und die Fliehkraft der eigenen Wirbel angenommen hat; die Molecüle erhalten die Eiform und sind mit den abgeplatteten Seiten gegen einander gekehrt. Aus Gründen der Symmetrie rotieren die kleinsten Massentheilchen an der Oberfläche der Molecüle um deren Achsen und entwickeln bei einer bestimmten lebendigen Kraft in den nach auswärts gelegenen kleineren Kreisen stärkere Fliehkräfte, die geeignet sind, der Cohäsion entgegen zu wirken. Bei weiterer Annäherung der Molecüle aneinander nimmt die Deformation zu, es wächst die lebendige Kraft und damit auch der Überschuss der nach auswärts wirkenden Fliehkräfte. Die lebendige Kraft der Rotationsbewegung wäre die Wärme; dieselbe wirkt infolge der Formveränderung der Molecüle in der angegebenen Weise der Cohäsion entgegen und sucht die Körpertheilchen von einander zu entfernen. Zum Unterschiede von der Körperwärme ist die strahlende Wärme eine fortschreitende Wellenbewegung im Äther des

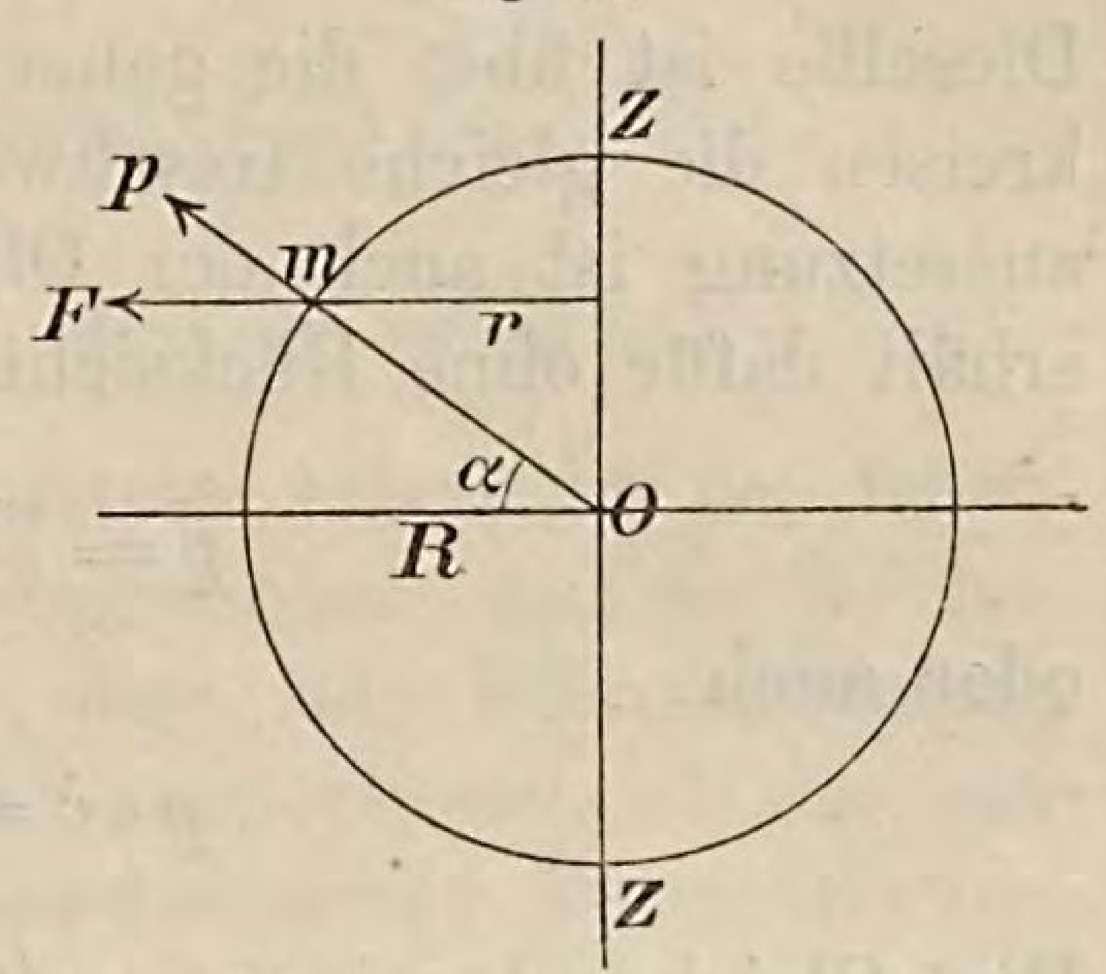
Kraftfeldes; die elastischen Deformationen, welche dabei die Molecüle erleiden, entsprechen elektrischen Polarisationen, deren Existenz von der elektromagnetischen Lichttheorie gefordert wird. Da diese Deformationen mit Schwerpunktverschiebungen verbunden sind, so nehmen die Molecüle selbst an den Schwingungen der Wärmestrahlen Theil, und darin besteht die Übereinstimmung der hier vertretenen Wirbeltheorie mit der Theorie von Rankine. Ähnlich wie bei dieser ist auch die Wärmeabsorption aus der Umwandlung von Schwingungsbewegungen in rotierende Molecularbewegung zu erklären. Nach mechanischen Gesetzen erfolgt dieselbe besonders bei einer Übereinstimmung der Periodendauer beider Bewegungen, und auch die Erfahrung steht mit diesem Satze im Einklange.

Der beschriebene Molecülwirbel entspricht auch der von der kinetischen Gastheorie geforderten Elasticität der Molecüle, indem das Gesetz der Fliehkraft der Wirbel für jede Formveränderung das Elasticitätsgesetz liefert. Bezüglich des Abstandes vom Molecülmittelpunkte kann die Abstossungskraft unter verschiedenen Umständen verschieden sein. Bleibt bei einer Deformation, z. B. bei einem Zusammenstoss die lebendige Kraft constant, dann ändert sich die Fliehkraft $F = mu^2/r$ in $dF = mu^2/r^2 \cdot dr$, die rückwirkende Kraft ist dem Quadrate von r umgekehrt proportional. Wird aber die Winkelgeschwindigkeit geändert, etwa durch einen centripetalen Druck, für den das zweite Kepler'sche Gesetz über die Constanz der Flächengeschwindigkeit ($u \cdot r = \text{const.}$) gilt, so ist die Fliehkraft $F = u^2/r = c/r^3$, und eine Änderung derselben ist der 4. Potenz der Entfernung vom Mittelpunkte umgekehrt proportional. Auch dieses Abstossungsgesetz wird von der kinetischen Gastheorie verwendet.

Ob ein Molecülwirbel aus einer Gruppe von Atomwirbeln bestehe, oder ob mehrere Atomwirbel zu einem einzigen Molecülwirbel vereinigt seien, ob im Inneren des Molecüles eine Verdünnung oder eine Verdichtung der kleinsten Massentheilchen gegenüber der Umgebung vorhanden sei, kann vom physikalischen Standpunkte dahin gestellt bleiben. Der Fall einer Verdichtung entspräche einer Molecülbildung im Sinne der Kant-Laplace'schen Weltbildungstheorie. Die Entstehung eines Molecülwirbels aus kleinsten Massentheilchen kann durch Anwendung der kinetischen Gastheorie auf diese und durch deren Beschränkung auf das Molecülvolumen erklärt werden. Durch die häufigen Zusammenstösse der kleinsten Massentheilchen wird deren Bewegungsrichtung beständig geändert, und es muss ein stationärer Bewegungszustand eintreten, wenn die Bewegungen auf einer Niveaufläche vor sich gehen, wenn die Bahnen kreisförmig geworden sind.

§ 73. Mechanische Zusammenstellung, deren Zustand dem Wärmezustand der Körper ähnlich ist[1]. Wir denken uns eine elastische Kugelfläche (Fig. 60), an der im Innern n kleine kugelförmige Massentheilchen m, gleichmässig vertheilt, anliegen. Alle Theilchen sollen sich mit der gleichen Geschwindigkeit u um die Achse Z drehen und durch ihre Fliehkräfte die elastische Fläche anspannen. Es ist zunächst der Druck normal zur Kugelfläche und dessen Beziehung zur lebendigen Kraft der rotierenden Masse zu bestimmen. Die Aufgabe kann mittelst des Gesetzes für die Fliehkraft in einfachster Weise gelöst werden. Um die Ähnlichkeit mit dem Folgenden deutlich zum Ausdrucke zu bringen, wenden wir das Energieprincip und zwar zuerst auf ein Massentheilchen an. Wird das Theilchen m während seiner Drehung um Z um die Strecke dr nach auswärts verschoben, so wird von der äusseren Kraft eine Arbeit $F \cdot dr$ geleistet und die lebendige Kraft um $mu \cdot du$ geändert; es ist die Arbeit

Fig. 60.



$$dA' = F \cdot dr + mu \cdot du.$$

Führt man anstatt F den normalen Druck p auf die Einheit der Kugelfläche ein, also die vorläufig als Mittelwert geltende Grösse

$$p = \frac{\Sigma \cdot F \cdot \cos \alpha}{4 R^2 \cdot \pi}$$

und berücksichtigt, dass $dR \cdot \cos \alpha = dr$ und die Anderung des Volumens

$$dv = 4 R^2 \pi \cdot dR,$$

so erhält man die Arbeit für alle n Massentheilchen

$$dA = p \cdot dv + n \cdot mu \cdot du,$$

d. h. die geleistete Arbeit dient zur Änderung der lebendigen Kraft der bewegten Massentheilchen und zur Verrichtung einer äusseren Arbeit, nämlich zur Verschiebung der Oberfläche, auf welcher der Druck p lastet. Der Satz entspricht bereits dem ersten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie, wenn die lebendige Kraft der Massentheilchen mit der Körperwärme verglichen wird.

Herrscht ein stationärer Zustand, so ist die Arbeit $dA' = 0$ und ebenso $dA = 0$. Aus der ersten Bedingung und aus der Beziehung von u zur Winkelgeschwindigkeit, nämlich aus $u = r \cdot \omega$, ergibt sich zunächst

1) Siehe meine Abhdlg. über die Hauptsätze d. mech. Wärmeth. Rlschlztsch. Wien. 1890. S. 524.

$$F = -m \cdot u \cdot \frac{du}{dr} = -\frac{mu^2}{r}.$$

Dies ist der Wert für die entwickelte Fliehkraft, welcher der äussere Druck das Gleichgewicht halten muss; die zur Kugelfläche normale Componente derselben ist

$$F \cdot \cos\alpha = -\frac{mu^2}{r}\cos\alpha = -\frac{mu^2}{R}.$$

Dieselbe ist über die ganze Fläche constant, wenn in allen Parallelkreisen die gleiche Geschwindigkeit u herrscht. Unter dieser Voraussetzung ist auch der Oberflächendruck p überall derselbe; man erhält dafür ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$p = \frac{n \cdot F \cdot \cos\alpha}{4 \cdot R^2\pi} = \frac{n \cdot mu^2}{4R^3\pi}$$

oder auch

$$p \cdot v = \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{1}{2} m \cdot u^2.$$

Die Gleichung stimmt mit dem nach der kinetischen Gastheorie (§ 42, Aufg. 1) entwickelten Spannungsgesetze, mit der Zustandsgleichung der Körper nach dem Elasticitätsgesetze (§ 48) und mit dem Charles-Boyle'schen Gesetze (§ 71c, S. 237) überein. p gibt in allen genannten Gesetzen den Druck an, unter welchem das Volumen v steht; p ist für die Volumenergie der Intensitätsfactor oder der Wirkungsgrad, und v ist der Extensitätsfactor oder der Wirkungsraum.

Durch Vergleich mit dem Charles-Boyle'schen Gesetze erhalten wir eine Beziehung zwischen der Temperatur und der lebendigen Kraft, nämlich

$$p_0 v_0 (1 + \alpha t) = \frac{1}{3} n \cdot mu^2$$

oder

$$p_0 v_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t\right) = \frac{1}{3} n \cdot m \cdot u^2;$$

für $t = -\frac{1}{\alpha} = -273^0$ C wird die linke Seite der Gleichung gleich Null und es muss auch die lebendige Kraft der rechten Seite verschwinden. Man nennt die Temperatur, bei welcher die lebendige Kraft der Massentheilchen, die nach der mechanischen Wärmetheorie die Wärme darstellt, gleich Null ist, den **absoluten Nullpunkt** der Temperatur. Werden die Temperaturgrade von diesem Punkte gezählt, so erhält man die **absolute Temperatur**; dieselbe ist

$$T = \frac{1}{\alpha} + t = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2} n \cdot m \cdot u^2}{v_0 \cdot p_0 \cdot \alpha}$$

der lebendigen Kraft in der Volumseinheit proportional, da nm/v_0 die Masse in der Volumseinheit angibt. Soweit die Gase dem Boyle-

Charles'schen Gesetze Folge leisten, macht ein Gasthermometer Angaben, die den Forderungen der absoluten Temperaturmessung entsprechen.

Mittelst der obigen Werte für p und v und der Beziehung $u = \omega \cdot r$ lässt sich die für eine Zustandsänderung der ganzen Zusammenstellung erforderliche Arbeit bestimmen; man erhält

$$\begin{aligned} dA &= n \cdot mu \cdot du + p \cdot dv \\ &= n \cdot mu^2 \cdot \frac{dr}{r} + n \cdot mu^2 \cdot \frac{dR}{R} \\ &= 2 \cdot n \cdot m \cdot u^2 \cdot \frac{dR}{R}, \quad \text{weil } \frac{dr}{r} = \frac{dR}{R}, \end{aligned}$$

d. h. die bei einer Zustandsänderung geleistete Arbeit ist der lebendigen Kraft sämmtlicher Massentheilchen proportional. Auf die Wärmelehre übertragen, sagt die Gleichung aus, dass jede Wärmeänderung eines Körpers dessen absoluter Temperatur proportional ist; sie entspricht dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie.

Man erhält auch eine Form, welche der gebräuchlichen, im Folgenden zu entwickelnden ähnlich ist, indem man die vorstehende Gleichung auf Zustandsänderungen eines Kreisprocesses bezieht, der wieder auf den ursprünglichen Zustand zurück führt. Dafür ist

$$\sum \int \frac{dA}{n \cdot mu^2} = \sum \int 2\,\frac{dR}{R} = 2(\log R_0 - \log R_0) = 0.$$

Wäre dieser Summenwert unmittelbar gewonnen worden, so hätte daraus die Proportionalität von dA und der lebendigen Kraft gefolgert werden können.

Der vorstehende Ausdruck für dA gestattet auch, die ganze Arbeit zu berechnen, welche imstande ist, die Massentheilchen aus ihrer Ruhelage im Kugelmittelpunkte in ihren gegenwärtigen Bewegungszustand überzuführen. Berücksichtigt man, dass die Werte für die Änderung der lebendigen Kraft und für die äussere Arbeit (nach den letzten Werten für dA) beständig gleich sind, so erhält man sofort für die gesuchte Arbeit die doppelte lebendige Kraft, also

$$A = n \cdot m \cdot u^2 = 3 \cdot p \cdot v.$$

Die vorstehenden Analogien lassen sich in noch einfacherer Weise geben, wenn man anstatt einer rotierenden Kugel einen rotierenden Cylinder betrachtet. (Siehe § 42, Aufg. 2.)

§ 74. **Erster Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie.** Die mechanische Wärmetheorie stützt sich auf die Verwandlung von Arbeit in Wärme und umgekehrt. In letzterer Beziehung bieten die Dampf- und Gasmaschinen allgemein bekannte Beispiele; deren grossartige Verwendung im letzten halben Jahrhunderte hat jedenfalls zur Anerkennung der mechanischen Wärmetheorie wesentlich beigetragen.

Versuche über die Verwandlung von Arbeit in Wärme, welche für die Theorie grundlegend waren, wurden bereits im § 72 angeführt. Hier wollen wir uns darauf beschränken, die Gleichwertigkeit von Arbeit und Wärme nach der Methode von R. Mayer (1842) nachzuweisen.

Wird eine Gewichtseinheit Luft bei constantem Volumen um die Temperatur dt erwärmt, so ist die zugeführte Wärme $c_v \cdot dt$, wenn c_v die spec. Wärme bei constantem Volumen bedeutet. Lässt man bei der Erwärmung den äusseren Druck unverändert, so dehnt sich die Luft aus und schiebt den äusseren Druck zurück; die dabei zugeführte Wärme ist $c_p \cdot dt$, wenn c_p die spec. Wärme bei constantem Druck und dt die Temperaturerhöhung angeben. Während der letzteren Erwärmung muss auch die mit der Volumsvergrösserung verbundene äussere Arbeit $p \cdot dv$ geleistet werden; die dieser Arbeit entsprechende Wärme ist im zweiten Falle mehr nothwendig als im ersten. Darnach besteht zwischen dem Wärmeüberschuss im zweiten Falle und der äusseren Arbeit die Gleichung

$$J(c_p - c_v) \cdot dt = p \cdot dv,$$

aus der der Arbeitswert J einer Calorie berechnet werden kann. Nach dem Charles-Boyle'schen Gesetze ist

$$p \cdot v = p_0 v_0 (1 + \alpha t)$$

und somit

$$J = \frac{p_0 v_0 \alpha}{c_p - c_v} = 427 \text{ kgm} = 419 \cdot 10^5 \text{ Ergs}.$$

Hierin ist

$p = 1{\cdot}0321$ kg, $v_0 = 1/0{\cdot}001293$ dm^3, $\alpha = 1/273$, $c_p = 0{,}23741$

und $c_p - c_v = 0{,}0685$ kg-cal.

Die letztere Zahl ist etwas unsicher und daher auch der Wert von J nicht ganz genau; derselbe entspricht aber dem Mittel derjenigen Werte, die aus verschiedenen Versuchen, insbesondere aus jenen der letzten Zeit (von Miculesco u. a.) gewonnen wurden.

Alle Vergleiche zwischen Arbeit und Wärme führen mehr oder minder genau zu derselben Verhältniszahl J, die deshalb als constantes mechanisches Wärmeäquivalent betrachtet wird. Gleichzeitig wird durch die Versuche dargethan, dass bei Verwandlung von Arbeit in Wärme oder bei dem umgekehrten Processe keine dieser physikalischen Grössen verloren geht, sondern dass jede derselben nur in die Form der gleichwertigen anderen übergeführt wird, d. h. es wird bewiesen, dass die Wärme eine Energie ist, die sich dem Gesetze der Erhaltung der Energie entsprechend verhält.

Mit Hilfe dieses Energieprincipes kann man für die der Gewichtseinheit irgend eines homogenen Körpers zugeführte Wärme dQ folgende Verwendung angeben. Erfolgt die Erwärmung bei constantem

äusseren Drucke p, so ist die aufgenommene Wärme $dQ = c_p \cdot dt$; dieselbe dient zur Erwärmung und zur Leistung einer inneren und einer äusseren Arbeit. Die zur Temperaturerhöhung nothwendige Wärme ist $c_v \cdot dt$; die Arbeit zur Überwindung des äusseren Druckes, etwa des Luftdruckes p auf der Oberfläche S, ist $p \cdot S \cdot dr = p \cdot dv$, wenn $S \cdot dr = dv$ die Volumsänderung bedeutet, und die innere Arbeit, die man sich durch Kräfte P, welche der Cohäsion gleich aber entgegengesetzt gerichtet sind und normal zur Oberfläche wirken, verrichtet denken kann, ist $P \cdot dv$. Die zugeführte Wärme muss nun ihren Leistungen gleich sein, also ist

$$dQ = c_p \cdot dt = c_v \cdot dt + \frac{1}{J}(P + p) \cdot dv.$$

Die Gleichung bringt den ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie zum Ausdrucke.

Vom mathematischen Standpunkte erscheint darin die Wärme als Function von Temperatur und Volumen aufgefasst; t und v sind als unabhängig veränderliche Grössen angenommen; und somit kann man für die Differentialquotienten setzen

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_v = c_v \quad \text{und} \quad \left(\frac{dQ}{dv}\right)_t = \frac{1}{J}(P + p).$$

Thatsächlich entspricht der erstere dem Begriffe der specifischen Wärme bei constantem Volumen und der letztere folgt auch aus der Beziehung der Energieänderung zur wirkenden Kraft. Daher bestimmen die beiden letzten Gleichungen zugleich den Wärmeverbrauch beziehungsweise bei constantem Volumen und bei constanter Temperatur.

Aufg. 1. Um wie viele Grade Celsius wird eine mit 200 m' Geschwindigkeit aufschlagende Bleikugel erwärmt, die vollständig ihre lebendige Kraft verliert? Spec. Wärme des Bleies = 0·0314.

$$\left(t = \frac{1}{2} m \cdot 200^2 / m \cdot 10 \cdot 0{\cdot}0314 \cdot 427 = 149{\cdot}2^0 \text{ C.}\right)$$ [1])

2. Mit welcher Geschwindigkeit müsste eine Bleikugel aufschlagen, um bis zum Schmelzpunkte von 326⁰ erwärmt zu werden? — (296 m.) **3.** Mit welcher Geschwindigkeit würde ein Körper auf die Erde stürzen, der infolge der Anziehung aus unendlicher Ferne herabfiele? Erdhalbmesser $R = 860 \cdot 7500$ m, Schwerebeschleunigung $a = 9{\cdot}81$ m. — (Aus dem Potential $v^2/2 = \varkappa M/R$ und $a = \varkappa M/R^2$ folgt $v = 11250$ m.) **4.** Wie gross wäre die Temperaturerhöhung des Wassers, das nach der in der vorhergehenden Aufgabe angegebenen Weise auf die Erde fiele, wenn der Aggregatzustand ungeändert bliebe? Wie gross jene des Eisens? Spec. Wärme des Wassers = 1 und jene des Eisens = 0·11.

$$(t_1 . = 15000^0 \text{ C}, \quad t_2 = 139000^0 \text{ C.})$$

5. Wie lautet die Umkehrung der Aufgabe 3 und deren Lösung? **6.** Wenn Sternschnuppen oder Meteore in die Atmosphäre unserer Erde gelangen

1) Siehe Holzmüller, Mech.-techn. Plaudereien in d. Ingen.-Zeitsch. Bd. 33.

und infolge des Luftwiderstandes eine Verzögerung der Geschwindigkeit von 8 auf 6 Meilen à 7·5 km erfahren, wie gross ist die Erwärmung jedes Kilogramms jener Körper?

$$[64 - 36)\, 7500^2/2 \cdot 9{\cdot}81 \cdot 427 = 188000 \text{ Cal.}]$$

7. Wie gross wäre nach der vorigen Aufgabe die Temperaturerhöhung eines Eisenmeteores, wenn die spec. Wärme des Eisens = 0·11 ist und von einem etwaigen Schmelzprocess abgesehen wird? — (1710000° C.) **8.** Die auf einen vollkommen schwarzen Körper fallenden Sonnenstrahlen entwickeln nach Ångström in jeder Minute und auf jeden zu ihnen normal stehenden dm^2 der Oberfläche eine Wärme von 0·4 Cal., wenn von der Wärmeabsorption in der Luft abgesehen wird; wie gross müsste darnach eine schwarze Fläche sein, wenn die von ihr aufgenommene Sonnenwärme einer Maschinenleistung von 10 Pferdekräften in der Secunde gleich kommen sollte? ($2{\cdot}63\ m^2$.) **9.** Welche Arbeit und welche Wärme wird von jedem Kilogramm (= 0·1 Masseneinheiten) eines auf die Sonne fallenden Körpers entwickelt? Die Beschleunigung auf der Sonnenoberfläche = 280 m, Sonnenhalbmesser $R = 100000 \cdot 7500$ m [1]). —

$$(W = 0{\cdot}1\ \varkappa \cdot M/R = 28 R = 21 \cdot 10^9 \text{ kgm} = 49 \cdot 10^6 \text{ Cal.})$$

10. Die jährliche Wärmestrahlung der Sonne beträgt nach Pouillet $27163 \cdot 10^{26}$ Cal. Welche Masse müsste zum Ersatze für diese Wärme in die Sonne stürzen? — ($55 . 10^{21}$ kg.) — **11.** Wenn ein Körper von dem Gewichte der Erde, nämlich von $6 \cdot 10^{24}$ kg in die Sonne stürzte, für welche Zeit erhielt dadurch die Sonne die zur Ausstrahlung nothwendige Wärme? — (Nach Aufg. 10 ungefähr 100 Jahre.) — **12.** Nach § 18, Aufg. 9 ist das Potential der Erde auf sich selbst = $23 \cdot 10^{30}$ kgm. Welcher Wärmewert entspricht dieser Arbeit, und wie viel Kohle müsste verbrannt werden, um die gleiche Wärme zu entwickeln, wenn 1 kg Kohle bei der Verbrennung 6000 Cal. Wärme entwickelt? — ($54 \cdot 10^{27}$ Cal. und $9 \cdot 10^{22}$ q Kohle.) **13.** Welche Wärme wurde durch die Vereinigung der Sonnenmasse erzeugt, nachdem die betreffende Arbeit (§ 18, Aufg. 10) ungefähr gleich $253 \cdot 10^{38}$ kgm ist? — ($59 \cdot 10^{36}$ Cal.) **14.** Wie gross ist die Wärmeentwickelung, wenn der Sonnenhalbmesser R durch Zusammenziehung der Sonne um 75 km verkleinert wird? $R = 95000$ Meil. à 7·5 km. — (Nach § 18, Aufg. 10 ist die Gravitationsarbeit der Sonne $W = 3kM^2/5R$, daher ist $\varDelta W = W \cdot \varDelta R/R = 62 \cdot 10^{32}$ Cal. — Helmholtz's Theorie der Erzeugung der Sonnenwärme.) **15.** In welcher Zeit wird die nach der vorigen Aufgabe durch Zusammenziehung der Sonne entwickelte Wärme ausgestrahlt, wenn die Wärmeausstrahlung jährlich $27 \cdot 10^{29}$ Cal. beträgt? — (In 2300 Jahren.) **16.** Wenn in den wärmeren Gegenden des Oceanes jährlich eine Wasserschichte von 5 m Tiefe verdunstet, so beträgt die verdunstete Wassermasse ca. 1100 Mill. m^3; wie gross ist die Arbeitsleistung der Sonne und wie viele Calorien Sonnenwärme werden verbraucht, wenn diese Wassermenge durchschnittlich auf eine Höhe von 3 km gehoben wird? — ($33 \cdot 10^{14}$ kgm = $77 \cdot 10^{11}$ Cal.)

1) R. Mayer's Theorie der Entstehung der Sonnenwärme. Siehe seine Mechanik der Wärme. S. 170.

17. Welche Kohlenmenge würde bei ihrer Verbrennung dieselbe Wärme liefern, wie die nach der vorigen Aufgabe verbrauchte?

($77 \cdot 10^{11}/6 \cdot 10^3 = 13 \cdot 10^8$ kg oder 13 Mill. Metercentner.)

18. Ein Pferd kann täglich 8 Stunden lang in jeder Minute eine Arbeit von 4400 kgm leisten; welche Kohlenstoffmenge wird zu dieser Arbeit verbraucht, wenn 1 g C bei der Verbrennung 8·56 Cal. entwickelt? [1]) — (578 g C.) 19. Ein 72 kg schwerer Mann besteigt einen 3000 m hohen Berg; welche Kohlenstoffmenge muss zum Zwecke dieser Arbeitsleistung im Organismus verbrannt werden, wenn 1 g C 8·56 Cal. entwickelt? — (59 g C.) 20. Der mechanische Effect, den der linke Herzventrikel bei einer Systole liefert, lässt sich aus der beförderten Blutmenge von 150 cm³ und dem Druck von 16 cm Quecksilberhöhe berechnen; er ist 32600 gcm. Welche Kohlenstoffmenge muss zum Zwecke dieser Leistung täglich verbrannt werden, wenn in der Minute 70 Pulsschläge angenommen werden, und die von 1 g C entwickelte Wärme 8·56 Cal. beträgt?

($W = 32860$ kgm $= 77$ Cal., 9 g C.)

21. Wenn die Leistung des rechten Herzventrikels die Hälfte von der des linken beträgt, wie gross ist dann der von beiden Herzkammern in einem Tage gelieferte mechanische Effect? — (49290 kgm = 115·5 Cal.) 22. Welche Kohlenstoffmenge oder welche Wasserstoffmenge würde bei der Verbrennung die von der vorhergehenden Aufgabe geforderte Arbeit zu leisten imstande sein? — 1 g C entwickelt 8·56 Cal., 1 g H 34·66 Cal. (13·5 g C oder 3·3 g H.)

§ 75. **Zustandsgleichung für homogene Körper** [2]). a) Die erste Hauptgleichung für die Gewichtseinheit eines homogenen Körpers, nämlich

$$dQ = c_p \cdot dt = c_v \cdot dt + \frac{1}{J}(P + p)dv$$

gibt den Arbeitswert

$$(P + p)dv = J \cdot (c_p - c_v)dt.$$

Führen wir hierin den Ausdehnungscoefficienten α ein, für welchen die Beziehung $dv = \alpha \cdot v_0 \cdot dt$ gilt, und multiplicieren beide Seiten der Gleichung mit $(1 + \alpha t)$, wobei t Temperaturgrade des Celsiusthermometers bedeutet, so erhält man

$$(P + p).v = J(c_p - c_v)\left(\frac{1}{\alpha} + t\right)$$

oder

$$(P + p)\cdot v = R\left(\frac{1}{\alpha} + t\right),$$

wenn

$$R = J(c_p - c_v).$$

1) R. Mayer, die Mechanik d. Wärme. S. 79 ff.

2) Siehe meine Abhdlg. i. d. Zeitsch. f. d. Rlw., Wien, 1890, S. 532 und meinen Vortrag i. d. Verhdlg. d. Naturforschergesllsch. 1894.

Dies ist die Zustandsgleichung, in welcher auch die Temperatur beberücksichtigt erscheint. (Vgl. § 48.)

Die Gleichung enthält das in erster Annäherung für Gase giltige Charles-Boyle'sche Gesetz (§§ 41 und 71c.) Insofern als die Gase dem vollkommenen Gaszustand entsprechen, ist die Cohäsion $P = 0$ und der Ausdehnungscoefficient $\alpha = 1/273$ const. und die Gleichung nimmt die Form des Gasspannungsgesetzes an, nämlich

$$p \cdot v = R\left(\frac{1}{\alpha} + t\right) = R \cdot T.$$

$T = 273 + t$ bedeutet die absolute Temperatur, mit welcher gleichzeitig auch die Gasspannung $p = 0$ wird.

Die linke Seite der allgemeinen Gleichung hat aber nicht bloss bei den Gasen, sondern auch bei Flüssigkeiten und festen Körpern die Bedeutung der Ostwald'schen Volumenergie oder der in dem Volumen vorhandenen potentiellen Energie der Cohäsion und des äusseren Druckes. Wie bereits schon früher bemerkt wurde, entspricht der Ausdruck der hydrostatischen Grundgleichung in der ihr von J. Stefan gegebenen Form eines Arbeitswertes. Von diesem Gesichtspunkte bedarf die Gleichung einer Correctur, wenn nicht das ganze Volumen v als Energiefeld betrachtet werden kann. Eine diesbezügliche Verbesserung, also eine weitere Annäherung an die wirklichen Körperzustände, bietet die Zustandsgleichung von van der Waals (§§ 42 und 48), in welcher von v das Molecülvolumen ω abgezogen wird. Hier soll nur diese Correctur berücksichtigt werden, der Cohäsionsdruck P soll im allgemeinen als eine unbestimmte Function des Volumens angenommen werden.

Aus der obigen Gleichung folgt der Druck im Energiefelde

$$(P + p) = \frac{R}{\alpha \cdot v_0}.$$

Dies ist der Intensitätsfactor der Raumenergie. Wird $(v - \omega)$ als Energievolumen betrachtet und gilt für dieses der Ausdehnungscoefficient α', so ist

$$(v - \omega) = (v_0 - \omega_0)(1 + \alpha' t)$$

und man erhält durch Multiplication der beiden letzten Gleichungen die Energiegleichung

$$(P + p)(v - \omega) = \frac{\alpha' \cdot (v_0 - \omega_0)}{\alpha \cdot v_0} R \cdot \left(\frac{1}{\alpha'} + t\right)$$

oder

$$(P + p)(v - \omega) = R'\left(\frac{1}{\alpha'} + t\right),$$

wenn

$$R' = \frac{\alpha'(v_0 - \omega_0)}{\alpha \cdot v_0} \cdot R.$$

Dies ist die Zustandsgleichung in der van der Waals'schen Form; sie gilt für homogene Körper aller drei Aggregatzustände. Dass

darin $\left(\frac{1}{\alpha'} + t\right)$ eine für alle Körper giltige Temperaturfunction, nämlich die absolute Temperatur angibt, lehrt der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. Vorläufig soll nur angenommen werden, dass α' für einen und denselben Körper constant ist, d. h. dass sich der Energieraum $(v - \omega)$ bei Temperaturerhöhungen regelmässig ausdehnt. Die Anwendung der Zustandsgleichung auf Erscheinungen soll die Brauchbarkeit der Hypothese darthun. P soll als unbestimmte Function des Volumens gelten.

§ 76. **Isothermische und adiabatische Zustandsänderungen.** Befindet sich ein Körper in Verbindung mit einem anderen, dessen Temperatur durch Wärme-Zu- oder Abfuhr constant erhalten wird, so kann durch Druckänderung das Volumen des ersteren Körpers geändert werden, obwohl auch seine Temperatur constant bleibt; eine solche Zustandsänderung heisst isothermisch. Die hiebei dem Körper zugeführte Wärme ist nach dem ersten Hauptsatze und der Zustandsgleichung

$$Q_1 = \frac{1}{J}\int_1^2 (P + p)\,dv = \frac{\left(\frac{1}{\alpha'} + t\right)}{J}\int_1^2 \frac{R'\,dv}{(v - \omega)}.$$

Die Integration ist vom Anfangsvolumen v_1 bis zum Endvolumen v_2 ausgeführt zu denken.

Die äussere Arbeit bei der Volumsänderung ist

$$W_1 = \int p \cdot dv = \int (P + p)\cdot dv - \int P \cdot dv$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha'} + t\right)\cdot \int_1^2 \frac{R'\cdot dv}{v - \omega} - \int_1^2 P \cdot dv.$$

Die Zeiger 1 sind den Grössen, die sich auf den Anfangszustand beziehen und die Zeiger 2 den Grössen, die sich auf den Endzustand beziehen, beizufügen. Für vollkommene Gase ist $R' = R = \text{const.}$, $\alpha' = 1/273$, $P = 0$ und $\omega = 0$; damit wird

$$Q_1 = \frac{1}{J}\,RT\log\frac{v_2}{v_1} \quad \text{und} \quad W_1 = RT\log\frac{v_2}{v_1} = JQ_1.$$

Wird durch Änderung des Druckes p das Körpervolumen geändert, ohne dass Wärme zu- oder abgeführt wird, so heisst die Zustandsänderung adiabatisch oder isentropisch. In diesem Falle liefert der erste Hauptsatz für die Gewichtseinheit eines Körpers die Beziehung

$$0 = c_v \cdot dt + \frac{1}{J}(P + p)\,dv.$$

Mit Benützung der Zustandsgleichung erhält man allgemein

$$J \cdot c_v \cdot \frac{dt}{\frac{1}{\alpha'} + t} = -\frac{R' \cdot dv}{v - \omega},$$

und wenn c_v constant ist (Gesetz von Dulong-Petit), oder wenn dafür ein Mittelwert gesetzt wird, so folgt durch Integration

$$J \cdot c_v \log \frac{\left(\frac{1}{\alpha'} + t_2\right)}{\left(\frac{1}{\alpha'} + t_1\right)} = -\int_1^2 \frac{R' \cdot dv}{v - \omega}.$$

Die durch die Volumsänderung bedingte äussere Arbeit ist

$$W_2 = \int_1^2 p \cdot dv = -J\int_1^2 c_v \cdot dt - \int_1^2 P \cdot dv$$

$$= -Jc_v(t_2 - t_1) - \int_1^2 P \cdot dv.$$

In den folgenden Entwicklungen ist keine Einschränkung für c_v erforderlich. Für vollkommene Gase erhält man als Beziehung zwischen der specifischen Wärme und der Temperatur durch Ausführung der vorstehenden Integrationen

$$Jc_v \log \frac{T_2}{T_1} = R \log \frac{v_1}{v_2},$$

und wenn man für

$$\frac{R}{J \cdot c_v} = \varkappa - 1$$

setzt, wobei $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$,

$$T_1 \cdot v_1^{\varkappa - 1} = T_2 \cdot v_2^{\varkappa - 1}.$$

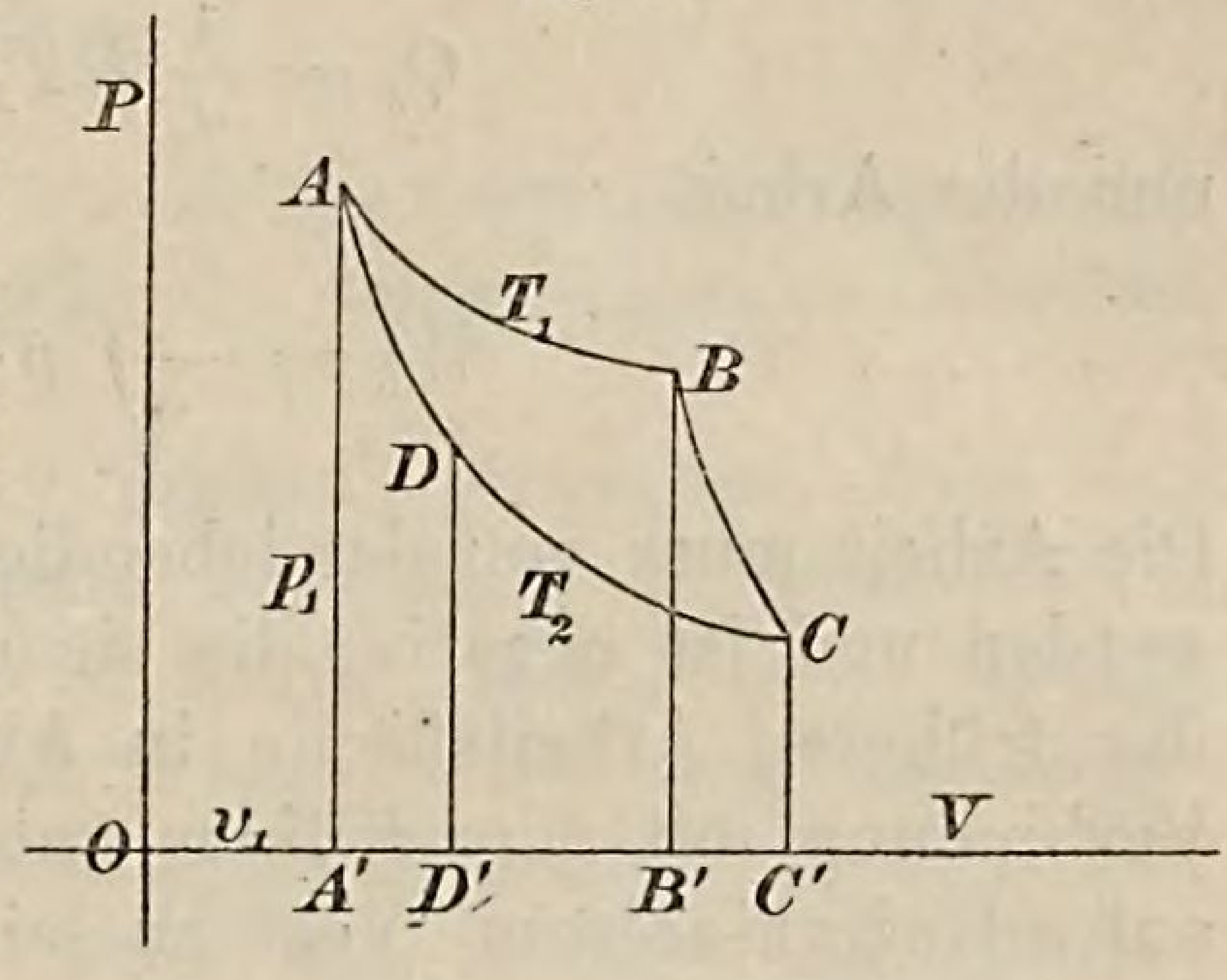
Ferner ist die Arbeit des Gases

$$W_2 = -Jc_v(t_2 - t_1).$$

§ 77. **Gasmaschine. Kreisprocess.** (Carnot 1824.) a) Sowohl Gas- als auch Dampfmaschinen beruhen darauf, dass beim Wärmeübergang von einem wärmeren zum kälteren Körper äussere Arbeit geleistet wird. Behufs Umsetzung der Wärme in Arbeit muss der betreffende Körper sein Volumen ändern. Wir betrachten eine vollkommene Gasmaschine nach Carnot, bei welcher ein Gas infolge von aufeinanderfolgenden isothermischen und adiabatischen Zustandsänderungen einen Kreisprocess vollführt. Der Vorgang hierbei ist folgender (vgl. § 30, Aufg. 14—17): Ein vollkommenes Gas befinde sich in einem Cylinder mit beweglichem Kolben; sein Gewicht sei gleich Eins, sein Druck p_1 und sein Volumen v_1. Wir stellen diese Grössen in Fig. 61 als Coordinaten dar, indem $OA' = v_1$ und $AA_1 = p_1$ auf die Achsen V und P aufgetragen werden. Das Gas stehe auch in Verbindung mit einer Wärmequelle von constanter absoluter Tem-

peratur $T_1 = \frac{1}{\alpha} + t_1$. Bei einer Heissluftmaschine sind die Wärmequelle die Feuergase, bei der Dampfmaschine ist sie der Dampf im Dampfkessel, der von der Feuerung auf gleicher Temperatur gehalten wird. Nun lässt man das Gas bei der Temperatur t_1^0 C. ausdehnen, das Volumen wächst auf $v_2 = OB'$ und der Druck nimmt bis auf $p_2 = BB'$ ab. Die dabei stattfindende isothermische Zustandsänderung wird durch das Boyle'sche Gesetz bestimmt und entspricht in geometrischer Darstellung einer gleichseitigen Hyperbel; es ist nämlich

Fig. 61.



$$p_1 v_1 = p_2 v_2 .$$

Die zugeführte Wärme ist nach den vorhergehenden Paragraphen

$$Q_1 = \frac{1}{J} R \cdot T_1 \cdot \log \frac{v_2}{v_1}$$

und die geleistete Arbeit

$$W_1 = \int_1^2 p . dv = R \cdot T_1 \cdot \log \frac{v_2}{v_1} = J \cdot Q_1 .$$

Aus der graphischen Darstellung des Arbeitswertes $\int p \cdot dv$ folgt, dass diese von der Fläche $ABA'B'$ angegeben wird.

Nun brechen wir die Verbindung des Gases mit der Wärmequelle ab, lassen das Gas adiabatisch bis $v_3 = OC'$ ausdehnen, dabei nimmt der Druck bis $p_3 = CC'$ ab und die Tempertaur sinkt bis $T_2 = \frac{1}{\alpha} + t_2$. Die nun geleistete Arbeit ist

$$W_2 = \int_2^3 p \cdot dv = J \cdot c_v (T_1 - T_2) .$$

Dieser Arbeitswert wird durch die Fläche $BCB'C'$ dargestellt. Zwischen Temperatur und Volumen gilt die oben für adiabatische Zustandsänderungen abgeleitete Beziehung

$$T_1 \cdot v_2^{\varkappa - 1} = T_2 \cdot v_3^{\varkappa - 1} .$$

Bei beiden bisher betrachteten Zustandsänderungen hat sich das Gas ausgedehnt, der Kolben wurde nach vorwärts getrieben, gehoben. Die Verbindung des Kolbens durch Kolbenstange, Leitstange und Kurbel vermittelt die Bewegung einer Welle, von der sie auf Arbeitsmaschinen übertragen wird.

Nachdem das Gas seine grösste Ausdehnung, der Kolben seine

höchste Lage erreicht hat, wird dieser zurückbewegt; das Gas tritt in Verbindung mit einem Kühler von der constanten Temperatur t_2^0 C. und wird nun isothermisch zusammengedrückt bis zum Volumen $v_4 = OD'$ und zum Drucke $DD' = p_4$. Die dabei abgegebene Wärme ist

$$Q_2 = \frac{1}{J} R T_2 \log \frac{v_4}{v_3}$$

und die Arbeit

$$W_3 = -\int_3^4 p \cdot dv = -J \,.\, Q_2 \,.$$

Die Arbeit muss von der lebendigen Kraft des Schwungrades geleistet werden und ist negativ; die sie darstellende Fläche $CDC'D'$ ist von der früheren Arbeitsfläche in Abzug zu bringen. Endlich wird die Verbindung mit dem Kühler unterbrochen und das Gas wird wieder auf adiabatischem Wege zu seinem Anfangszustand zurückgebracht; die Arbeitsleistung dabei ist

$$W_4 = J \cdot c_v (T_2 - T_1) \,.$$

Dieselbe ist ebenso wie die vorhergehende negativ. Die Beziehung zwischen Temperatur und Volumen ist

$$T_1 \cdot v_1^{\varkappa - 1} = T_2 \cdot v_4^{\varkappa - 1} \,.$$

Alle Zustandsänderungen geben einen Kreisprocess, der beendet ist, wenn das Gas sich wieder in seinem Anfangszustand befindet. Die im ganzen geleistete Arbeit wird durch die Fläche $ABCD$ dargestellt; sie ist

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = J(Q_1 - Q_2),$$

d. h. die nach aussen abgegebene Arbeit ist gleichwertig der Differenz der aus der Wärmequelle entnommenen und dem Kühler zugeführten Wärme.

Mittelst der Beziehungen zwischen Temperatur und Volumen bei den zwei adiabatischen Zustandsänderungen folgt, dass $v_1/v_2 = v_4/v_3$, und somit wird

$$Q_2 = Q_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} \quad \text{oder} \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} = \text{const.}$$

und die Arbeit

$$W = J \cdot Q_1 \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1} \,.$$

Es wird demnach nur ein Theil der der Wärmequelle entnommenen Wärme in Arbeit verwandelt, und dieser Theil ist proportional der Temperaturdifferenz zwischen Wärmequelle und Kühler. Carnot gab den Wert unmittelbar an, indem er annahm, dass die Wärme Q_1 ein Stoff sei, welcher ähnlich wie ein fallendes Gewicht von dem Wärmeniveau T_1 auf T_2 herabfalle. Clausius passte den Satz der mechanischen Wärmetheorie an.

Das Güteverhältnis oder der ökonomische Coefficient wird durch das Verhältnis der nutzbaren Wärme zu der ganzen der Wärmequelle entzogenen Wärme bestimmt; dasselbe ist

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Das Verhältnis hängt nur von den im Kreisprocesse vorkommenden Temperaturen ab und ist unabhängig von allen charakteristischen Constanten des Gases.

Durch die letzte Gleichung wird zugleich dargethan, dass eine nutzbare Arbeit nur geleistet wird, wenn $T_1 > T_2$, d. h. wenn Wärme von einem wärmeren zu einem kälteren Körper übergeht. — Würde $T_1 < T_2$, so müsste auch $Q_1 < Q_2$ sein; zur Vollführung des Kreisprocesses würde Arbeit verbraucht werden, die Maschine würde Arbeit aufnehmen; bei Überführung der Wärme von niederer zu höherer Temperatur muss also eine Verwandlung von Arbeit in Wärme stattfinden. Der letztere Fall kann an der vorstehenden Fig. 61 anschaulich gemacht werden, wenn man die Zustandsänderungen in der Reihenfolge $ADCBA$ hervorgerufen denkt; die Temperaturen T_1 und T_2 würden dabei ihre Plätze tauschen, da die niedrigere Temperatur T_1 bei dem niedrigeren Druck vorkommt. Auch die vorstehenden Gleichungen lassen sich dann auf die Umkehrung des Kreisprocesses geltend machen. Die von der Maschine aufgenommene Arbeit erweist sich darnach ebenso gross als die abgegebene beim directen Kreisprocess. (Anwendung bei Kälte- oder Eismaschinen.)

b) Es sei ein dem vorhergehenden ähnlicher Kreisprocess mit einem beliebigen homogenen Körper, für den die Zustandsgleichung gilt, durchzuführen und die dabei geleistete Arbeit und der ökonomische Coefficient zu bestimmen. Man erhält nach § 76 für die Wärmemengen

$$Q_1 = \frac{1}{J}\left(\frac{1}{\alpha'} + t_1\right)\int\limits_2^3 \frac{R' \cdot dv}{v - \omega}$$

und

$$Q_2 = \frac{1}{J}\left(\frac{1}{\alpha'} + t_2\right)\int\limits_4^1 \frac{R' \cdot dv}{v - \omega},$$

ferner die Beziehungen

$$\int\limits_2^3 \frac{R' \cdot dv}{v - \omega} = \int\limits_1^2 J c_v \cdot \frac{dt}{\frac{1}{\alpha'} + t} = \int\limits_4^1 \frac{R' \cdot dv}{v - \omega}.$$

Somit wird

$$Q_1 - Q_2 = Q_1 \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha'} + t_1}$$

und die ganze Arbeit

$$W = J(Q_1 - Q_2) - \sum \int P \cdot dv = J \, . \, Q_1 \cdot \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha'} + t_1} \cdot$$

Die algebraische Summe der Arbeiten der Cohäsion P ist gleich Null, weil der Anfangs- und Endzustand des Körpers derselbe ist. Der angegebene Ausdruck für W ist daher richtig, die Cohäsion kann dabei eine beliebige Function des Volumens sein. Die mathematische Form des Arbeitswertes W stimmt demnach mit jener für Gase überein; ebenso muss auch der ökonomische Coefficient übereinstimmen. Zum Nachweise völliger zahlenmässiger Übereinstimmung ist noch erforderlich, zu zeigen, dass die Ausdehnungscoefficienten α und α' dieselben Werte haben. Dies geschieht durch den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie.

§ 78. **Zweiter Hauptsatz.** a) Clausius (1850) hat den Kreisprocess dazu benützt, um den Nachweis zu liefern, dass jede Wärmeänderung eines Körpers bei constanter Temperatur dieser proportional ist[1]). Es ist ersichtlich, dass, wenn Gas und Dampf beim Durchlaufen je eines Kreisprocesses die gleiche Arbeit W leisten sollen, in beiden Fällen auch die in Arbeit verwandelte Wärme, d. i. nach obiger Bezeichnung $Q_1 - Q_2$, gleich sein muss. Der Schluss ist nach dem Princip der Erhaltung der Energie, beziehungsweise nach dem ersten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie nothwendig. Die verbrauchte Wärme $Q_1 - Q_2$ muss eine gleichwertige äussere Arbeit W liefern, weil beim Kreisprocess die Summe aller inneren Arbeiten gleich Null ist. — Nun kann weiter dargethan werden, dass auch vom Gase und vom Dampf die gleiche Wärmemenge Q_1 aufgenommen und ebenso die gleiche Wärme Q_2 abgegeben wird: Würde der Dampf die Wärme $Q_1 + q$ bei der Temperatur t_1 aufnehmen, so müsste er auch die Wärme $Q_2 + q$ bei der Temperatur t_2 abgeben, damit die Wärmedifferenz wieder $(Q_1 - Q_2)$ wäre. In dem letzteren Falle könnte man aber durch den Kreisprocess mit dem Gase die Wärmemenge Q_2 von der Wärmequelle mit der Temperatur t_1 auf den Wärmebehälter oder Kühler mit der niederen Temperatur t_2 übertragen, und sodann durch den umgekehrten Kreisprocess mit dem Dampfe die Wärme $(Q_2 + q)$ von dem Wärmebehälter mit niederer Temperatur t_2 zu dem Wärmebehälter mit höherer Temperatur t_1 überführen. Nach beiden Kreisprocessen wären sowohl Gas als Dampf wieder in ihren ursprünglichen Zuständen; es wäre nur die Wärmemenge q von niederer zu höherer Temperatur übergeführt worden, ohne dass dadurch eine Verwandlung von Arbeit in Wärme stattgefunden hätte. Clausius erklärt

1) Clausius, Die mech. Wärmetheorie, 3. Aufl. I. S. 72—113. — Christiansen, Theor. Phys. S. 368.

dies für unmöglich, indem er den Grundsatz aufstellt: „Die Wärme kann nicht von selbst aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen", oder „ein Wärmeübergang aus einem kälteren in einen wärmeren Körper kann nicht ohne Compensation stattfinden". Unter Compensation versteht Clausius eine gleichzeitige Verwandlung von Arbeit in Wärme oder einen Wärmeübergang von einem wärmeren zu einem kälteren Körper.

Die Gleichung für die Arbeit und für den ökonomischen Coefficienten sind daher ebenso wie für Gase auch für andere Körper giltig, und man hat allgemein die Beziehung

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad \text{oder} \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} = \text{const.}$$

Die letzte Gleichung, welche die Proportionalität zwischen der aufgenommenen, beziehungsweise abgegebenen Wärme und der zugehörigen Temperatur ausdrückt, gibt in der Form

$$dQ = T \cdot dS$$

die zweite Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie. S nennt Clausius Entropie oder Verwandlungsinhalt.

Clausius stellt den zweiten Hauptsatz auch noch in anderer Form dar, nämlich als den Satz von der Äquivalenz der Verwandlungen. Man kann nämlich das Resultat eines Kreisprocesses dahin aussprechen, dass zwei Verwandlungen eingetreten sind: eine Verwandlung von Wärme in Arbeit (oder umgekehrt) und eine Verwandlung aus Wärme von höherer Temperatur in Wärme von niederer Temperatur (oder umgekehrt), und die Beziehung zwischen diesen beiden Verwandlungen ist es, welche durch den zweiten Hauptsatz ausgedrückt werden soll. Betrachtet man Q/T als mathematischen Ausdruck der Verwandlung der Wärme Q bei der Temperatur T in Arbeit und $Q(1/T_2 - 1/T_1)$ als den Verwandlungswert beim Übergang der Wärme Q von der Temperatur T_1 zu T_2, so erhält man für den beschriebenen Kreisprocess als Verwandlungswerte der Wärme $(Q_1 - Q_2)$ von der Temperatur T_1 in Arbeit, die negativ gezählt wird, $-(Q_1 - Q_2)/T_1$ und als Verwandlungswert des Überganges der Wärme Q_2 von der Temperatur T_1 zu T_2, die positiv gezählt wird, $Q_2(1/T_1 - 1/T_2)$; die Äquivalenz beider Verwandlungswerte bringt deren Summen auf Null; man erhält darnach

$$-\frac{Q_1 - Q_2}{T_1} + Q_2\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) = 0$$

oder

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2},$$

d. i. die zweite Hauptgleichung.

b) Zur mathematischen Form des zweiten Hauptsatzes gelangt man auch nach dem Grundsatze von Clausius und mit Benützung der Zustandsgleichung, in welcher der Cohäsionsdruck P als eine beliebige Function des Volumens angenommen werden kann. Beachten wir nämlich, dass die im vorhergehenden Paragraphen gewonnenen Arbeitswerte für ein vollkommenes Gas und für einen beliebigen homogenen Körper nach dem Satze von Clausius gleich sein müssen, wenn bei dem Kreisprocesse jedes Körpers die Wärme Q_1 bei der Temperatur t_1 aufgenommen und die Wärme Q_2 bei der Temperatur t_2 abgegeben wurde, so folgt bei der Bezeichnung der Ausdehnungscoefficienten beziehungsweise mit α_1 und α_1' die Gleichung

$$J \cdot Q_1 \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha} + t_1} = J \cdot Q_1 \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1'} + t_1}.$$

Daraus ergibt sich die Gleichheit der Ausdehnungscoefficienten des Gases und des Energievolumens des anderen Körpers $\alpha_1 = \alpha_1'$ und für die Summen $\frac{1}{\alpha_1} + t_1 = \frac{1}{\alpha_1'} + t_1 = T_1$ die für vollkommene Gase geltend gemachte absolute Temperatur.

Durch Einführung von T in die Zustandsgleichung erhält diese die Form

$$(P + p)(v - \omega) = R' \cdot T.$$

Nun folgt leicht die zweite Hauptgleichung aus der Verbindung der ersten mit der Zustandsgleichung. Man erhält nämlich für die Wärmeänderung dQ eines Körpers bei constanter Temperatur T

$$dQ = \frac{1}{J}(P + p) \cdot dv = \frac{1}{J} R' \cdot T \cdot \frac{dv}{v - \omega} = T \cdot dS,$$

wenn

$$dS = \frac{R' \cdot dv}{J \cdot (v - \omega)}.$$

c) Um die Temperaturfunction in der Zustandsgleichung zu bestimmen, kann man ähnlich wie bei den einfachen Maschinen und bei den Flüssigkeiten in communicierenden Gefässen mit zwei im Wärmegleichgewicht befindlichen Körpern eine virtuelle Bewegung vornehmen, wenn etwa ein fester Körper sich in einer Flüssigkeit oder in einem Gase befindet, den einschliessenden Körper etwas zusammendrücken; bei einem isothermischen Vorgange gilt alsdann für die Cohäsionen P_1 und P_2 der beiden Körper und für den äusseren Druck p die Arbeitsgleichung

$$P_1 dv_1 + P_2 dv_2 + p\,dv = 0.$$

Der Verschiebungsraum dv vertheilt sich auf beide Körper, daher ist $dv = dv_1 + dv_2$ und ferner

$$(P_1 + p) dv_1 + (P_2 + p) dv_2 = 0.$$

Führt man für die Drücke die aus den entsprechenden Zustandsgleichungen (§ 75) folgenden Werte ein, so erhält man

$$R_1'\left(\frac{1}{\alpha_1}+t\right)\frac{dv_1}{v_1-\omega_1}+R_2'\left(\frac{1}{\alpha_2}+t\right)\frac{dv_2}{v_2-\omega_2}=0.$$

Im Zustande des Wärmegleichgewichtes sind beide Temperaturen t einander gleich. Der Wert von t ist beliebig, daher gilt die Gleichung auch für $t = 0$, und es ist

$$\frac{R_1'}{\alpha_1}\cdot\frac{dv_1}{v_1-\omega_1}=-\frac{R_2'}{\alpha_2}\cdot\frac{dv_2}{v_2-\omega_2}.$$

Durch Einführung dieser Bedingung in die vorhergehende Gleichung erhält man $\alpha_1 = \alpha_2$ und somit für

$$\frac{1}{\alpha_1}+t=\frac{1}{\alpha_2}+t=T$$

die für zwei beliebige und somit für alle Körper giltige absolute Temperatur. Mit Hilfe derselben gewinnt die Zustandsgleichung die bereits unter b) angegebene Form

$$(P+p)(v-\omega)=R'T.$$

d) Die zweite Hauptgleichung

$$dQ = T\cdot dS$$

kann unmittelbar damit begründet werden, dass die Wärme in ihre zwei Energiefactoren zerlegt wird, von denen der Intensitätsfactor T die absolute Temperatur ist, die nach der Erfahrung für das Wärmegleichgewicht massgebend ist. Wärmeerscheinungen mit veränderlicher Temperatur beruhen auf einer Änderung der Energie von höherer zu niederer Intensität oder umgekehrt. Nach W. Meyerhoffer bleibt die Intensität der Energie dabei solange constant, als die Körper dieselbe Anzahl der Molecüle besitzen[1]).

§ 79. **Die Grössen der Zustandsgleichung.** a) Der Ausdehnungscoefficient. Die Zustandsgleichung wurde mit Hilfe zweier Ausdehnungscoefficienten gewonnen, nämlich mittelst des Ausdehnungscoefficienten α für das gesammte Volumen v, wofür

$$v = v_0(1+\alpha t)$$

gilt, und mittelst des Ausdehnungscoefficienten $\alpha' = 1/273$ für das Volumen $(v-\omega)$, entsprechend der Beziehung

$$v-\omega=(v_0-\omega_0)\left(1+\frac{t}{273}\right).$$

1) W. Meyerhoffer in Ostwald's Ztsch. f. phys. Chem. VII. S. 544 ff. Über das Entropie-Princip siehe M. Planck, Wied. Ann. Bd. 31 u. 32, ferner L. Dressel, Lehrb. d. Phys. S. 310 ff. u. S. 685.

Durch Elimination von v aus beiden Gleichungen folgt

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{v_0 t} + \frac{v_0 - \omega_0}{273 \cdot v_0}.$$

Benützt man auch den Ausdehnungscoefficienten β für das Volumen ω, indem man annimmt

$$\omega = \omega_0(1 + \beta t),$$

so wird

$$\alpha = \frac{\omega_0}{v_0}\beta + \frac{v_0 - \omega_0}{273 \cdot v_0}.$$

Der Ausdehnungscoefficient α ist also abhängig von dem Ausdehnungscoefficienten β des Molecülvolumens ω; ist dieser constant, so ist auch α constant. Wird β negativ, so kann auch α negativ werden; der Fall ist anwendbar auf die Erwärmung des Wassers zwischen 0^0 und 4^0 C. Eine Zusammenziehung des Wassers wäre hiernach durch eine Abnahme des Molecülvolumens ω zu erklären. Der Energieraum $(v - \omega)$ würde sich dabei regelmässig ausdehnen. —

Da das anormale Verhalten des Wassers besonders in der Nähe des Schmelzpunktes stattfindet, wo nach E. Wiedemann der Schmelzprocess noch theilweise fortdauert, und da das Eis aus nadelförmigen Krystallen gebildet wird, zwischen denen sich Hohlräume befinden, so schliesst die Grösse ω auch die Hohlräume in sich, und mit dem Verschwinden dieser muss sich ω verkleinern. Aber auch eine Änderung der Molecüle durch Umlagerung der Atome, ein Zusammentreten mehrerer Molecüle zu einem einzigen oder umgekehrt eine Zerlegung ist höchst wahrscheinlich. Solche Anderungen in der Molecülgruppierung und die damit verbundene Änderung des Molecülvolumens ω dürften auch die Ursache der unregelmässigen Ausdehnung des Wassers bei höheren Temperaturen sein. Die Verschiedenheit im chemischen Verhalten, die verschiedene Lösungskraft bei verschiedenen Temperaturen sprechen deutlich dafür.

Ähnliche Anomalien wie das Wasser zeigen auch Jodsilber und andere Jodsalze, gewisse Sorten des Schwefels, die leicht flüssigen Metalllegierungen und die Alaune. Auch bei diesen Stoffen müssen Übergänge in andere Modificationen, Polymerisationen und Depolymerisationen besonders in der Nähe des Schmelzpunktes angenommen werden.

In der vorstehenden Gleichung erscheint auch β durch den Ausdehnungscoefficienten α bestimmt; dehnt sich ein Körper regelmässig aus, so erleidet auch β keine Veränderung.

Es ist nicht möglich, aus der Gleichung Werte für β zu berechnen, weil auch ω_0 unbekannt ist. Wohl aber kann man unter gewissen Annahmen für β Werte für ω_0 finden. Es liegt die Voraussetzung nahe, dass bei einem Körper, der sich regelmässig ausdehnt,

keine Molecularveränderung vor sich gehe, dass also $\beta = 0$ sei; unter dieser Voraussetzung wird

$$\frac{v_0}{v_0 - \omega_0} = \frac{1}{273\,\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{\omega_0}{v_0} = 1 - 273\,\alpha.$$

Dieselbe Bedingung folgt durch Differentiation der Zustandsgleichung nach v und T, wenn ω und R' als Constante betrachtet werden, und durch Einführung des Ausdehnungscoefficienten α. Sie trifft zunächst für vollkommene Gase zu, für die $\alpha = 1/273$ und somit $\omega_0 = 0$ ist.

Benützen wir die Gleichung auch für einige andere Körper, so erhalten wir für

Äthyläther	bei 0° C,	$\alpha = \frac{1}{676}$,	$\frac{\omega}{v} =$	0·596
Schwefelkohlenstoff	„ „	„ $\frac{1}{877}$,	„	0·688
Äthylalkohol	„ „	„ $\frac{1}{961}$,	„	0·716
Quecksilber	„ „	„ $\frac{1}{5500}$,	„	0·950
Blei	„ „	„ $\frac{3}{35100}$,	„	0·976
Silber	„ „	„ $\frac{3}{52400}$,	„	0·984
Kupfer	„ „	„ $\frac{3}{58200}$,	„	0·986
Glas	„ „	„ $\frac{3}{116100}$,	„	0·993
Platin	„ „	„ $\frac{3}{116700}$,	„	0·9977.

Einige in ähnlicher Weise berechnete Werte für Wasser weisen auf eine grosse Veränderlichkeit von ω hin; so ist für

Eis	bei $-10°$ C,	$\alpha = \frac{1}{6410}$,	$\frac{\omega}{v} =$	0·9587
Wasser	„ 14° C,	„ $\frac{1}{14300}$,	„	0·981
Wasser	„ 100° C,	„ $\frac{1}{2200}$,	„	0·876.

b) Die absolute Temperatur. (W. Thomson [Lord Kelvin] 1854.) In den §§ 77 und 78 wurde für die Arbeit eines umkehrbaren Kreisprocesses der Ausdruck ermittelt

$$W = J(Q_1 - Q_2)$$

und als Beziehung zwischen der zugeführten und abgeleiteten Wärme und deren Temperaturen gefunden

$$\frac{Q_1}{\frac{1}{\alpha'}+t_1}=\frac{Q_2}{\frac{1}{\alpha'}+t_2}=\text{const.}$$

Es zeigte sich, dass dieselbe Beziehung auch für alle anderen Körper gilt, und dass somit die Temperaturfunction

$$\frac{1}{\alpha'}+t=T$$

allgemeine Giltigkeit besitzt. Darnach kann die Temperatur im dynamischen Masse gemessen werden, wenn T als Temperaturmass betrachtet wird. Aus der Betrachtung über den zweiten Hauptsatz, speciell aus der vorstehenden Beziehung folgt für die Temperaturänderung

$$dT=\frac{T_1}{Q_1}\cdot dQ=\text{const.}\times dW.$$

Die Temperaturänderung ist also der Arbeitsleistung bei einem umkehrbaren Kreisprocesse proportional. Gleichen Temperaturänderungen entsprechen gleiche Arbeitsleistungen. Mit Rücksicht darauf lässt sich eine absolute Temperaturscala verfertigen, die von der Art des Körpers unabhängig ist. Die vollkommenen Gase liefern durch ihre Volumsänderung eine dieser Forderung entsprechende Scala, und die Anwendung der Zustandsgleichung zur Berechnung der Arbeit beim umkehrbaren Kreisprocess hat ergeben, dass ebenso wie die Gase auch das Energievolumen $(v-\omega)$ anderer Körper sich ausdehnt, dass also

$$\frac{1}{\alpha'}+t=273+t=T$$

die absolute Temperatur darstellt.

c) Der Cohäsionsdruck. Um einen Wert für den Druck, unter welchem das Körpervolumen steht, zu erhalten, unterwerfen wir den Körper bei constantem Volumen einer verschwindend kleinen Temperatur- beziehungsweise Druckänderung. Dabei bleibt v und somit auch P und ω unverändert, und auch R' betrachten wir als constant. Die Zustandsgleichung ergibt somit die Beziehung

$$(v-\omega)\cdot dp=R'\cdot dT$$

oder

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_v=\frac{R'}{v-\omega}=\frac{P+p}{T}.$$

Mit Benützung des cubischen Compressionscoefficienten $\varkappa$, für welchen die Gleichung gilt

$$\varkappa\cdot dv=-v\cdot dp$$

und der Ausdehnung

$$dv=\alpha\cdot v_0\cdot dt=\frac{\alpha v}{1+\alpha t}\,dt,$$

die ebenso gross sei als die Compression, erhalten wir für den gesuchten Druck den bereits von E. Dühring angegebenen Wert

$$P + p = \frac{\varkappa \cdot T}{\frac{1}{\alpha} + t}.$$

Bei festen Körpern ist $\varkappa$ zu ermitteln aus dem Elasticitätsmodul E und dem Verhältnisse ε der Änderungen der Länge zur Dicke des durch Zug oder Druck in Anspruch genommenen Körpers. Wirkt auf die ganze Oberfläche ein gleicher Druck, so ist $\varkappa = E/3(1-2\varepsilon)$; wirkt nur ein Zug oder Druck der Länge nach auf einen prismatischen Körper, so ist $\varkappa = E/(1-2\varepsilon)$. (Vgl. § 49a, S. 174.) Wir setzen nach Wertheim $\varepsilon = 1/3$; damit wird im ersten Falle $\varkappa = E$.

Zur Berechnung specieller Werte wäre die Kenntnis von $\varkappa$ und α, bezogen auf einen und denselben Körperzustand, erforderlich; da aber solche Messungen nicht bekannt und beide Grössen von den molecularen Zuständen wesentlich abhängig sind, so werden die Resultate mit bekannten Angaben für $\varkappa$ und α nur näherungsweise Geltung beanspruchen können. In folgender Zusammenstellung werden für $\varkappa$ die im § 48 und für α die vorstehend unter (a) angegebenen Werte verwendet[1]). Damit erhält man für

Äther, wenn $\varkappa = 7400$, bei 0° C $P = 2980$ kg/cm²

Alkohol, $\varkappa = 12500$, $P = 3550$ kg

Schwefelkohlenstoff, wenn $\varkappa = 11360$, $P_1 = 3540$,
und wenn $\varkappa = 18500$, $P_2 = 5930$ kg

Quecksilber, $\varkappa = 339000$, bei 0° C $P = 16820$ kg

Silber, $\varkappa = 71400$, $P = 11100$ kg

Kupfer, $\varkappa = 105090$, $P_1 = 14800$ kg
und wenn $\varkappa = 17170$, $P_2 = 24200$ kg

Platin, $\varkappa = 15518$, $P = 10900$ kg

Glas, $\varkappa = 6722$, $P_1 = 4700$,
und wenn $\varkappa = 3880$, $P_2 = 2740$ kg/cm².

Für Wasser erhält man namentlich wegen der Veränderlichkeit des Ausdehnungscoefficienten bei den verschiedenen Temperaturen sehr verschiedene Werte; so z. B. bei ca. 14° C $P = 430$ kg und bei 100° C $P = 4000$ kg. Mit diesen Resultaten stimmen die später aus der Verdampfungswärme zu berechnenden Werte nicht überein, indem diese bedeutend grösser sind. Wohl aber stehen für die anderen Flüssigkeiten die ebenfalls aus den Verdampfungswärmen abzuleiten-

1) Angegebene zweite Werte von $\varkappa$ sind Winkelmanns Handb. d. Phys. entnommen.

den Werte, die später angegeben werden sollen, mit den vorstehenden in gutem Einklange. Die von van der Waals berechneten Werte sind von jenen ungefähr die Hälfte[1]).

Im ganzen dürfen die Werte nur als Näherungswerte gelten, weil die benützten Compressionscoefficienten unsicher sind, und weil, wie bereits bemerkt wurde, die verwendeten Compressionscoefficienten und die Ausdehnungscoefficienten, strenge genommen, nicht zusammengehörige Grössen sind.

d) Die specifische Wärme c_v. Wenn man in der Zustandsgleichung den gesammten Druck $(P+p)$ mittelst des Ausdehnungs- und Compressionscoefficienten in der oben angegebenen Weise darstellt, so kann man darnach einen zur Berechnung brauchbaren Wert für die specifische Wärme bei constantem Volumen c_v finden; man erhält nämlich nach § 75, S. 255 aus der Gleichung

$$(P+p)v = R\left(\frac{1}{\alpha}+t\right)$$

$$R = \frac{(P+p)v}{\frac{1}{\alpha}(1+\alpha t)} = \frac{\alpha^2 \cdot \varkappa \cdot T \cdot v}{(1+\alpha t)^2}$$

und darnach

$$c_v = c_p - \frac{\alpha^2 \cdot \varkappa \cdot T \cdot v}{J(1+\alpha t)^2}.$$

Da der Ausdehnungscoefficient α in der zweiten Potenz erscheint, so ist R stets positiv, also $c_p > c_v$. Besondere Werte ergeben für

Äther	bei $T = 273^0$,	$c_p = 0{\cdot}3725$,	$c_v = 0{\cdot}3455$,	$c_p/c_v = 1{\cdot}078$
Schwefelkohlenstoff	„ „	„ 0·1315,	„ 0·1054,	„ 1·248
Quecksilber	„ „	„ 0·0245,	„ 0·0147,	„ 1·66 .

Die specifische Wärme bei constantem Volumen wird dazu benützt, um das Dulong-Petit'sche Gesetz von der Gleichheit der Atomwärme zur Temperaturerhöhung um einen Grad nachzuweisen. Umfassende Versuche und Berechnungen von Regnault, E. Wiedemann u. a. haben aber gezeigt, dass die so berechneten Atomwärmen nicht constant sind, sondern dass sie bei verschiedenen Stoffen und auch bei einem und demselben Stoffe bei verschiedenen Temperaturen etwas verschieden sind. So erhält man z. B. für Schwefelkohlenstoff, wenn man c_v mit dem Moleculargewichte 76 multipliciert und durch die Atomzahl 3 dividiert, die Atomwärme 2·67; für Äther erhält man aus c_v, dem Moleculargewichte 74 und der Atomzahl 15 die Atomwärme 1·70 und bei höherer Temperatur 3·05. Der einatomige

1) Van der Waals, die Continuität d. gasf. u. flüssg. Zustd. S. 165.

Quecksilberdampf liefert 2·94 [1]). Dieser letztere Wert sollte allen Atomwärmen zukommen. Da es nicht der Fall ist, so folgt, dass unter den gemachten Annahmen das Gesetz von Dulong und Petit nicht ganz richtig ist. Will man indessen doch an demselben festhalten, so muss man schliessen, dass c_v noch nicht die wahre specifische Wärme oder die Wärmecapacität ist, die im Sinne von Clausius nur zur Vermehrung der lebendigen Kraft der Atome dient, sondern dass darin auch ein Äquivalent von Moleculararbeit enthalten ist.

Für feste Körper kann man die im Vorstehenden (c) berechneten Cohäsionsdrücke benützen, und man erhält damit:

Quecksilber,	Dichte = 13·6 ,	$c_p - c_v$ =	0·0052
Kupfer,	„ 8·88	„ „	0·0020
Silber,	„ 10·47	„ „	0·0017.

Für Gase, deren Cohäsionsdruck P vernachlässigt werden darf, kann die Differenz der specifischen Wärmen $R = J(c_p - c_v)$ direct aus dem Charles-Boyle'schen Gesetze berechnet werden. Man erhält für die Gewichtseinheit eines solchen Gases

$$R = \frac{p \cdot v}{T} = \frac{p_0 \cdot v_0}{273} = \frac{p_0}{273 \cdot d_0},$$

und für ein Gewicht, das mittelst der Anzahl n der Gasatome und dem Atomgewichte m bestimmt werden mag,

$$n \cdot m \cdot R = \frac{p \cdot v_0}{273}.$$

Für Wasserstoff ist $R/J = 3{\cdot}4240 - 2{\cdot}4269 = 0{\cdot}9971$ und $m = 1$, daher $\frac{mR}{J} \doteq 1$

„ Sauerstoff „ „ $0{\cdot}2185 - 0{\cdot}1563 = 0{\cdot}0622$ und $m = 16$, daher $\frac{mR}{J} \doteq 1$

„ Stickstoff „ „ $0{\cdot}2446 - 0{\cdot}1738 = 0{\cdot}0708$ und $m = 14$, daher $\frac{mR}{J} \doteq 1$.

Den Gasen kommt also die gleiche Atomwärme mR zu. Haben die Gase auch noch gleiche Volumen, gleichen Druck und gleiche Temperatur, so muss nothwendig auch n gleich sein, d. h. haben verschiedene Gase gleichen Druck und gleiche Temperatur, so enthalten gleiche Volumen auch gleich viele Atome. Die Erweiterung dieses Satzes auf alle Gase gibt das Gesetz von Avogadro.

Da die Atom- und Moleculargewichte nur Verhältniszahlen sind, so nimmt man gewöhnlich den für das Moleculargewicht m gil-

1) Winkelmanns Handb. d. Phys. S. 387 u. 392.

tigen Wert $m \cdot R = 2$ als allgemeine Gasconstante an und gewinnt damit für das Charles-Boyle'sche Gesetz folgende einfache Form

$$p \cdot v = 2 \cdot n \cdot J \cdot T,$$

worin n die Anzahl der Gasmolecüle bedeutet.

Ähnliche Betrachtungen wie für Gase lassen sich auch für andere homogene Körper mittelst der Zustandsgleichung anstellen; auch für diese erhält R' denselben Wert, wenn der gleiche Energieraum $(v - \omega)$ unter gleichem Druck $(P + p)$ steht; und E. Dühring hat (in seiner Schrift: Neue Grundgesetze d. Phys. u. Chem.) auch das Avogadro'sche Gesetz für allgemein geltend erklärt. Würde auch für flüssige und feste Körper im Wärmemasse gemessen $m \cdot R' = 1$ sein, so liessen sich hiernach die Molecülgewichte dieser Körper berechnen. Nach dem unter (a), S. 267 angegebenen Ausdruck für

$$(v_0 - \omega_0)/v_0 = 273\,\alpha$$

wird

$$R' = R(v_0 - \omega_0)/273\,\alpha v_0 = R,$$

und wir erhalten die hypothetischen Werte $m = 1/R$ für Quecksilber $= 200$, Kupfer $= 500 \doteq 63 \cdot 8$, Silber $= 590 \doteq 108 \cdot 5$.

Darnach bestände das flüssige Quecksilber aus denselben Molecülen wie das gasförmige, die Molecüle des festen Kupfers wären aber aus acht und jene des festen Silbers aus fünf Gasmolecülen zusammengesetzt.

e) Bestimmung von c_p/c_v mittelst der Schallgeschwindigkeit[1]. Nach Newton kann man das in § 54, S. 190 abgeleitete Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen in elastischen festen Körpern näherungsweise auch für Gase anwenden. Laplace hat jedoch gezeigt, dass die betreffenden Ausdrücke zu Resultaten führen, die von der wahren Grösse der Fortpflanzungsgeschwindigkeit um den Factor $\sqrt{1 \cdot 4} = \sqrt{c_p/c_v}$ abweichen. Da das Gesetz von Laplace den Wert $\varkappa = c_p/c_v$ zu berechnen gestattet, so soll es im Folgenden entwickelt werden.

Die Annahmen für die Ableitungen sollen dieselben sein, wie jene im § 54. Wir betrachten eine Luftsäule, deren Achse mit der Fortpflanzungsrichtung der Welle zusammenfalle, und fassen drei in unendlich nahen Abständen dx liegende Querschnitte, beziehungsweise die zwischenliegenden Luftschichten ins Auge. Ist der Querschnitt des Cylinders gleich der Flächeneinheit, dann gilt für eine Luftschichte nach dem Spannungsgesetze die Gleichung

$$p \cdot dx = p_0 \cdot dx_0 \cdot \alpha \cdot T,$$

wobei p die Spannung, α den Ausdehnungscoefficienten und T die absolute Temperatur der Luft bedeuten. Werden nun infolge der an-

1) Siehe meine Abhdlg. in d. Ztsch. f. d. Rlschw. Wien 1883. S. 595.

kommenden Welle die Querschnitte verschoben, so werden die Spannung um dp, das Volumen dx um $d\xi$ und die Temperatur um dt geändert, und man erhält mit Bezug auf das negative Vorzeichen für $d\xi$

$$dp \cdot dx - p \cdot d\xi = p_0 \cdot dx_0 \cdot \alpha \cdot dt.$$

Die Temperaturerhöhung dt erhält man aus dem ersten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie, den man auf die hier stattfindende adiabatische Zustandsänderung anwendet, nämlich aus

$$0 = J \cdot dx_0 \cdot f \cdot c_v \cdot dt - p \cdot d\xi, \quad f = \text{spec. Gew.}$$

Damit wird

$$dp = \frac{p \cdot d\xi}{dx}\left[1 + \frac{p_0 \cdot \alpha}{J \cdot f \cdot c_v}\right].$$

Das letzte Glied in der Klammer lässt sich nach dem Gasspannungsgesetze anders gestalten; es ist

$$f \cdot R = f \cdot J(c_p - c_v) = p_0 \cdot \alpha.$$

Mit Rücksicht darauf, und wenn man für $c_p/c_v = \varkappa$ setzt, wird

$$dp = \varkappa \cdot p \cdot \frac{d\xi}{dx}.$$

In der Nachbarschichte findet derselbe Compressionsprocess statt. Die hier auftretende Druckvermehrung ist analog

$$dp' = \varkappa \cdot p \cdot \frac{d\xi'}{dx}.$$

Der Überdruck wirkt auf die vorhergehende Schichte zurück und die Differenz $d^2p = (dp - dp')$ ist die die Schichte zu longitudinalen Schwingungen anregende Kraft; sie ist

$$d^2p = \varkappa \cdot p \cdot \frac{d^2\xi}{dx}.$$

Bei dem Vergleiche dieses Ausdruckes mit dem für die bewegende Kraft in § 54, S. 190 finden wir für den Elasticitätsmodul E hier $\varkappa \cdot p$. Da die weiteren Entwickelungen von dort sich auch hier geltend machen lassen, so erhalten wir mit Hilfe der angedeuteten Substitution sofort die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in Gasen, speciell in der Luft

$$c = \sqrt{\varkappa \frac{p}{\delta}}.$$

Daraus wird

$$\varkappa = \frac{c^2 \cdot \delta}{p} = \frac{(332{\cdot}4)^2 \cdot 1{\cdot}293}{10333 \cdot 9{\cdot}81} = 1{\cdot}41.$$

Mittelst dieses Wertes kann nun auch das mechanische Äquivalent J der Wärme berechnet werden. Aus dem Gasspannungsgesetze ergibt sich R, und $R = J(c_p - c_v)$. Daraus folgt $J = R/(c_p - c_v)$.

§ 80. **Latente Ausdehnungswärme** (Clapeyron 1834). Dieselbe ergibt sich aus der Verbindung des ersten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie mit der Zustandsgleichung. Clapeyron folgerte den betreffenden Ausdruck aus dem Carnot'schen Principe. Nach dem ersten Hauptsatze ist eine Wärmeänderung, welche nur zur Ausdehnung und nicht zu einer Temperaturänderung dient,

$$dQ = \frac{1}{J}(P + p) \cdot dv,$$

und aus der Zustandsgleichung folgt (vgl. auch § 79c)

$$(P + p) = \frac{R'T}{v - \omega} = T \cdot \left(\frac{dp}{dt}\right)_v,$$

daher ist die latente Ausdehnungswärme für eine Volumseinheit

$$q = \frac{dQ}{dv} = \frac{T}{J} \cdot \left(\frac{dp}{dT}\right)_v.$$

Das Gesetz findet Anwendung zur Bestimmung der Gefrierpunktserniedrigung und der Siedepunktserhöhung unter erhöhtem Drucke.

§ 81. **Gleichung von Thomson** (1853). Dieselbe gibt die Grössenbeziehungen bei einer adiabatischen Zustandsänderung eines Körpers an. Um sie in einfacher Weise zu gewinnen, stellen wir zunächst eine Wärmeänderung dQ durch Temperatur und Druck als unabhängig Veränderliche in ähnlicher Weise dar, wie beim ersten Hauptsatze (§ 74) durch Temperatur und Volumen. Es ist

$$dQ = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_p \cdot dt + \left(\frac{dQ}{dp}\right)_t \cdot dp$$
$$= c_p \cdot dt + \frac{1}{J}(v - \omega) \cdot dp.$$

Die Bedeutung des ersten Differentialquotienten folgt aus dem Begriffe der specifischen Wärme bei constantem Drucke, jene des zweiten aus dessen Bedeutung als Extensitätsfactor der Energie, beziehungsweise aus der hydrostatischen Grundgleichung. Bei einer adiabatischen Zustandsänderung ist nun $dQ = 0$, folglich besteht die Gleichung

$$c_p \cdot dt = -\frac{1}{J}(v - \omega) \cdot dp.$$

Nun ist bei constanter Temperatur die Arbeit

$$(v - \omega) \cdot dp = (P + p) \cdot dv,$$

ferner ist nach S. 268, c)

$$(P + p) \cdot dt = T \cdot dp$$

und damit wird

$$J \cdot c_p . dt = - T \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right) \cdot dp.$$

Dies ist die Thomson'sche Gleichung. Wird dieselbe auf die Dehnung eines Stabes angewendet, so kann man setzen

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = \left(\frac{dl}{dt}\right) = \alpha \cdot l = \frac{\alpha}{f},$$

wenn f das Gewicht der Längeneinheit des Stabes angibt, und man erhält

$$dt = -\frac{T \cdot \alpha}{J \,.\, c_p \cdot f} \cdot dp \,.$$

Diese Form wurde zuerst von Joule (1859) experimentell geprüft. Sie gab richtige Resultate; so z. B. beim Kautschuk. Wenn derselbe durch eine grössere Kraft gedehnt ist, so verkürzt er sich beim Erwärmen und verlängert sich bei der Abkühlung; der Differentialquotient (dv/dt) oder α ist in diesem Falle negativ. Dementsprechend zeigt der Kautschuk auch die Eigenschaft, dass er bei starker Dehnung durch Zunahme der Dehnung sich erwärmt, sowie es die Gleichung verlangt. Für Wasser zwischen 0° und 4° hat Joule das Gesetz ziffermässig richtig befunden. Für Metalldrähte hat Haga den Nachweis der Richtigkeit geliefert [1]).

§ 82. **Schmelzen.** a) Schmelzpunkt und Schmelzwärme. Dass Eis und viele andere feste Körper durch die Wärme in den flüssigen Zustand übergeführt werden können, war zu allen Zeiten bekannt. Genauere Bestimmungen über die Erscheinung des Schmelzens erfolgten aber erst in den letzten Jahrhunderten. Deluc liess im Winter 1754/55 Wasser in einem Glase gefrieren, in welches er ein Thermometer gestellt hatte. Wenn er das Gefäss ans Feuer brachte, so stieg die Temperatur nur solange, bis das Eis zu schmelzen anfieng; dann wurde alle Wärme verschluckt und das Thermometer blieb auf 0° stehen, solange noch schmelzendes Eis vorhanden war. Die Temperatur, bei welcher das Schmelzen stattfindet, heisst Schmelzpunkt. Einige Schmelzpunkte sind: für Quecksilber — 39° C, Eis 0° C, Butter 32° C, Wachs 58° C, Zinn 220° C, Wismut 265° C, Blei 325° C, Zink 420° C, Kupfer 1050° C, Schmiedeeisen 1600° C, Platin 1775° C.

Metalllegierungen haben meist einen niederen Schmelzpunkt als ihre Bestandtheile, z. B. Rose's Metall, bestehend aus Wismut, Zinn und Blei, 94·5° C.

Black fand (1757), dass beim Eintauchen einer Eismasse in warmes Wasser die Mischung nicht die mittlere Temperatur annahm, sondern dass eine bedeutende Wärmemenge dazu verbraucht wurde, um das Eis zu schmelzen. Wenn man 1 kg Eis von 0° C in 1 kg Wasser von 80° C gibt, so reichen die 80 Calorien des letzteren eben

1) Siehe Winkelmann, Hdb. d. Phys. II. S. 476.

hin, um das Eis zum Schmelzen zu bringen. Das Ergebnis des Vorganges ist, dass das Eis in Wasser verwandelt wurde, und dass beide Kilogramme Wasser schliesslich die Temperatur von 0^0 C haben. Die zum Schmelzen verbrauchte Wärme nennt Black latente oder gebundene Wärme; sie wird heute allgemein Schmelzwärme genannt. Die Bestimmung derselben geschieht mittelst der eben angedeuteten, von Black angegebenen Mischungsmethode; sie ist für Eis = 80 Cal für 1 kg.

Das Schmelzen ist ein umkehrbarer Process. Wenn man einer Flüssigkeit, die bis zum Schmelzpunkt abgekühlt ist, Wärme entzieht, so erstarrt sie; der Vorgang heisst Erstarrung, die betreffende Temperatur der Erstarrungspunkt und die Wärme, welche der Flüssigkeit entzogen wird, ohne die Temperatur zu ändern, die Erstarrungswärme. Das Wasser gefriert oder erstarrt bei 0^0 C, und jedes Kilogramm desselben gibt während des Erstarrens ungefähr 80 Cal Wärme ab.

Eine Beziehung zwischen Schmelzpunkt und Druck liefert die Gleichung für die latente Ausdehnungswärme (§ 80); dieselbe lautet

$$\frac{dQ}{dv} = \frac{T}{J} \cdot \left(\frac{dp}{dT}\right)_v .$$

Bezogen auf den Schmelzprocess bedeutet dQ die Schmelzwärme, dv die Volumänderung beim Schmelzen und $(dp/dT)_v$ das Verhältnis der Änderungen des äusseren Druckes p und der Schmelztemperatur T. Da man durch Erwärmung beliebig viel Eis in Wasser verwandeln, also das Volumen ändern kann, während p und T constant bleiben, so sind letztere Grössen von v unabhängig und das Verhältnis dp/dT gilt ohne Vorbehalt. Man erhält demnach für die Änderung des Schmelzpunktes infolge einer Druckänderung das Gesetz

$$dT = \frac{T \cdot dv}{J \cdot dQ} \cdot dp .$$

Für die speciellen Werte $dp = 1$ Atm. = 1033 g, $dv = -0{\cdot}09\ \mathrm{cm}^3$, $dQ = 80$ g-cal, $J = 42700$ gcm und $T = 273^0$ wird $dT = -0{\cdot}0074^0$ C. Durch Druckerhöhung um 1 Atm. wird somit der Schmelz- oder Erstarrungspunkt des Eises um $0{\cdot}0074^0$ C erniedrigt. Darauf beruht die Regelation des Eises (Faraday 1850) bei Gletschern. In den Punkten des stärksten Druckes schmilzt das Eis und der Gletscher gibt nach; bei Verschiebung des Druckes gefriert das Wasser wieder. Der Gletscher zeigt infolge dessen das Verhalten einer zähen Flüssigkeit, er vermag in seiner Bewegung allen Thalformen zu folgen.

Ein ähnliches Verhalten wie Wasser zeigen Wismut, Gusseisen und nach Nies und Winkelmann Zink, Kupfer und Antimon, ferner Schwefelwismut und Kaliumnitrat.

Dagegen tritt eine Volumsvermehrung beim Schmelzen ein, und

der Schmelzpunkt wird nach dem vorstehenden Gesetze durch Druck erhöht bei Blei, Cadmium, Zinn, Schwefel, Phosphor, Kalium, Natrium, Quecksilber, Paraffin, Wachs u. a.

b) Erklärung des Schmelzens. Es wurde bereits (§ 72, S. 245) angeführt, dass man nach Clausius annimmt, die Molecüle fester Körper bewegen sich um Gleichgewichtslagen, ohne diese ganz zu verlassen, und ausser den vibrierenden Bewegungen der Molecüle bestehen auch noch Schwingungen der Atome. Im flüssigen Zustande machen die Molecüle so lebhafte Bewegungen, dass sie von der Cohäsion nicht an bestimmten Orten gehalten werden können, sondern dass sie immer in neue Lagen zueinander kommen. Die Cohäsion soll bei den Flüssigkeiten wesentlich vermindert sein. Schon Clausius hat bei Erklärung der Electrolyse darauf hingewiesen, dass die Molecüle einer Flüssigkeit in Theile, etwa auch in ihre Atome zersetzt gedacht werden müssen, und in neuester Zeit wird aus der van't Hoff'schen Theorie des osmotischen Druckes gefolgert, dass die Salzmolecüle in verdünnten Lösungen sich im gasförmigen Zustande befinden. Darauf gestützt, nimmt man gegenwärtig ziemlich allgemein an, dass die Molecüle einer Flüssigkeit ähnliche Bewegungen ausführen, wie es die kinetische Gastheorie von den Gasmolecülen lehrt.

Beim Schmelzen findet ein Übergang vom festen zum flüssigen Zustande statt. Dabei erfolgt nach dem Gesagten eine Zerlegung der Molecülgruppen in einzelne Molecüle oder auch in Theilmolecüle, und diese beginnen eine lebhafte fortschreitende Bewegung, die durch häufige Zusammenstösse nur ihrer Richtung nach geändert wird.

Durch Zerlegung der Molecülgruppen und durch Depolymerisation kann die Volumsänderung beim Schmelzen erklärt werden. Es mag z. B. ein Doppelmolecül in zwei Theile zerfallen; alsdann ist leicht ersichtlich, dass etwa vier unzerlegte Doppelmolecüle bei der Theilung sich auf einen grösseren oder kleineren Raum ausbreiten können, als ihre acht Theile. Es ist der Unterschied zwischen den Theilchen im festen und flüssigen Zustande etwa so aufzufassen, wie jener zwischen einem Sand- und einem Staubhaufen; der letztere kann bei gleicher Masse einen grösseren oder geringeren Raum einnehmen als der erstere. Der Vergleich wird bei jenen Körpern, die im Inneren Hohlräume enthalten, wie z. B. bei den Krystallen, gut zutreffen; bei diesen kann dann eine Volumsverminderung durch eine Ausdehnung nach innen erklärt werden.

Auch die verhältnismässig grosse Schmelzwärme lässt sich durch die Arbeit der Molecülzerlegung erklären. Ferner wird damit die Veränderung der Grössen ω und R' in der Zustandsgleichung (§ 79a und d) begründet, und die leichte Verschiebbarkeit der Flüssigkeitstheilchen und die geringe Oberflächenenergie $\left(H = \frac{1}{2} P\sigma\right)$

der Flüssigkeiten werden als Folgen der kleineren Molecüldimensionen (σ) leicht begreiflich (§ 59, S. 206).

Nicht so widerspruchsfrei gestaltet sich die Anwendung der Hypothese von Clausius auf die Änderung der Cohäsion. Dass die Molecüle in der Flüssigkeit sich so weit von einander entfernen, dass dadurch der Zusammenhang wesentlich gelockert werde, kann darum nicht angenommen werden, weil bei allen untersuchten Körpern die Dichte im festen Zustande nur wenig anders ist, als im flüssigen, bei einigen oben genannten Körpern die Dichte im festen Zustande sogar kleiner ist, als im flüssigen. Auch die lebendige Kraft der Massentheilchen kann in beiden Zusammenhangsformen nicht so wesentlich verschieden sein, dass der kinetische Zustand der Flüssigkeitsmolecüle damit begründet wäre; denn die Temperatur, das Mass der lebendigen Kraft, bleibt ja während des Schmelzens unverändert. Ausserdem wurde auf Grund der Compressionscoefficienten (§ 48) darauf hingewiesen und im § 79c, S. 269 genauer ermittelt, dass die Cohäsion, nämlich der Druck auf die Flächeneinheit infolge der Molecularanziehung, bei Flüssigkeiten von der Grössenordnung der festen Körper ist, z. B. bei Alkohol 3550 kg/cm², bei Quecksilber 16820 kg/cm², bei Silber 11100, bei Platin 10900 kg/cm². Van der Waals und J. Stefan kommen zu ähnlichen Resultaten; die Berechnung der letzteren mittelst der Verdampfungswärme soll unter den Aufgaben des folgenden Paragraphen angegeben werden.

Mit Rücksicht auf diese Umstände und mit Bezug auf den elektrischen Zustand, in welchen Flüssigkeiten versetzt werden können, wollen wir die für feste Körper angegebene Hypothese (§ 72b, S. 246) auch hier verwenden, um ein Bild für den Vorgang beim Schmelzen zu gewinnen.

Nach unserer Hypothese ist ein moleculares Kraftfeld um jedes Molecül Träger der Cohäsion, und die lebendige Kraft einer Wirbelbewegung der Molecüle ist die Wärme. Wir beschränken damit gewissermassen die kinetische Theorie auf den Raum jedes einzelnen Molecüles. Im festen Zustande sind die Molecüle grösser und sind weiter von einander entfernt; die Stärke des Kraftfeldes zwischen den Molecülen ist nicht constant, sondern von Punkt zu Punkt verschieden. Bei Verschiebung eines Molecüles wird eine grössere Masse einer grösseren Kraftänderung unterworfen; die Kraft wächst rasch bei Annäherung an ein Nachbarmolecül, und die geleistete Arbeit wird in lebendige Kraft der Wirbelbewegung, beziehungsweise in Wärme umgesetzt. Wird angenommen, dass die genäherten Molecüle an den zugewandten Seiten zusammengedrückt oder abgeplattet werden, so ist ersichtlich, dass die Fliehkraft in den kleineren Kreisen der von einander abgekehrten Seiten grösser wird und die Molecüle wieder in ihre Gleichgewichtslagen zurückziehen muss. Wird beim Schmelzen

jede Molecülgruppe in Einzelmolecüle zerlegt, die sich ungefähr im gleichen Raume ausbreiten wie die festen Molecüle, so treten die Flüssigkeitsmolecüle einander näher, das Kraftfeld wird gleichförmiger, die Kraft zwischen den einzelnen Theilchen wird geringer, aber der Druck auf die Flächeneinheit wird nicht wesentlich geändert. Denkt man sich das moleculare Kraftfeld in ähnlicher Weise wie ein elastisches Kraftfeld (§ 53b und c) durch Ätherverschiebung rings um die Molecüle erzeugt, so folgt leicht, dass die gegen einander gerichteten Verschiebungen der benachbarten Molecülschichten einander gegenseitig aufheben, dass die Intensität des Feldes fast zum Verschwinden gebracht werden kann. Damit lässt sich die leichte Verschiebbarkeit der Flüssigkeitstheilchen erklären, indem der Zustand im Inneren der Flüssigkeit jenem der gasförmigen Körper ähnlich ist. Der Unterschied zwischen dem Verhalten der Molecüle in festen und flüssigen Körpern kann durch einen Vergleich mit zwei einfachen Pendeln erläutert werden, von denen das eine mehr Masse besitzt und kurz ist und das andere eine kleine Masse und eine grosse Länge hat. Um beiden Pendeln eine gleiche Schwingungsweite zu ertheilen, muss auf das erstere eine viel grössere Arbeit verwendet werden als auf das letztere.

Auch die weiteren Thatsachen stehen mit der Hypothese im Einklange: der Cohäsionsdruck auf die Flächeneinheit ist bei demselben Körper im festen und geschmolzenen Zustande nicht wesentlich verschieden; bei Flüssigkeiten macht sich die Intensität des Cohäsionsfeldes nur an der Oberfläche geltend, nur die Oberflächenschichte übt auf das Innere den Moleculardruck aus; bei Vergrösserung der Flüssigkeitsoberfläche ist die nothwendige Arbeit nur gering, weil der Wert für die Oberflächenenergie, als Wert der Raumenergie in der Oberflächenschichte, die Dicke der Schichte als Factor enthält und diese sehr klein ist (§ 59). Bei einer Formveränderung fester Körper ändert sich nicht bloss die Grösse der Oberfläche wie bei Flüssigkeiten, sondern es ist damit auch eine Volumsänderung verbunden, die zumeist eine grosse Arbeit erfordert. Für Wasser ist die Oberflächenenergie pro Flächeneinheit gegeben durch die Oberflächenspannung $= 7{\cdot}7$ und für Schwefelkohlenstoff $= 3{\cdot}3$ mg-cm. Wenn aber z. B. Eisen bei einem Volumen $v = 10\ \mathrm{cm}^3$ infolge einer Deformation eine Volumsänderung um $0{\cdot}0001 \cdot v$ erfährt, so ist die zu überwindende Cohäsionsarbeit $P\,.\,\varDelta v = 13500 \cdot 0{\cdot}1 = 1350$ kgcm; diese Arbeit ist ungefähr das 2-Millionenfache der zur Oberflächenvergrösserung des Wassers um $100\ \mathrm{cm}^2$ nothwendigen Arbeit.

Aufg. 1. Zwei Kilogramm Eis von 0^0 C werden mit 5 kg Wasser von 90^0 gemischt und erzeugen die Mischtemperatur $41{\cdot}6^0$ C; wie gross ist die Schmelzwärme des Eises? — ($79{\cdot}4$ Cal.) **2.** Wie viel Gramm Eis von 0^0 muss man zu 120 g Wasser von 80^0 mischen, damit das Gemisch

sich um 60° abkühle? — (72 g). **3.** Black setzte eine gewisse Quantität Eis einer constanten Temperatur aus und beobachtete, dass sie 20 Min. Zeit zum Schmelzen, dann 25 Min. bis zum Sieden und dann 134 Min. zum Verkochen brauchte; was folgt hieraus für den Wärmeverbrauch beim Schmelzen und beim Sieden? — (Schmelzwärme = 80 Cal, Dampfwärme = 536 Cal.) **4.** Welche Arbeit wird beim Schmelzen von 1 kg Eis verbraucht? — (34160 kgm.) **5.** Wie gross ist die bei der Erstarrung von 1 l Wasser stattfindende Ausdehnung, wenn nach Bunsen das spec. Gew. des Eises = 0·91674 beträgt? — (90·9 cm^3.) **6.** Welche äussere Arbeit wird durch die Ausdehnung von 1 kg Wasser beim Gefrieren in der Luft geleistet? — ($p \cdot \Delta v = 1{\cdot}0328 \cdot 0{\cdot}9 = 0{\cdot}9388$ kgm.) **7.** Durch welchen Druck wird der Gefrierpunkt um 1° niedriger? — (135 kg.) **8.** Die vorhergehende Frage kann auch mittelst folgender Daten gelöst werden: Der cubische Ausdehnungscoefficient des Eises ist 0·00015426; durch Druck werde die Ausdehnung des Eises nicht bis zu 1·09, sondern nur um 0·00015426 weniger gestattet, und die Zusammendrückbarkeit des Eises sei 1 Milliontel durch 1 Atm. — (Man erhält 154 Atm.) **9.** Wie viel Wasser erstarrt, wenn 6 kg bis auf — 12° unterkühlt sind, und wenn das Gefrieren durch einen Anstoss erfolgt? — (0·9 kg.) (Reis.)

§ 83. **Verdampfung und Sublimation.** a) Schon bei gewöhnlicher Temperatur gehen die Flüssigkeiten an der Oberfläche in den gasförmigen Zustand über; die Erscheinung heisst Verdunstung. Die Kraft, welche dieselbe hervorruft, ist die Wärme; sie ist unter geeigneten Umständen imstande, an der Oberfläche die Cohäsion zu überwinden. Bei einer bestimmten Temperatur, dem Siedepunkte, tritt die Dampfbildung in der ganzen Flüssigkeit auf, die Flüssigkeit kommt in eine wallende Bewegung, sie siedet.

Ebenso wie zum Schmelzen wird auch zum Verdampfen Wärme verbraucht, welche Verdampfungswärme genannt wird (Black 1762).

Die Siedepunkte einiger Flüssigkeiten bei gewöhnlichem Luftdrucke sind nach Börnstein und Landolt: Zink 930°, Quecksilber 357°, Wasser 100°, Äthylalkohol 78·4°, Schwefelkohlenstoff 46·2°, Äthyläther 34·9°. Einige Verdampfungswärmen sind nach Andrews: Wasser 536 Cal., Alkohol 202, Äther 90·5, Schwefelkohlenstoff 86·7 Cal.

Die angegebenen Siedepunkte gelten nur für den normalen Luftdruck, 760 mm Barometerstand. Ist der Luftdruck grösser, so findet das Sieden erst bei höherer Temperatur statt; so siedet Wasser z. B. unter dem Drucke von 770 mm bei 100·4°, unter 720 mm Druck bei 98·3° C; unter der Luftpumpe siedet es bei 50° C, wenn der Druck ungefähr 90 mm beträgt. Auf der Erhöhung des Siedepunktes durch Druckvermehrung beruht die Anwendung des Papin'schen Topfes.

Das Gesetz der Abhängigkeit des Siedepunktes vom Druck ist dasselbe, wie jenes für die Beziehungen zwischen Schmelzpunkt und

Druck; man hat in diesem anstatt der Schmelzwärme die Verdampfungswärme zu setzen, und die entsprechende Volumsänderung bei der Verdampfung in Rechnung zu ziehen; demnach hat man (S. 276)

$$dT = \frac{T \cdot dv}{J \cdot dQ} \cdot dp\,.$$

Die speciellen Werte $T = 273^0$, $J = 427$ kgm, $dQ = 596{\cdot}8$ Cal und $dv = 205$ ergeben für die Temperatur von 0^0 C das Verhältnis

$$\frac{dp}{dt} = 4{\cdot}55 \text{ kg/m}^2.$$

Das Gesetz über den Zusammenhang von Druck- und Temperaturänderung wird nicht dazu benützt, um eine oder die andere dieser Grössen zu berechnen, sondern um die Dampfwärme dQ bei verschiedenen Temperaturen zu ermitteln. Die Beziehung zwischen Temperatur und Dampfdruck sind aus Versuchen bekannt; der Dampf befindet sich beim Siedepunkt immer im Maximum der Spannkraft und diese Maximalspannungen wurden vielfach gemessen; sie erweisen sich nur von der Temperatur abhängig. Nach Magnus besteht die Gleichung

$$\frac{dp}{dt} = \frac{7{\cdot}4475 \cdot 234{\cdot}69 \cdot 2{\cdot}302585}{(234{\cdot}69 + t)^2} \cdot p\,.$$

Durch Verbindung derselben mit dem vorhergehenden allgemeinen Werte für dp/dt erhält man für die Dampfwärme bei 100^0 C und dem Drucke $p = 760$ mm $dQ = 324$ Cal für 1 m^3 Dampf, oder, da 1 kg Dampf das Volumen $1{\cdot}6504$ m^3 besitzt, $dQ = 536$ Cal für 1 kg.

b) Den Übergang eines festen Körpers in Dampfform nennt man Sublimation. Auch dieser Process geht unter Wärmeverbrauch und bei bestimmter Temperatur vor sich, und es gilt für ihn das vorstehende allgemeine Gesetz zwischen Temperatur und Druck. Die Sublimationswärme ist gleich der Schmelzwärme vermehrt um die Verdampfungswärme; für Eis bei 0^0 C ist sie also

$$80 + 596{\cdot}8 = 676{\cdot}8 \text{ Cal.}$$

Aus der Sublimationswärme $676{\cdot}8$ Cal, ferner aus $T = 273$, $dv = 205$ und $J = 427$ kgm folgt

$$\frac{dp}{dt} = 5{\cdot}16 \text{ kg/m}^2.$$

e) Gleichgewicht der drei Phasen eines Körpers. Die vorstehende allgemeine Gleichung zwischen dp und dT, welche für den Verdampfungsprocess und für die Sublimation geltend gemacht wurde, gibt zugleich die Gleichgewichtsbedingungen für die Fälle, als Dampf und Flüssigkeit, beziehungsweise Dampf und fester Körper mit einander in Berührung stehen. Denkt man für jeden Fall die Gleichung integriert, so erhält man die Bedingungsgleichungen, aus welchen sich für jede Temperatur der zugehörige Dampfdruck

berechnen lässt. Jeder Gleichung entspricht eine Curve, die sogenannte Dampfspannungscurve, deren Coordinaten durch p und T gegeben sind. Beide Gleichungen geben zwei Curven, deren Schnittpunkt den Druck und die Temperatur bestimmt, bei welcher alle drei Phasen eines Körpers, der feste, flüssige und dampfförmige, gleichzeitig neben einander bestehen oder im Gleichgewichte sind. Es besteht nur ein solcher Punkt des Gleichgewichtes; beim Wasser ist es nahezu der Eispunkt, genauer 0·0075° C bei 4·57 mm Druck[1]). Die beiden Dampfspannungscurven haben aber in diesem Punkte verschiedene Richtungen; denn dp/dT gibt die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels, welchen die geometrische Tangente an dem betreffenden Curvenpunkte mit der T-Achse bildet, und die Werte sind im Eispunkte für beide Curven verschieden: der Wert für die Dampfspannungscurve über Wasser ist nach Obigem (a) $dp/dt = 4{\cdot}55$ und der Wert für Dampf über Eis nach (b) ist $dp/dt = 5{\cdot}16$. Der Unterschied der Tangenten beträgt

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_e - \left(\frac{dp}{dt}\right)_w = 5{\cdot}16 - 4{\cdot}55 = 0{\cdot}61 \text{ kg/m}^2 = 0{\cdot}045 \text{ mm}.$$

d) Erklärung des Siedens. Die Theilchen im Inneren einer Flüssigkeit befinden sich unter dem Cohäsionsdrucke, den die Oberflächenschichte ausübt; in dieser selbst macht sich die Cohäsion als ein starker Zug nach einwärts geltend. Die Wärme hält ihr das Gleichgewicht. — Wenn die Wärme imstande ist, die Cohäsion zu überwinden, einzelne Theilchen von dem Zusammenhange mit der übrigen Flüssigkeit zu befreien, dann tritt Verdampfung ein.

Schon bei gewöhnlicher Temperatur gehen Flüssigkeitstheilchen an der Oberfläche in Dampfform über, indem die Flüssigkeit verdunstet. Diese Erscheinung lässt sich mittelst der Hypothese (§§ 72 und 82b), nach welcher das Kraftfeld zwischen den Molecülen Träger der Cohäsion und die lebendige Kraft der Molecülwirbel die Wärme ist, leicht erklären. Der einseitigen Kraftwirkung der Cohäsion in der Oberflächenschichte entspricht eine Form der Molecüle, die mit einem Ei verglichen werden kann; in den oberen kleineren Kreisen wird eine ungleich grössere Fliehkraft entwickelt, und diese vermag auch die Molecüle aus der Flüssigkeit herauszuwerfen. Der damit verbundene Verlust an lebendiger Kraft macht sich als Verdunstungskälte geltend. Die Verdunstung wird um so lebhafter vor sich gehen, je grösser die Oberfläche der Flüssigkeit ist, je schneller die entstandenen Dünste durch die Luftbewegung weggeschafft werden und je wärmer die Flüssigkeit ist. (Erscheinungen: das Trocknen der Felder nach Regen durch Sonne und Wind, das Trocknen des Ge-

1) Grätz in Winkelmanns Handb. d. Phys. II. S. 496. — Planck in Wied. Ann. 15, S. 446.

treides und der Wäsche durch Ausbreiten, Erwärmung und Luftzug; Versuche mit dem Kryophor von Wollaston; Anwendung der Verdunstungskälte bei Äther- und Ammoniak-Eismaschinen.)

Beim Sieden erfolgt die Dampfbildung auch im Inneren der Flüssigkeit; es bilden sich Dampfblasen, die aufsteigen und eine wallende Bewegung der Flüssigkeit hervorbringen. Die Dampfbildung geschieht zuerst in den Hohlräumen der Flüssigkeit, die gewöhnlich mit Luft erfüllt sind; sie kann ebenso erklärt werden wie die Verdunstung an der Oberfläche, nur begünstigt die concave Form der Flüssigkeitsfläche hier die Dampfbildung. Die anfangs im Inneren gebildeten Bläschen steigen auf, werden aber wieder condensiert, wenn sie beim Hindurchtreten durch die Oberflächenschichte Arbeit leisten und Wärme verlieren. Erst wenn die Spannung der Dampfblasen so gross ist, um den äusseren Luftdruck zu überwinden, dann beginnt das Sieden. Der Siedepunkt ist darum abhängig von der Spannkraft der Dämpfe; er steigt und fällt mit dieser. Bei normalem Luftdruck muss der Wasserdampf beim Siedepunkte 760 mm Druck besitzen; bei geringerem Druck unter der Luftpumpe siedet das Wasser früher, im Dampfkessel wird der Siedepunkt wesentlich erhöht.

Sind im Inneren der Flüssigkeit keine Luftblasen vorhanden, die zur Bildung von Dampf Gelegenheit bieten, so wird das Sieden verzögert, die Temperatur steigt über den normalen Siedepunkt hinaus. In diesem Falle kann der Beginn des Siedens nach unserer Hypothese durch eine einseitige Wärmebewegung einer Molecülgruppe erklärt werden; dieselbe ist als Folge einer stärkeren Erwärmung einer Stelle leicht möglich: Sind einige Molecüle weiter von einander entfernt, so ist das Kraftfeld zwischen ihnen auch weniger intensiv, und die Wärme der an das schwächere Feld angrenzenden Molecüle kann so überwiegen, dass sie die Molecüle aus der Wirkungssphäre ihrer Nachbartheilchen herausreisst. An der Trennungsstelle ist nun ein leerer Raum, in welchem die Dampfbildung auch plötzlich und stossweise erfolgen kann. Nach Beobachtungen von Dufour und Krebs geschieht die Dampfbildung unter solchen Umständen thatsächlich explosionsartig.

Auf. 1. Es ist die Höhe eines Berges zu berechnen, an dessen Fusse das Wasser bei 99° und auf dessen Gipfel es bei 91° C siedet. Die Barometerstände bei den angegebenen Siedepunkten sind 733·2 und 545·7 mm, und die Gleichung für die barometrische Höhenmessung ist $h = 18474 (\log b - \log b'.)$ — ($h = 2360$ mm.) **2.** Leitet man 3 kg Dampf von 100° C in 150 kg Wasser von 20° C, so erwärmt sich das Ganze auf 32°; wie gross ist die Dampfwärme des Wassers? — (532 Cal.) **3.** Man leitet 1 kg Ätherdampf von 35° C durch ein Schlangenrohr, das in 10 kg Wasser von 10° C liegt; der Äther fliesst mit 35° C ab, das Wasser steigt auf 19° C; wie gross ist die Dampfwärme des Äthers? — (90 Cal.) **4.** Welche Temperatur erhalten 100 kg Wasser von 10° C, wenn in dasselbe 4 kg Dampf von 100° C geleitet werden? Verdampfungs-

wärme = 536 Cal. — (34·08° C.) **5.** Es ist aus der Cohäsionsarbeit $= Pv$ des Wassers bei 0° C, welche der Verdampfungswärme äquivalent ist, der Cohäsionsdruck P zu berechnen. Verdampfungswärme 596·8 Cal, $J = 427$ kgm, Wasservol. $v = 1000$ cm³. — (Aus $P \cdot 1000 = 596{\cdot}8 \cdot 42700$ folgt $P = 25483$ kg/cm². Berechnung nach J. Stefan.) **6.** Es ist die vorhergehende Aufgabe so zu lösen, dass man die zur Überwindung der Cohäsion P bei der Volumsänderung verbrauchte Arbeit mittelst der van der Waals'schen Annahme $P = a/v^2$ berechnet. Das Wasservol. $v_1 = 1$ dm³, das Dampfvol. $v_2 = 1165{\cdot}4$ dm³. — (Die Verdampfungsarbeit ist

$$\int P \cdot dv = \int a \cdot dv/v^2 = a(v_2 - v_1)/v_1 v_2 = 25470000 \text{ kgcm};$$

$a = 2549 \cdot 10^7$ und $P = a/{v_1}^2 = 25500$ kg/cm².) **7.** Der Cohäsionsdruck P des Wassers bei 100° C ist nach den in den vorhergehenden Aufgaben angegebenen Methoden zu ermitteln. Das Wasservolumen = 1043 cm³, das Dampfvol. = 1650·4 dm³, die Verdampfungswärme = 536 Cal. — ($P = 21940$ kg/cm²). **8.** Der Cohäsionsdruck des Eises ist aus der Sublimationswärme = 676·8 Cal und der Dichte 0·92 zu bestimmen. — ($P = 31000$ kg/cm².) **9.** Wie gross ist der Cohäsionsdruck des Äthers bei 0° C, wenn die Verdampfungswärme 94 Cal und die Dichte 0·7366 sind? — ($P = 2957$ kg/cm².) **10.** Wie gross ist der Cohäsionsdruck des Schwefelkohlenstoffes bei 0° C, wenn die Verdampfungswärme 90 Cal und die Dichte 1·2923 sind? — ($P = 4960$ kg/cm².)

§ 84. **Gesetze verdünnter Salzlösungen.** Durch die Auflösung eines Salzes im Wasser wird der innere Flüssigkeitsdruck vermehrt; der Druckzuwachs heisst der osmotische Druck. (Siehe § 68.) Für denselben gilt nach van't Hoff das Gasspannungsgesetz, wenn die Lösung so verdünnt ist, dass die Cohäsion der Salztheilchen aufeinander unberücksichtigt bleiben kann.

Infolge des osmotischen Druckes wird der Gefrierpunkt des Lösungsmittels erniedrigt, der Siedepunkt erhöht und der Dampfdruck über dem Mittel wird vermindert. Die Gesetze lassen sich in folgender elementaren Weise ableiten[1]):

Die Entwickelung des ersten Gesetzes kann ähnlich geschehen, wie jene der Erniedrigung des Schmelzpunktes durch Druck.

Wir benützen ein System von Wasser und Eis bei der Schmelztemperatur und lassen die Gewichtseinheit Wasser erstarren; die hiebei entwickelte Erstarrungswärme q entspricht (§ 80) folgender bei constanter Temperatur geleisteten Schmelzarbeit

$$w = \int (P + p) \cdot dv = T \int \frac{R' \cdot dv}{v - \omega} = T \cdot \varDelta S = J \cdot q\,.$$

Nun werde anstatt Wasser eine verdünnte Salzlösung benützt und derselbe Process durchgeführt; für den Arbeitswert gilt dann analog

$$w - \varDelta w = (T - \varDelta T) \cdot \varDelta S$$

1) Vgl. meine Abhdlg. in d. Ztsch. f. d. Rlschlw. Wien. 1890. S. 592.

und man erhält

$$\Delta w = \Delta T \cdot \Delta S = \frac{J \cdot q}{T} \cdot \Delta T.$$

Thatsächlich erstarrt in der Lösung nur das reine Wasser, und wir können annehmen, dass bei der geringen Temperaturänderung ΔS dasselbe bleibt. Der Unterschied Δw beider Arbeiten ist der Arbeit äquivalent, durch welche die betreffende Wassermenge aus der Lösung entfernt werden kann; denn die Erstarrung des Wassers der Lösung kann auch so geschehen, dass man erst das Wasser aus der Lösung entfernt und dann jenes erstarren lässt. Ist die Lösung in einem cylindrischen Gefässe zwischen einem Kolben und einer halbdurchlässigen Wand eingeschlossen, so muss auf ersteren ein Druck in der Stärke des osmotischen Druckes, der mit p bezeichnet werden soll, ausgeübt werden, um durch die letztere Wasser zu treiben. Ist v das Volumen des so entfernten Wassers, so gilt für den osmotischen Druck das dem Charles-Boyle-Avogadro'schen Gesetze analoge Gesetz von van't Hoff

$$\Delta w = p \cdot v = 2 \cdot n \cdot T \cdot J,$$

wenn n die im Volumen v vorhandene Anzahl der Salzmolecüle angibt. Durch Einführung dieses Wertes in die vorhergehende Gleichung erhält man

$$\Delta T = 2 \frac{n \cdot T^2}{q},$$

das van't Hoff'sche Gesetz der Gefrierpunktserniedrigung. Nach demselben ist die Temperaturerniedrigung der Anzahl der gelösten Salzmolecüle und dem Quadrate der absoluten Temperatur direct und der Schmelzwärme umgekehrt proportional. Das Gesetz kann dazu benützt werden, die Molecülzahl n und das Moleculargewicht zu berechnen[1]).

Die durchgeführte Betrachtung lässt sich auch für die Verdampfung von Salzlösungen geltend machen. Wir wollen das Resultat dazu benützen, das Gesetz der Dampfdruckverminderung über Lösungen zu gewinnen. Zu diesem Zwecke setzen wir den gefundenen Wert ΔT in die Gleichung für die latente Ausdehnungswärme (§ 80) ($\Delta Q = q$), nämlich in

$$J \cdot \Delta Q \cdot \Delta T = T \cdot \Delta p \cdot \Delta v$$

und erhalten

$$J \cdot 2 \cdot n \cdot T = \Delta p \cdot \Delta v,$$

wo Δp die Dampfdruckverminderung bedeutet; für Δv als Unterschied des Dampf- und Flüssigkeitsvolumens der Gewichtseinheit setzen wir näherungsweise das Dampfvolumen. Nach der Zustandsgleichung gilt für dasselbe, wenn p der Dampfdruck und N die Anzahl Wassermolecüle sind,

$$p \,.\, \Delta v = 2 \cdot N \cdot T \cdot J.$$

1) G. Helm, Grundzüge der math. Chemie. S. 101 ff.

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt

$$\frac{\varDelta p}{p} = \frac{n}{N},$$

d. h. das Verhältnis der Dampfdruckverminderung über einer Salzlösung zu dem herrschenden Dampfdrucke ist gleich dem Verhältnisse der Zahlen der Molecüle von Salz und Lösungsmittel. Das Ergebnis stimmt überein mit dem von Raoult durch Messungen festgestellten Gesetze[1]).

Die entwickelten Gesetze des osmotischen Druckes der Gefrierpunktserniedrigung und Verminderung des Dampfdruckes gelten vollkommen für Lösungen fester Stoffe (wie z. B. Zucker), welche sich zum Lösungsmittel chemisch indifferent verhalten. Viele Salze, Säuren und Basen zeigen aber Abweichungen, und zwar von allen drei Gesetzen im gleichen Sinne. Der osmotische Druck ist z. B. für Chlorkalium fast doppelt so gross, als er nach dem Moleculargewichte sein sollte. Diese Abweichungen werden dadurch erklärt, dass die bezüglichen Stoffe in ihren Lösungen dissociiert angenommen werden. Die Erklärung steht mit anderen Erscheinungen, z. B. mit der Elektrolyse solcher Körper, im vollen Einklange.

§ 85. **Einfluss der Oberflächenspannung auf die Dampfspannung**[2]). Nach W. Thomson ist die Dampfspannung über einer Flüssigkeit von der Oberflächenspannung der Flüssigkeit und somit auch von der Gestalt der Oberfläche abhängig. Um die gesetzmässigen Beziehungen aufzufinden, nehmen wir zwei Flüssigkeitskugeln von verschiedener Grösse im Dampfe derselben Flüssigkeit an und setzen den Dampf gesättigt voraus, so dass Gleichgewicht herrscht. Es mag nun ein Theilchen von der ersten Flüssigkeitskugel in Dampf übergehen und gleichzeitig ebenso viel Flüssigkeit aus dem Dampf an der zweiten Flüssigkeitskugel niedergeschlagen werden. Dadurch wird das Gleichgewicht nicht gestört und es müssen deshalb die geleisteten Arbeiten zusammen die Summe Null geben. In mathematischer Form gibt die Bedingung eine Gleichung, aus welcher sich die Unterschiede der Dampfspannungen über den beiden Flüssigkeitskugeln berechnen lassen. Um die betreffende Gleichung zu erhalten, benützen wir die potentielle Energie der kugelförmigen Flüssigkeitsmasse, die sich aus der Arbeit der inneren Flüssigkeit m und aus der Arbeit der Oberfläche zusammensetzt; sind das Volumen v, die Dichte δ, der Normaldruck P, die Oberflächenspannung H, der Halbmesser der Kugel r, dann haben wir für die Cohäsionsarbeit der Flüssigkeit die Gleichung (S. 205)

$$A = P \cdot v + H \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \pi .$$

1) W. Ostwald, Grundriss der allgemeinen Chemie. S. 137.

2) Siehe meine Abhdlg. über die Gesetze d. Oberflächendruckes. S. 42. Troppau 1890.

Lastet auf der Flüssigkeit ein Dampfdruck p, so vermehrt derselbe den Cohäsionsdruck und wir können schreiben

$$A = (P + p) \cdot \frac{m}{\delta} + H \cdot 4r^2\pi.$$

Beim Entfernen eines Theilchens ändern sich Masse und Halbmesser und damit auch der Arbeitswert der Flüssigkeitskugel; die Arbeitsänderung ist

$$\varDelta A = (p + P) \cdot \frac{\varDelta m}{\delta} + 2 \cdot H \cdot 4r \cdot \pi \,.\, \varDelta r,$$

ferner ist

$$m = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot \delta \quad \text{und} \quad \varDelta m = 4r^2\pi \cdot \delta \cdot \varDelta r,$$

daher wird

$$\frac{\varDelta A}{\varDelta m} = \frac{P+p}{\delta} + \frac{2H}{r\,.\,\delta}.$$

Der Ausdruck bestimmt die Verdampfungsarbeit für die Masseneinheit der Flüssigkeit, wenn der Dampf in den leeren Raum entweicht; geht derselbe aber in den um die Kugel liegenden Dampf über, so behält er den Arbeitswert $(P_1 + p)/\delta_1)$, wenn P_1 den Cohäsionsdruck und δ_1 die Dichte des Dampfes bedeuten; dieser Wert ist in Abzug zu bringen. Daher erhalten wir für die Verdampfungsarbeit der Masseneinheit

$$\frac{\varDelta W}{\varDelta m} = \frac{P+p}{\delta} + \frac{2 \cdot H}{r \cdot \delta} - \frac{P_1 + p}{\delta_1}.$$

Dieselbe Form gilt für den Arbeitsgewinn beim Niederschlagen des Dampfes auf der zweiten Flüssigkeitskugel; wir haben nur die entsprechenden Grössen einzusetzen, nämlich den Halbmesser r_1, die Dampfspannung p_1 und den inneren Dampfdruck $(P_1 + p_1)$. Das Gleichgewicht fordert die Gleichheit beider Arbeitswerte und daher gilt die Bedingung

$$\frac{P+p}{\delta} + \frac{2H}{r \cdot \delta} - \frac{P_1 + p}{\delta_1} = \frac{P + p_1}{\delta} + \frac{2H}{r_1 \cdot \delta} - \frac{P_1 + p_1}{\delta_1},$$

daraus folgt

$$(p_1 - p)\left(\frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{\delta}\right) = \frac{2H}{\delta} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right).$$

Ist die zweite Flüssigkeitsmasse eben begrenzt, dann ist $r_1 = \infty$. Bezeichnen wir den Dampfdruck an dieser Begrenzungsfläche mit p_0, dann erhalten wir für den Dampfdruck über der gekrümmten Fläche

$$p = p_0 + \frac{2H \cdot \delta_1}{r \cdot (\delta - \delta_1)}.$$

Die Gleichung lehrt den Satz: Der Unterschied der Dampfspannungen über einer gekrümmten und einer ebenen Fläche ist proportional der Oberflächenspannung, der mittleren Krümmung des betreffenden Flächenelementes und der Dampfdichte, und umgekehrt pro-

portional der Differenz aus den Dichten von Flüssigkeit und Dampf. Mit Rücksicht auf das Vorzeichen des Krümmungshalbmessers folgt, dass die Dampfspannung über convexen Flüssigkeitsoberflächen grösser und über concaven Flächen kleiner ist als über ebenen. —

Nach Thomson und R. v. Helmholtz[1]) kann das Gesetz zur Erklärung einiger wichtiger Erscheinungen verwendet werden. Da das Maximum der Spannkraft des Dampfes über concaven Flüssigkeitsoberflächen geringer ist, als über ebenen, so wird daselbst auch schon bei geringerem Druck Condensation eintreten.

Hiernach erklärt sich das Feuchtwerden hygroskopischer Stoffe, wenn auch die umgebende Luft nicht mit Wasserdampf gesättigt ist, und ebenso der Beginn der Condensation des Wasserdampfes in der Luft an Staubtheilchen. Die Condensation über convexen Oberflächen erfolgt erst bei höherem Drucke als über ebenen; daher in dampfhaltiger Luft kleine Wassertröpfchen sich nicht vergrössern, sondern vielmehr verdampfen werden; nach Maxwell werden nur die grösseren Tropfen durch Verdichtung wachsen, so dass allein durch solche Verdichtung sichtbare Tropfen gebildet werden, ohne dass kleinere Tropfen sich dazu vereinigen müssten. Auch die Verdampfung wird bei kleinerem Drucke beginnen an Stellen mit concaver Oberfläche; solche Flächen sind in einer Flüssigkeit vorhanden, welche Gase absorbiert enthält und wird hierdurch der Einfluss erklärt, den die absorbierten Gase auf das Sieden der Flüssigkeit ausüben.

§ 86. **Discussion der van der Waals'schen Zustandsgleichung. Kritischer Punkt.** Die Zustandsgleichung in der Form

$$(P + p)(v - \omega) = R \cdot T$$

wurde aus dem ersten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie gewonnen und darf deshalb auch allgemeine Giltigkeit beanspruchen. P ist eine unbestimmte Function des Volumens. Bei molecularen Veränderungen sind die Grössen ω und R veränderlich; die letztere ist jedenfalls der Molecülzahl proportional. Wenn keine molecularen Veränderungen eintreten, so dürfen ω und R als constant betrachtet werden. Unter dieser Voraussetzung macht van der Waals von der Zustandsgleichung Gebrauch[2]); ferner setzt er für $P = a/v^2$, sieht auch a als constant an und gewinnt dadurch ein einfaches, leicht anwendbares, allerdings nur näherungsweise richtiges Gesetz, nämlich die Form

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - \omega) = R \cdot T.$$

1) Helmholtz, Wied. Ann. 27. S. 520.

2) Van der Waals: Die Continuität des gasf. u. flüssg. Zustandes. Deutsch v. Roth. 1881.

Der äussere Druck p, das Volumen v und die absolute Temperatur T gelten als veränderlich; a, ω und R als constant. Van der Waals bezieht diese Zustandsgleichung auf Flüssigkeiten und Gase und zieht eine Reihe wichtiger Folgerungen über den Vorgang bei der Verdampfung, über die Unterschiede zwischen Dämpfen und Gasen u. s. w., die durch Versuche bestätigt werden. Da die Gleichung namentlich in geometrischer Darstellung ein sehr anschauliches Bild von den betreffenden Erscheinungen zu geben vermag, so soll dieselbe im Folgenden discutiert werden. Wenn auch das Bild nur auf annäherungsweise Richtigkeit Anspruch machen kann, so vermag es der physikalischen Erklärung, um die es uns hier zu thun ist, doch vorzügliche Dienste zu leisten [1]).

Zunächst lässt sich die Gleichung so umformen, dass sie gleichzeitig für alle Flüssigkeiten und Gase, auf die sie überhaupt anwendbar ist, gilt.

Zur Durchführung dieser Umformung ordnen wir nach v und erhalten

$$v^3 - \left(\frac{R \cdot T}{p} + \omega\right) \cdot v^2 + \frac{a}{p} \cdot v - \frac{a \cdot \omega}{p} = 0.$$

Die Gleichung hat drei gleiche Wurzeln v_0, wenn sie übereinstimmt mit der Form

$$(v - v_0)^3 = 0.$$

Dies ist der Fall, wenn die Coefficienten derselben Potenzen von v in beiden Gleichungen einander gleich sind, also wenn

$$\frac{RT}{p} + \omega = 3v_0, \quad \frac{a}{p} = 3v_0^2, \quad \frac{a\omega}{p} = v_0^3.$$

Daraus ergibt sich, wenn wir noch die diesen Bedingungen entsprechenden Zustandsgrössen mit den Zeigern 0 versehen,

$$v_0 = 3\omega, \quad p_0 = \frac{a}{27 \cdot \omega^2}, \quad T_0 = \frac{8a}{27\omega \cdot R}.$$

Der Zustand des Körpers ist also in diesem Punkte durch seine charakteristischen Constanten völlig bestimmt; er wird der kritische Zustand genannt. T_0 heisst die kritische Temperatur oder der kritische Punkt, v_0 das kritische Volumen und p_0 der kritische Druck. — Führt man diese Grössen als Einheiten in die allgemeine Gleichung ein, indem man setzt

$$p = p_1 \cdot p_0, \quad v = v_1 \cdot v_0 \quad \text{und} \quad T = t \cdot T_0,$$

1) Siehe meine Abhdlg. über Ähnlichkeit verschied. Spannungszustände in d. Ztsch. f. d. Rlschlw. 1881. S. 586.

so erhält man die Form

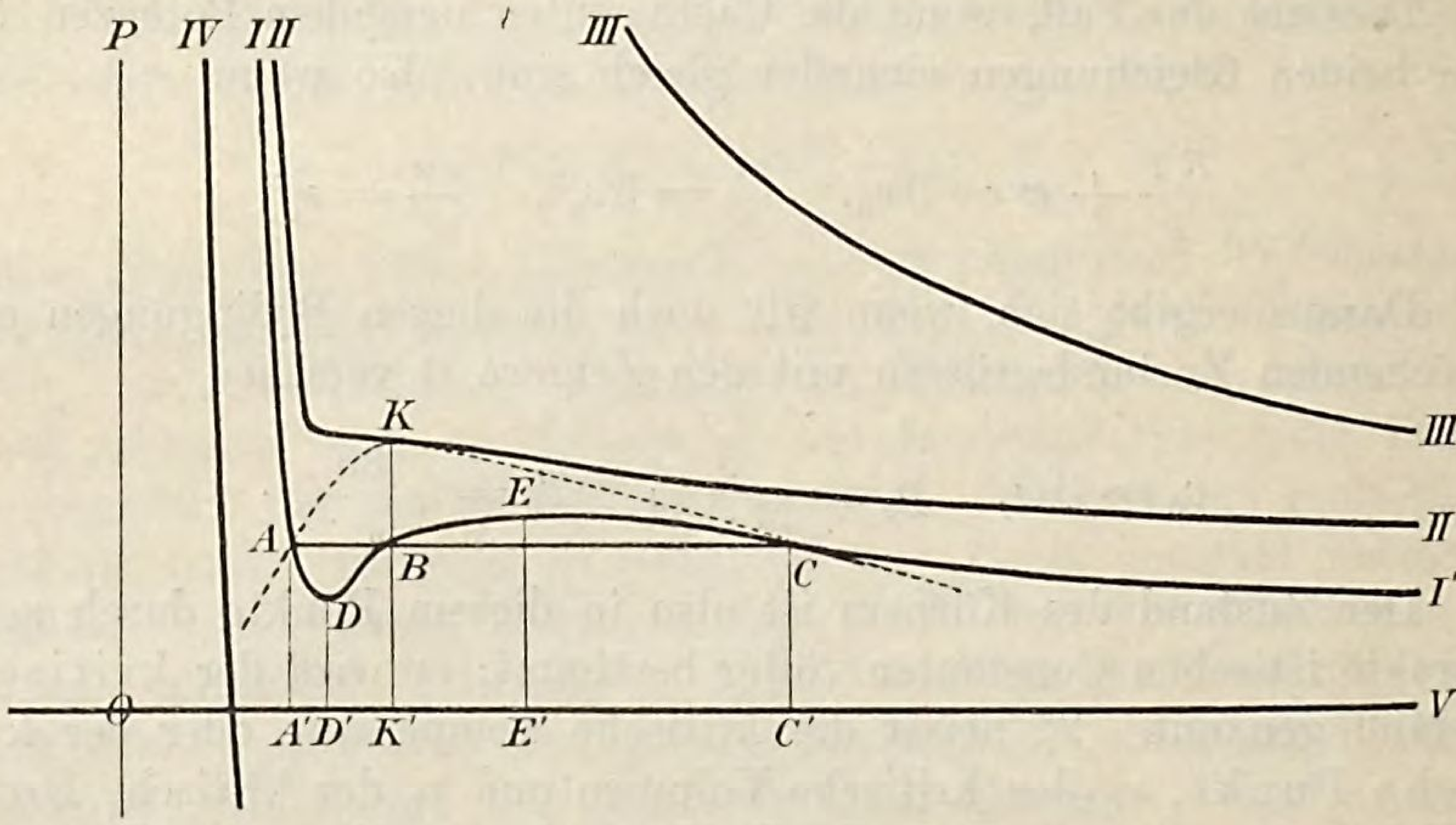
$$\left(p_1 + \frac{3}{v_1^2}\right)(3v_1 - 1) = 8 \cdot t.$$

Damit sind sämmtliche von der besonderen Natur eines Körpers abhängigen Constanten weggefallen; das Gesetz gilt demnach in dieser Form für alle Flüssigkeiten und Gase gleichzeitig innerhalb seines Verwendungsgebietes, für das sich zunächst gemäss obiger diesbezüglichen Bemerkungen die Bedingung $v_1 > \frac{1}{3}$ erkennen lässt.

Die zahlreichen Schlussfolgerungen, welche sich daraus für alle Körper beider Zusammenhangsformen ergeben, wollen wir beschränken auf eine kurze Betrachtung der Zustandsänderungen in zwei Fällen, nämlich bei stets gleichbleibender Temperatur (nach einer Isotherme), und unter gleichem Druck (nach einer Curve constanten Druckes). Der Verlauf der bezüglichen Erscheinungen wird durch Benützung einer graphischen Darstellung deutlich und übersichtlich.

Das Bild für die Zustandsänderung bei constanter Temperatur liefern die Isothermen in Fig. 62. Dieselben sind unter der gewöhnlichen Annahme, dass der Druck in der Richtung der verticalen Achse und das Volumen in der Richtung der horizontalen Achse gemessen werden, nach der vorstehenden Gleichung für die Temperaturen $t = 0{\cdot}2$, $t = 0{\cdot}9$, $t = 1$ und $t = 2$ construiert.

Fig. 62.



Der Verlauf der Isotherme I (für $t = 0{\cdot}9$) zeigt, dass für Drucke, die grösser als EE' ($0{\cdot}724\ldots$) sind, der Körper nur ein Volumen besitzt, also nur in einem Zustande bestehen kann; dieser Zustand ist der flüssige. Für einen Druck zwischen EE' ($0{\cdot}724$) und DD' ($0{\cdot}409$) zeigt die Curve drei verschiedene Volumen; der Körper kann da in drei verschiedenen Zuständen, im flüssigen, gas-

förmigen und einem labilen Zwischenzustande, bestehen. Bei kleineren Drucken als DD' hat der Körper stets nur ein bestimmtes Volumen, bei welchem er sich im gasförmigen Zustande befindet.

Der Verlauf der Isotherme in Verbindung mit den beobachteten Thatsachen gestattet einige Schlüsse bezüglich des Überganges aus dem flüssigen in den gasförmigen Zustand. Die Beobachtung lehrt, dass die Verdampfung bei constantem äusseren Drucke erfolgt, nämlich bei der vielfach bestimmten Maximalspannung ($AA' = CC'$) des mit seiner Flüssigkeit in Berührung stehenden Dampfes. Die beim Verdampfungsprocess geleistete äussere Arbeit — das Product aus der Kraft in die Volumsänderung — wird demnach durch ein Rechteck angegeben, das in Fig. 62 durch $AA'CC'$ dargestellt erscheint. Nach W. Thomson bestehen bei der Verdampfung die von dem Linienstücke $ADBEC$ dargestellten Zustände in der Oberflächenschichte und wird von der Wärme des Körpers Arbeit geleistet, welche, nach der Form $\Sigma p \cdot \Delta v$ berechnet, der von dem Linienzuge $ADBECC'A'A$ eingeschlossenen Fläche gleichkommt. Clausius [1]) hat mittelst des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie nachgewiesen, dass diese beiden Arbeiten einander gleich sein müssen. Unter der Bedingung dieser Gleichheit, welche wir nach dem Energieprincipe auch direct anerkennen können, liegt die Gerade AC des gleichen äusseren Druckes, welche der Verdampfung entspricht, so, dass die Flächenstücke $ADBA$ und $BECB$ einander gleich sind. — Die erfahrungsmässige Linie des äusseren Druckes hat somit die Form $IABCI'$. Thatsachen sprechen indessen dafür, dass eine Flüssigkeit auch bei bedeutend niedrigeren Drucken als AA' [längs der Isotherme IV selbst bei negativen Drucken [2])] bestehen kann, nämlich wenn dieselbe nicht mit ihrem Dampfe in Verbindung steht; sobald aber eine solche Berührung eintritt, dann geht die Dampfentwickelung unter demselben Drucke explosionsartig vor sich; es erfolgt ein „Sieden mit Stossen“, indem die entwickelte Arbeit des Gases (längs des gekrümmten Isothermenstückes) grösser ist, als die bei constantem Drucke geleitete äussere Arbeit zur Vergrösserung des Volumens. — Bei einem Drucke, der grösser als AA' und kleiner als EE' ist, wird ein Dampf, welcher mit seiner Flüssigkeit in Berührung steht, condensiert werden. — Ein Zustand, welcher dem Linienstücke DBE entspricht, ist nicht stabil, da bei Überführung dahin entweder die entwickelte innere Arbeit (die von der Linie begrenzte Fläche), oder die geleistete äussere Arbeit (die von der Geraden des constanten Druckes begrenzte Fläche) grösser ist, und daher bis zur Gleichstel-

1) R. Clausius, Wied. Ann. 9, S. 336.

2) Z. B. eine Quecksilbersäule im Barometerrohre, deren Höhe grösser ist, als sie dem Luftdrucke entspricht. Siehe Maxwell, Theorie der Wärme, S. 224.

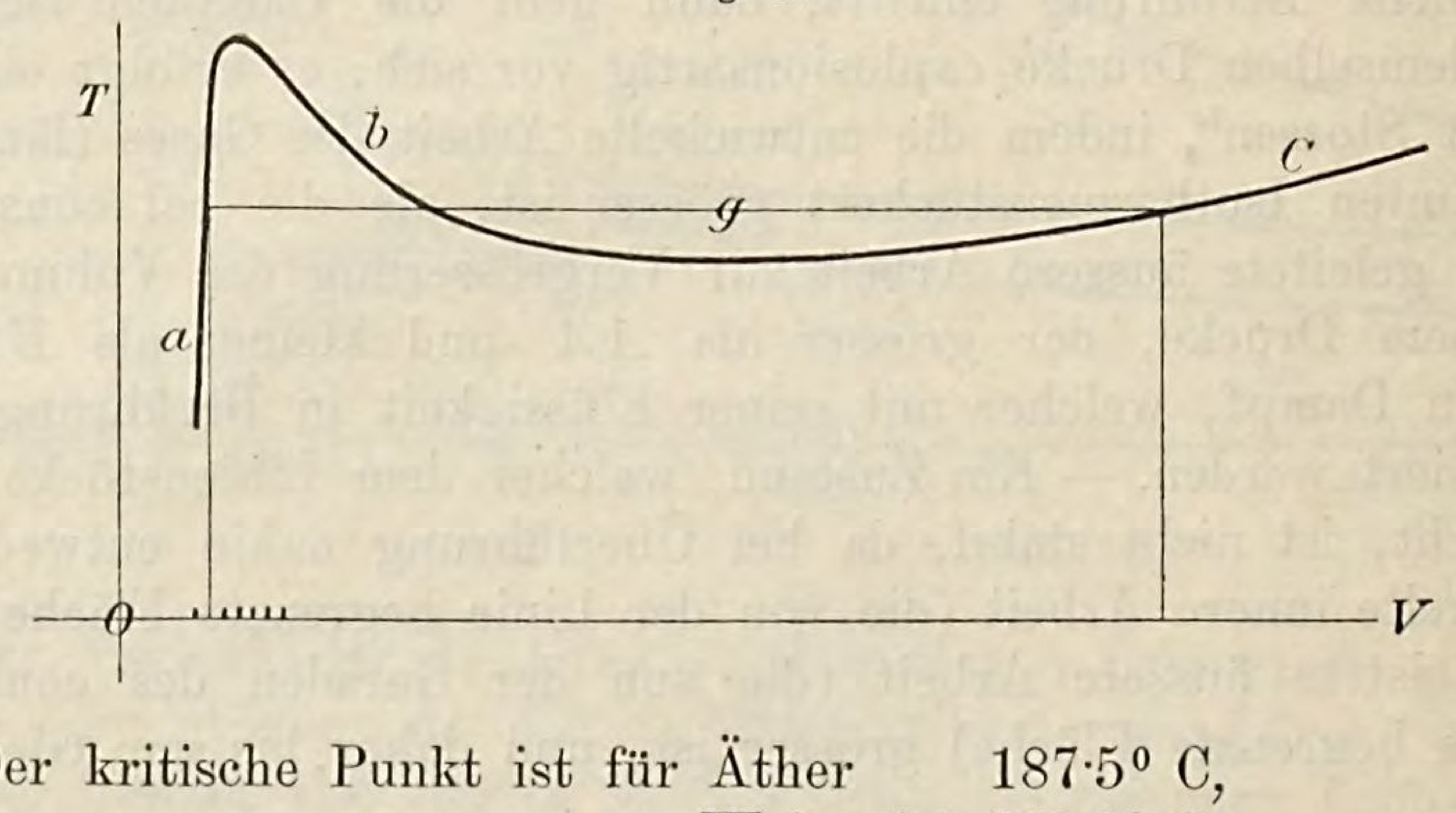
lung beider noch ein weiterer Vorgang folgen muss, wenn überhaupt die Zustandsänderung nach einer bestimmten Isotherme geschehen soll. — Wir bemerken auch noch, dass die höchsten und tiefsten Punkte der Curve, zwischen welchen die Verdampfung oder die Condensation erfolgt, zu beiden Seiten der Ordinate KK' des kritischen Volumens (= 1) liegen. Die Volumen für diese Punkte sind ungefähr

$$v_E = 1{\cdot}5 \quad \text{und} \quad v_D = 0{\cdot}75.$$

Die Isotherme *II*, welche der kritischen Temperatur zugehört, und alle oberhalb derselben gelegenen Linien zeigen keine höchsten und tiefsten Punkte; alle die betreffenden Linien ergeben bei einem bestimmten Drucke nur ein Volumen; längs der ganzen Isotherme besteht der Körper nur in einem, dem eigentlichen gasförmigen Zustande. Damit ist auch die physikalische Bedeutung des kritischen Punktes gegeben: bei allen über dem kritischen Punkte gelegenen Temperaturen ist es nicht möglich, ein Gas durch Druck in den flüssigen Zustand zu bringen. — Die Isothermen (*III III'*) der noch bedeutend höher gelegenen Temperaturen nähern sich in ihrer Form allmählich einer gleichseitigen Hyperbel ($pv = RT$), welche dem Boyle'schen Gesetze entsprechen würde.

Die Grenzpunkte der geraden Verdampfungslinien von den aufeinanderfolgenden Isothermen setzen eine Linie $AKC\ldots$ zusammen, welche den flüssigen, dampfförmigen und den Zwischenzustand trennt, die Volumsänderung bei der Verdampfung erkennen lässt und zeigt, dass diese immer kleiner wird, je höher die Temperatur ist; beim kritischen Punkte bestehen alle drei Zustände zu gleicher Zeit, und über demselben findet keine sprungweise Volumsänderung, also auch keine entsprechende Zustandsänderung mehr statt.

Fig. 63.



Der kritische Punkt ist für Äther 187·5° C,
„ Weingeist 258·6° C
und „ Wasser 411·7° C [1]).

1) Maxwell, a. a. O. S. 142.

Gewöhnlich findet der Verlauf der Erscheinung bei fortgesetzter Erwärmung einer Flüssigkeit unter constantem äusseren Druck statt. Derselbe ist in Fig. 63 bildlich dargestellt, welche die Spannungsgleichung für den in Einheiten des kritischen Druckes gemessenen Druck $p_1 = 0{\cdot}2$ ergibt. Die Temperaturen sind darin längs der Ordinatenachse und die Volumen längs der Abscissenaxe aufgetragen. An dem sich ergebenden Linienzuge lassen sich ähnliche Betrachtungen anstellen, wie an der Isotherme. Man ersieht einen dem flüssigen Zustande entsprechenden, rasch ansteigenden linken und einen dem gasförmigen Zustande zugehörigen rechten Theil c und dazwischen einen zweimal entgegengesetzt gekrümmten Verbindungszug b, welcher einem labilen Zustande in der Oberflächenschichte entsprechen mag. Der höchste Punkt darin hat die Ordinate $T = 0{\cdot}8694$. Während der Verdampfung durchläuft der den Zustand bestimmende Punkt den letzteren Verbindungstheil als theoretischen Linienzug des Überganges, und die Temperaturcoordinate beschreibt dabei eine Fläche, welche durch die Form $\Sigma t \cdot \Delta v$ gegeben ist. — Die Erfahrung lehrt aber, dass die Verdampfung bei constanter Temperatur, also längs einer horizontalen Geraden g, welche mit der auch bei der Isotherme gezeichneten Geraden der Verdampfung unter demselben Druck und derselben Temperatur übereinstimmt, erfolgt. Die in Wirklichkeit gemessene constante Temperaturcoordinate beschreibt demnach ein Rechteck, dessen Fläche durch die Volumsänderung und den Energieverbrauch bei der Verdampfung völlig bestimmt ist. Soll nun der theoretische Verlauf nach der krummen Linie in Fig. 63 mit den thatsächlichen Verhältnissen übereinstimmen, so müssen die beiden, nämlich die von den theoretischen und den thatsächlichen Temperaturcoordinaten beschriebenen Flächen einander gleich sein. Damit ist die Lage der Geraden, nach welcher das Sieden erfolgt, und gleichzeitig auch die Siedetemperatur und die Grösse der Volumsänderung bei der Verdampfung bestimmt. — Wenn die Flüssigkeit eine höhere als der Geraden g entsprechende Temperatur annimmt, dann tritt die Erscheinung des Siedeverzuges ein, welche wirklich beobachtet wird, wenn die Flüssigkeit keine Gase absorbiert enthält. Ähnlich wie es die Betrachtung der Isotherme ergeben hat, tritt in diesem Falle ein Sieden mit Stossen auf.

Die obige, für alle Flüssigkeiten und Gase gleichzeitig giltige Spannungsgleichung in Verbindung mit der für den Verdampfungsprocess giltigen Gleichung nach Clausius

$$p \cdot \Delta v = \int p \cdot dv,$$

deren Bedeutung in graphischer Darstellung vorstehend angegeben wurde, gestattet für jede bestimmte Temperatur als Siedepunkt die

zugehörige Spannung und umgekehrt, und ebenso die zugehörigen Flüssigkeits- und Gasvolumen zu berechnen. Die erhaltenen Resultate gelten für alle Körper zugleich, deren Temperatur, Druck und Volumen dieselben Vielfachen der bezüglichen kritischen Grössen sind.

Besitzt man für eine gewisse Flüssigkeit erfahrungsgemäss Zustandsbestimmungsstücke, dann können diese auch benützt werden, um die entsprechenden Daten einer anderen Flüssigkeit zu berechnen, wenn für die letztere Temperatur, Druck und Volumen im kritischen Zustande bekannt sind. Hierdurch ist unter anderen eine allgemeine Beziehung zwischen den Siedetemperaturen der verschiedenen Flüssigkeiten, ein Gesetz entsprechender Siedepunkte ausgedrückt: nämlich, wenn die Drucke verschiedener Flüssigkeiten in Einheiten der zugehörigen kritischen Drucke einander gleich sind, so sind auch die Siedetemperaturen in Einheiten der betreffenden kritischen Temperaturen einander gleich. Darnach ist es z. B. möglich, den Siedepunkt für Kohlensäure unter dem Drucke 1 Atm. zu berechnen, wenn die Beobachtungen für Ätherdampf bekannt sind. Für Kohlensäure sind der kritische Druck 72 Atm. und die kritische Temperatur $303{\cdot}9^0\ T$; 1 Atm. ist $\frac{1}{72}$ des kritischen Druckes. — Für Äther ist der kritische Druck 36·9 Atm. und die kritische Temperatur 188° C. Soll der Druck p des Äthers in Einheiten des kritischen Druckes mit dem der Kohlensäure übereinstimmen, dann ist

$$\frac{p}{36{\cdot}9} = \frac{1}{72},$$

also

$$p = \frac{36{\cdot}9}{72} \cdot 760 = 389 \text{ mm}.$$

Für diesen Druck findet man in einer Beobachtungstabelle als Siedepunkt des Äthers ungefähr 16·9° C, d. i. 273 + 16·9 absolute Temperaturgrade, oder in Theilen der kritischen Temperatur = 0·629. — Diese Temperatur in Einheiten der betreffenden kritischen Temperatur ist auch der Siedepunkt der Kohlensäure; umgerechnet erhält man für denselben 0·629 · 303·9 absolute Grade oder — 82° C. Aus Faraday's Beobachtungen ergibt sich thatsächlich — 82° C [1]).

Verbesserungen der van der Waals'schen Zustandsgleichung wurden von Clausius [2]), Kammerling-Onnes [3]), G. Jäger [4]) u. a. angegeben.

1) Van der Waals, a. a. O. S. 133.

2) Van der Waals, Continuität, S. 129.

3) Kammerling-Onnes, k. Ak. van Vetensch. 1881, 45 und Winkelmann, Hdb. d. Phys. II, S. 739.

4) G. Jäger, Wien. Ber. 101, S. 1520 u. 102, S. 257 u. Winkelmann, Hdb. II, S. 544 u. 551.

Die betreffenden Gleichungen lassen sich in ähnlicher Weise wie die erstere zu einer Theorie der übereinstimmenden Zustände verwenden.

Aufg. Figur 62 ist zur Erklärung folgender Sätze zu verwenden: 1) Beim Sieden hat der Dampf stets den Druck der äusseren Luft; 2) Dampf, dessen Temperatur gleich dem seinem Drucke entsprechenden Siedepunkte ist, befindet sich im Maximum der Spannkraft; 3) jede Volumsverminderung beim Maximum der Spannkraft hat keine Drucksteigerung, sondern Condensation zur Folge; 4) das Maximum der Spannkraft wächst mit der Temperatur; 5) Gase über dem kritischen Punkt haben kein Maximum der Spannkraft.

VI. Elektricität. Elektrostatik.

§ 87. **Grunderscheinungen. Elektrischer Zustand.** Die Elektricität tritt in der gewaltigen und grossartigen Erscheinung des Gewitters, im Polarlichte und anderen Naturerscheinungen zutage, und für die Industrie und den Verkehr ist sie heute eine unentbehrliche Kraft. Die Kenntnisse über dieselbe wurden jedoch erst in den letzten zwei Jahrhunderten gewonnen: erst im 18. Jahrhunderte erkannte Franklin die elektrische Natur des Gewitters, und die Elektrotechnik ist eine Errungenschaft der letzten Jahrzehnte.

Die Gründe dafür, warum die Kenntnis von der Elektricität nicht schon früher erworben wurde, sind darin zu suchen, dass dieselbe nur auf experimentellem Wege zu erreichen war, und dass diese Forschungsmethode erst in der letzten Zeit ausgebildet wurde, ferner darin, dass wir einen besonderen Sinn zur Wahrnehmung der Elektricität nicht besitzen. Die alten Griechen (Thales von Milet 600 v. Chr.) kannten die Eigenschaft des Bernsteins, dass er durch Reibung befähigt wird, leichte Körperchen anzuziehen. Gilbert in Colchester (1600) untersuchte, ob nicht andere Körper ebensolche Anziehung ausübten, und fand dieselbe Eigenschaft beim Diamant, Saphir, Opal, Bergkrystall, Glas, Schwefel, Harz, Steinsalz u. a.; er nannte die Körper elektrische Körper (von Bernstein = ἤλεκτρον) und die ihnen innewohnende Kraft elektrische Kraft[1]). Nicht elektrisch, und deshalb auch anelektrisch genannt, wurden: Smaragd, Achat, Perlen, Chalcedon, Alabaster, Marmor, Knochen, Elfenbein und die Metalle. Gilbert wies auch den ungünstigen Einfluss der Feuchtigkeit auf die elektrischen Körper nach.

Otto von Guericke (Exper. v. ca. 1650—1663) entdeckte, dass ein leichter Körper, z. B. eine Flaumfeder, nach der Anziehung von einem geriebenen elektrischen Körper von diesem abgestossen wurde. (Versuche mit dem elektrischen Pendel. Das Strohhalmelektroskop von Volta 1781.) Er bemerkte auch das elektrische Leuchten und Knistern einer Schwefelkugel. Boyle fand, dass nicht elektrisierte Körper elektrisierte anziehen, dass also die Wirkung der Körper wechselseitig

1) Rosenberger, Geschichte d. Phys. Wallentin, Moderne Elektricitätslehre. Silv. Thompson, Vorlesungen über Elektr. Deutsch von Himstedt.

ist, ferner zeigte er, dass die elektrische Anziehung auch im luftleeren Raume stattfindet.

§ 88. **Gute und schlechte Leiter der Elektricität.** Stephan Gray untersuchte (1727), ob eine Glasröhre in anderer Weise elektrisch würde, wenn sie an beiden Enden geschlossen, als wenn sie offen wäre, und bemerkte, dass nicht nur die Röhre selbst, sondern auch der Kork, mit dem sie geschlossen war, leichte Körper anzogen. Er steckte dann in den Kork Holzstäbchen und Drähte, befestigte Bindfäden, verband damit am Ende eine Elfenbeinkugel und fand, dass der Erfolg derselbe blieb. Zugleich wies er nach, dass der elektrische Zustand durch die Stäbchen und Drähte fortgeleitet wurde. — Seide, Haare, Harz, Glas und einige andere Körper leiteten die Elektricität nicht weiter; diese Körper wurden dazu benützt, in den Leitern die Elektricität lange Zeit zu erhalten.

Nach der Leitungsfähigkeit theilt man die Körper ein in gute Elektricitätsleiter (Metalle, Graphit, Säuren, Salzlösungen, Schnee, lebende Pflanzen, thierische Organe), Halbleiter (Alkohol, Äther, trockenes Holz, Papier, Stroh, Eis bei 0^0 C) und schlechte Elektricitätsleiter oder Isolatoren (Glas, Harz, Schwefel, Bernstein, Schellack, Kautschuk, Leder, Pergament, trockenes Papier, Federn, Seide, Glimmer, trockene Gase). In Verbindung mit Wheeler wies Gray nach, dass die „elektrischen" Körper in den Versuchen Gilberts schlechte Leiter der Elektricität, hingegen die „anelektrischen" Körper gute Leiter der Elektricität waren, und dass es nothwendig ist, diese Körper zu isolieren, um ihren elektrischen Zustand nachweisen zu können. (Versuche über Leitung zwischen einem Conductor und einem Goldblattelektroskop.) Winkler construierte den ersten Entlader.

§ 89. **Positive und negative Elektricität.** Du Fay machte die wichtige Entdeckung (1733), dass der elektrische Zustand eines geriebenen Glasstabes von jenem eines geriebenen Harzstabes verschieden war: Er benützte ein Pendelelektroskop und fand, dass, wenn es mit einem geriebenen Glasstabe elektrisiert worden war, von jedem elektrischen Glasstabe abgestossen, von einem elektrischen Harzstabe aber angezogen wurde; nach Elektrisierung des Pendels mit dem Harzstabe wurde es von dem Harzstabe abgestossen und von dem elektrischen Glasstabe angezogen. Ebenso wie Glas verhielten sich Edelsteine, Haare, Wolle, und wie Harz Bernstein, Seide, Gummilack u. a. Die eine Art Elektricität wurde Glaselektricität, die andere Art Harzelektricität genannt. Nachträglich erkannte man, dass die Art der Elektricität nicht nur von dem geriebenen Körper, sondern auch von dem Reibzeuge abhängt: Glas liefert, z. B. mit Katzenfell gerieben, Harzelektricität und Harz, mit amalgamiertem Leder abgerieben, Glaselektricität. Man gab deshalb die angegebenen Namen

auf und bezeichnete nach dem Vorgange Franklins die am Glase durch Reiben mit Leder erzeugte Elektricität als positive und die am Harz mit Seide oder Wolle erregte Elektricität als negative. Die Wechselwirkung beider Elektricitätsarten lässt sich in das Gesetz zusammenfassen: Gleichartig elektrische Körper stossen einander ab, ungleichartig elektrische Körper ziehen einander an.

§ 90. **Sitz der Elektricität.** Le Monnier fand, dass ein hohler und ein massiver Leiter von gleicher Form und Grösse, in gleicher Weise elektrisiert, gleich stark elektrisch werden, und zog daraus den Schluss, dass die Elektricität nur an der Oberfläche der Leiter ihren Sitz habe. Die Richtigkeit dieser Ansicht wird bestätigt durch die Versuche mit den Apparaten von E. Mach, mit Coulombs Hohlkugeln, Faradays Würfel u. a. Im Inneren hohler, elektrischer Körper zeigt ein Elektroskop keinen Ausschlag. Theoretische Gründe für die Ausbreitung der Elektricität auf der Oberfläche guter Leiter sollen später angegeben werden.

§ 91. **Elektrische Vertheilung. Influenzelektricität.** Otto v. Guericke, Hauksbee und Gray beobachteten bereits, dass es nicht nöthig ist, einen guten Elektricitätsleiter zum Zwecke seiner Elektrisierung mit einem elektrischen Körper in unmittelbare Berührung zu bringen, sondern dass es schon genügt, die beiden Körper einander zu nähern. Die betreffenden Erscheinungen werden von John Canton (1753) zum erstenmal beschrieben. Eine isolierte Metallstange wird in der Nähe eines positiv elektrischen Körpers auf der diesem zugewandten Seite negativ und auf der abgewandten positiv elektrisch; die geweckte Elektricität heisst Influenzelektricität, und zwar beziehungsweise Influenzelektricität erster und zweiter Art; die letztere ist ableitbar (frei), die erstere nicht ableitbar (gebunden). Werden die Körper wieder von einander entfernt, so wird die Metallstange wieder unelektrisch; wird aber vor dem Entfernen die Influenzelektricität zweiter Art abgeleitet, so wird die Metallstange bleibend ungleichnamig elektrisch. (Versuche mit dem Goldblattelektroskop und mit dem Riess'schen Apparate. Erklärung der Anziehung unelektrischer Körper durch die elektrische Vertheilung.)

§ 92. **Gesetz von der Erhaltung der Elektricität.** Da ein durch Vertheilung elektrisierter Körper wieder unelektrisch wird, wenn man ihn von dem elektrisierenden Körper entfernt, so folgt, dass beide Influenzelektricitäten im gleichen Masse erregt werden. Ebenso wie bei der Vertheilung wird auch in allen anderen Fällen positive und negative Elektricität gleichzeitig und im gleichen Masse erzeugt; die algebraische Summe der Elektricitäten wird durch keinen Process geändert. Es lässt sich bereits durch die angegebenen Hilfsmittel zeigen, dass beim Elektrisieren durch Reibung der geriebene Körper und das Reibzeug stets entgegengesetzt elektrisch werden, so z. B.

Glas positiv und Leder negativ, Harz negativ und Seide positiv u. s. w. In der nachstehenden Reihe wird jeder vorhergehende Körper bei der Reibung mit dem nachfolgenden positiv und der nachfolgende negativ elektrisch: Pelz, Wolle, Elfenbein, Glas, Seide, Metalle, Schwefel, Kautschuk, Guttapercha, Kollodium. — Die Reibungs- und Influenzelektrisiermaschinen entwickeln stets gleich viel positive und negative Elektricität; verbindet man die beiden Conductoren durch einen Leitungsdraht, so entsteht während des Betriebes ein elektrischer Strom, in welchem die beiden Elektricitäten zum Ausgleich kommen; nach Einstellung des Betriebes erscheinen die Conductoren stets unelektrisch.

§ 93. **Hypothesen von Symmer (1759) und Franklin (1755).** Zur Erklärung der elektrischen Erscheinungen nahm Symmer zwei Fluida an, zwei unwägbare elektrische Flüssigkeiten von entgegengesetzter Art, die sich bei ihrer Vereinigung gegenseitig neutralisieren. Im unelektrischen Körper sollen dieselben in gleicher Menge vorhanden sein; durch den Elektrisierungsprocess würden sie von einander getrennt. Beim Reiben würde sich einem Körper das positive und im anderen Körper das negative Fluidum im Überschuss ansammeln; bei der Influenz müsste das Fluidum der Elektricität zweiter Art abgeleitet werden, wenn der Körper durch Vertheilung bleibend elektrisiert werden soll. Zur Erklärung der dynamischen Wirkungen muss angenommen werden, dass Theilchen desselben Fluidums Abstossungskräfte und Theilchen verschiedener Fluida Anziehungskräfte aufeinander ausüben. Die Anhänger der „Zwei-Fluida-Theorie" nennt man Dualisten.

Franklin und Aepinus nehmen nur ein elektrisches Fluidum an, das im gewöhnlichen Zustande der Körper gleichmässig in ihnen ausgebreitet sei, beim Elektrisieren aber ungleich vertheilt werde, so dass im positiv elektrischen Körper mehr, im negativ elektrischen aber weniger von dem Fluidum vorhanden sei[1]). Von dieser Vorstellung stammen auch die Ausdrücke positive und negative Elektricität. Es ist zu bemerken, dass diese Bezeichnung eine willkürliche ist. Sie entspricht aber jenem Verhalten der Elektricität, das durch algebraische Grössen ausgedrückt werden kann; im Folgenden wird dies noch deutlich hervortreten.

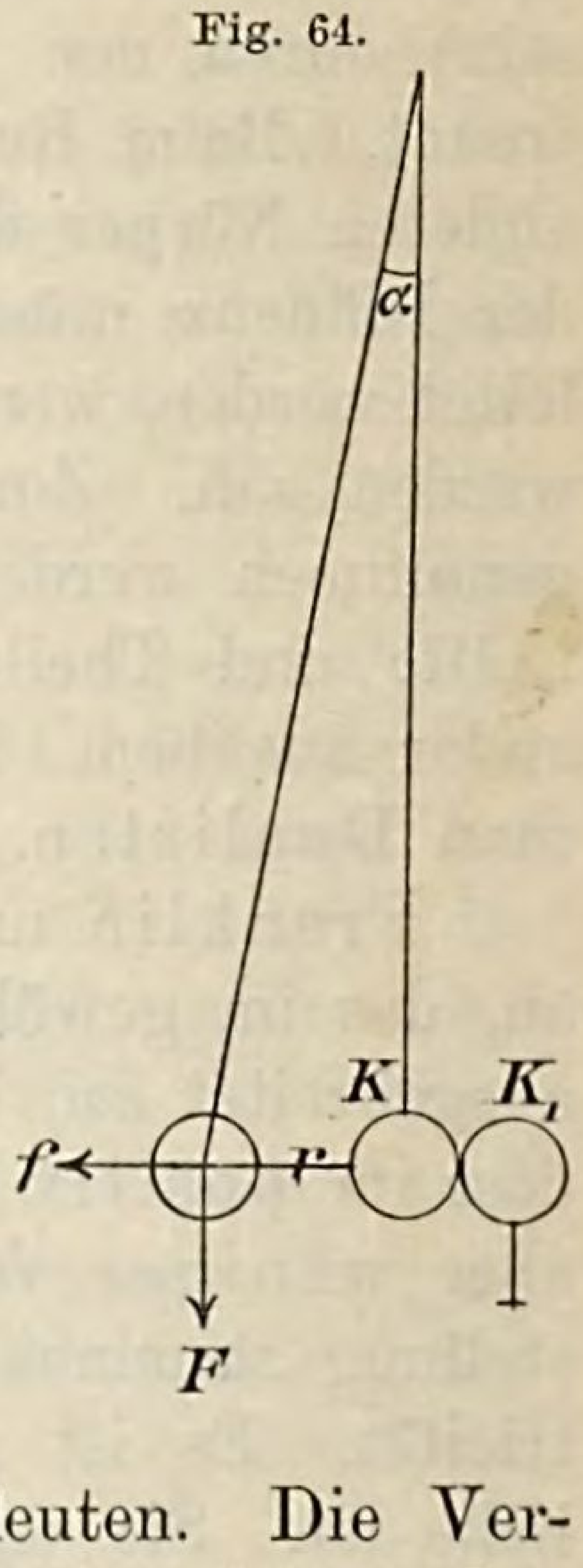
Eine Verbesserung der unitarischen Theorie wurde in neuerer Zeit von Edlund gegeben: das elektrische Fluidum wird mit dem Lichtäther identificiert; ein Überschuss von Äther in einem Körper wird als positive und ein Mangel als negative Elektricität erklärt. Wird der Äther als unzusammendrückbar und eine zu- oder

1) Eine Anwendung der Theorie siehe in F. Exners Vorlesungen über Elektricität.

weggeführte Ätherschichte an der Oberfläche eines Körpers beziehungsweise als positive oder negative Ladung betrachtet, so lässt sich leicht der Einfluss der Elektrisierung auf den umgebenden Raumäther folgern und zeigen, dass Edlunds Theorie mit Faradays Theorie der elektrischen Kraftlinien und Maxwells Theorie der elektrischen Verschiebung und des Zwangszustandes im elektrischen Felde im Einklange steht (vgl. § 53b, c). Die folgenden Lehren sollen zunächst stets im Anschluss an die Thatsachen entwickelt und dann im mechanischen Sinne anschaulich gedeutet werden.

§ 94. **Coulombs Gesetz (1785). Elektricitätsmenge.** Coulomb wies durch Ablenkungsversuche mit der Drehwage und durch Schwingungsversuche nach, dass zwei elektrische Körper nach einem ähnlichen Gesetze auf einander wirken, wie zwei ponderable Massen, dass für die Elektricität ein dem Newton'schen Gravitationsgesetze entsprechendes Gesetz gilt. Der Versuch kann nach J. Odstrčil mit zwei gleichen, kleinen, leitenden Kugeln, von denen eine als Standkugel benützt wird und die andere an einem langen Seidenfaden aufgehängt ist, nachgewiesen werden (Fig. 64). Die Kugeln mögen anfangs einander berühren. Elektrisiert man dann beide Kugeln gleichartig, so schlägt die Pendelkugel aus, bis die tangentiale Schwerkraftcomponente der elektrischen Abstossung das Gleichgewicht hält. Die Entfernung der Kugeln kann auf einer hinter ihnen aufgestellten Scala abgelesen werden. Für die Schwerkraftcomponente, beziehungsweise für die elektrische Kraft erhält man:

Fig. 64.



$$f = F \cdot \sin\alpha \doteq F \cdot \alpha = \frac{F}{l} \cdot \lambda .$$

Aus mehreren Versuchen ergibt sich

$$f_1 : f_2 = \frac{1}{r_1^{\,2}} : \frac{1}{r_2^{\,2}},$$

wenn r die Entfernungen der beiden Kugeln bedeuten. Die Versuche lehren, dass die Abstossungskräfte gleichartig elektrischer Körper dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sind.

Dasselbe Gesetz gilt auch für die Anziehung ungleichartig elektrischer Körper. Zum Nachweis dessen hat man die Pendelkugel in entsprechende Entfernungen von der Standkugel zu bringen; beide Kugeln werden sich nun einander nähern; die Berechnung der elektrischen Kraft stimmt mit der im vorigen Falle überein.

Der angedeutete Versuch ist auch geeignet, zu dem Begriffe und Masse der Elektricitätsmenge zu führen[1]).

1) E. Mach, Grundriss der Naturlehre S. 195. Vgl. auch Machs Vortrag,

Berührt man während der Abstossung der Kugeln etwa K mit einer gleichen Kugel K_2, so wird die elektrische Kraft von K in zwei gleiche Theile getheilt; die Wirkung der Kugeln K und K_2 ist dieselbe, wie früher die Wirkung von K allein. Nimmt man die Berührungskugel K_2 hinweg, so erweist sich die wirkende Kraft von K nach der Theilung nur halb so gross. — Durch Berührung von K oder K_1 mit zwei oder drei anderen gleichen Kugeln kann man die elektrische Kraft in drei und vier Theile theilen. Die Theilung der elektrischen Kraft wird anschaulich durch die Vorstellung, dass die Kugel K auf ihrer Oberfläche mit einer Elektricitätsmenge belegt sei, dass dieselbe unveränderlich sei und bei der Berührung mit anderen Kugeln auf diese überfliesse. —

Als Einheit der Elektricitätsmenge bezeichnen wir jene, welche auf eine gleich grosse Elektricitätsmenge in der Entfernung von 1 cm die Krafteinheit (1 Dyn) ausübt.

Die Elektricitätsmengen q und q_1 üben alsdann in der Entfernung r (cm) die Kraft $f = \frac{q q_1}{r^2}$ (Dyn) auf einander aus. Wird $q = q_1$, so ist $f = q^2/r^2$ und $q = r\sqrt{f}$. Darnach ist die Dimension der Elektricitätsmenge $M^{1/2} \cdot L^{3/2} \cdot T^{-1}$ oder $g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot sec^{-1}$.

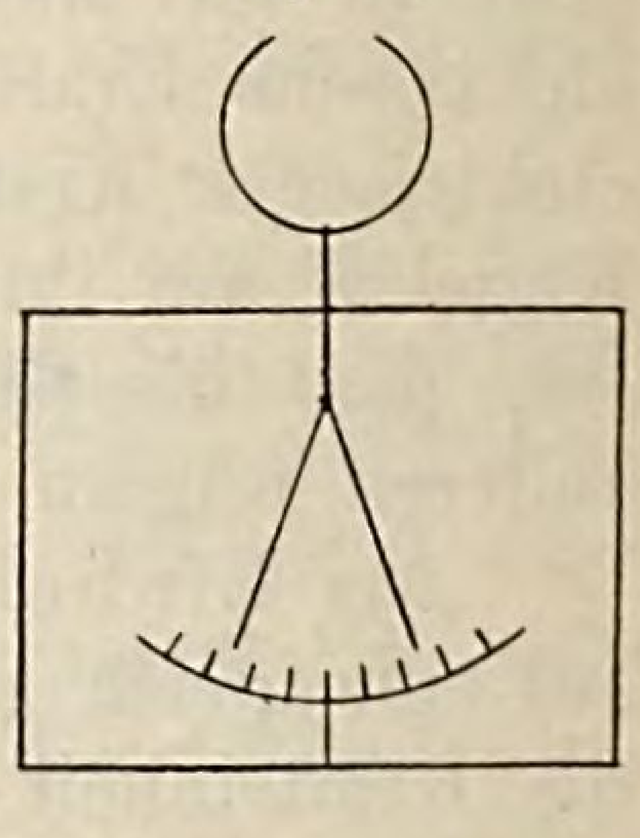
Für messende Versuche ist die angegebene absolute elektrostatische Einheit (a. e. s. E.) wegen ihrer Kleinheit unzweckmässig; man wählt deshalb als praktische Einheit 1 Coulomb (Cb) $= 3 \cdot 10^9$ a. e. s. E. Der Zusammenhang eines Coulomb mit den anderen praktischen Einheiten der Elektricitätslehre soll später angegeben werden.

Aufg. 1. Mit welcher Elektricitätsmenge muss jede der beiden Kugeln (Fig. 64) geladen sein, wenn das Gewicht einer Kugel 1 g, die Pendellänge 4·905 m und der Abstand der Kugeln im Gleichgewichte 2 cm beträgt? Die Schwerebeschleunigung $a = 9{\cdot}81$ m. Die Kugeldimensionen sollen vernachlässigt werden. — ($q^2/2^2 = 981 \cdot 2/490{\cdot}5$ Dyn, $q = 4$.) **2.** Von zwei ungleichnamig elektrischen Kugeln wird das Gewicht der unteren von der elektrischen Anziehung aufgehoben, das Gewicht der unteren Kugel sei 0·5 g, ihre Ladung 9 e. s. E. und die Entfernung beider Kugeln 3 cm. Wie gross ist die Ladung der oberen Kugel? — (490·5 e. s. E.) **3.** Zwei Kugeln mit den Ladungen von 12 und 3 e. s. E. sind 12 cm von einander entfernt; an welcher Stelle zwischen beiden Kugeln bleibt eine irgendwie geladene Kugel im Gleichgewichte? — (In 8 cm Entfernung von der ersteren Kugel.) **4.** Mit welcher Kraft wirkt ein Coulomb ($= 3 \cdot 10^9$ e. s. E.) auf eine gleiche Ladung in der Entfernung von 1 m? — ($9 \cdot 10^{14}$ Dyn $= 9174 \cdot 10^5$ kg.) **5.** In welcher Entfernung wirken zwei elektrische Ladungen von je 1 Coulomb mit der Kraft 1 kg auf einander? — (30 290 m.)

gehalten auf der elektrischen Ausstellung in Wien 1883, abgedruckt in Lotos, Jahrb. d. Naturw. 1884. S. 91.

§ 95. **Elektricitätsgrad.** Die Elektricitätsmenge allein bestimmt noch nicht den elektrischen Zustand eines geladenen Conductors. Man kann dies auf eine einfache Weise nachweisen mit Hilfe mehrerer Elektroskope, von denen jedes anstatt des oberen Metallknopfes eine metallene Hohlkugel (Fig. 65) besitzt[1]). Man ist imstande eine solche Kugel, beziehungsweise das Elektroskop mit einer bestimmten Elektricitätsmenge zu laden, indem man etwa kleine Metallkugeln von bestimmter Ladung ins Innere der Hohlkugel bringt, sie durch Berührung mit dieser ganz entladet und den Vorgang beliebig oft wiederholt. Mittelst solcher Elektroskope kann man nachweisen: 1) Zwei gleiche und gleich stark geladene Elektroskope ändern die Ausschlagswinkel ihrer Blättchen nicht, wenn beide Elektroskope leitend verbunden werden. Es herrscht also elektrisches Gleichgewicht zwischen beiden Kugeln. 2) Enthält eine der beiden Kugeln eine grössere Ladung als die andere, so geht durch Leitung von der ersten zur zweiten Kugel Elektricität über; Ab- und Zunahme der elektrischen Ladung wird durch Zusammenfallen, beziehungsweise durch Auseinanderfliehen der Blättchen angezeigt. 3) Ist der Halbmesser einer Hohlkugel 2-, 3-, 4mal grösser als der andere, so muss auch die Elektricitätsmenge der ersten Kugel 2-, 3-, 4mal grösser sein als jene der zweiten, wenn Gleichgewicht zwischen beiden Kugeln bei leitender Verbindung derselben bestehen soll.

Fig. 65.



Die Bedingung des elektrischen Gleichgewichtes zwischen zwei mit einander leitend verbundenen Kugeln ist also nicht die gleiche Ladung der Kugeln, sondern die Gleichheit des Quotienten aus der Elektricitätsmenge durch den Kugelradius. Diese für das Gleichgewicht charakteristische Grösse

$$V = \frac{q}{r}$$

heisst der Elektricitätsgrad. — Es sei schon hier bemerkt, dass der Factor der Elektricitätsmenge q, nämlich $1/r$, den Namen elektrische Capacität führt. — Dass der Elektricitätsgrad bei jedem guten Leiter von beliebiger Form aus dem Producte von Elektricitätsmenge und Capacität besteht, soll an anderer Stelle nachgewiesen werden. Schon hier ist ersichtlich, dass die Capacität von der Form des Conductors abhängt.

Nach den bisherigen Feststellungen ist es möglich, für das

1) Bruno Kolbe, Einführung in die Elektricitätslehre. 1893. K. Noack, Behdlg. d. Potentiallehre. Zeitsch. f. phys. u. chem. Unt. 1893. S. 221. A. Schülke, Zur Behdlg. d. Potentials beim Unterr. Zeitsch. f. math. u. naturw. Unterr. 1894. S. 401. R. Wronski, Das Intensitätsgesetz etc.

Elektroskop eine Eintheilung nach Elektricitätsgraden zu verfertigen und den Apparat zu einem Elektrometer zu gestalten. Um die Elektricitätsgrade 1, 2, 3, 4 zu erhalten, muss die Kugel des Apparates mit 1-, 2-, 3-, 4mal so viel Elektricitätseinheiten geladen werden, als der Kugelhalbmesser Centimeter enthält.

Mit einem solchen Elektrometer ist man auch imstande, den Elektricitätsgrad eines beliebig geformten elektrischen Conductors zu bestimmen, indem man diesen in entsprechender Entfernung aufstellt und durch einen dünnen Draht mit dem Elektrometer leitend verbindet. Wenn man ein Ende des Drahtes längs der Oberfläche des Conductors verschiebt, so ändert sich der Ausschlag des Elektrometers nicht; daraus folgt, dass am ganzen Conductor derselbe Elektricitätsgrad besteht, der durch den Elektrometerauschlag gemessen wird. Es ist ersichtlich, dass das Elektrometer bei seiner Benützung eine ähnliche Rolle spielt, wie das Thermometer in der Wärmelehre: beide Apparate bestimmen die Zustandsgrade der Körper, die für das elektrische, beziehungsweise thermische Gleichgewicht entscheidend sind. Schon Ohm hat (1827) die Ähnlichkeit der Vorgänge bei der Elektricitäts- und Wärmeleitung erkannt und für die „elektrische Strömung" ein dem Fourier'schen Wärmeleitungsgesetz (1822) analoges Gesetz aufgestellt. Darnach ist die Stromstärke der Differenz der Elektricitätsgrade proportional. In diesem Gesetze ist die Bedeutung des Elektricitätsgrades als Function, welche das Gleichgewicht bestimmt, enthalten.

Aus dieser Bedeutung folgt nun leicht die Beziehung des Elektricitätsgrades zur Energie. Wenn wir das Helm'sche Intensitätsgesetz zur Anwendung bringen, so erkennen wir, dass der Elektricitätsgrad der Wirkungsgrad oder der Intensitätsfactor der elektrischen Energie sein muss. Er ist mit dem Wärmegrad oder der Temperatur der Wärme, mit dem Gewichte einer mechanischen Arbeit oder mit dem Druck einer Volumenergie zu vergleichen. Recht zweckmässig lassen sich zwei leitend verbundene elektrische Conductoren mit zwei communicierenden Gefässen vergleichen, die mit einer Flüssigkeit gefüllt sind. Bei diesen sind die Bodendrücke auf die Flächeneinheit ($p = h \cdot f$) die Wirkungsgrade; solange dieselben ungleich sind, geht Flüssigkeit von einem Gefässe ins andere über. Jeder derselben besteht aus zwei Factoren, von denen einer die Flüssigkeitshöhe ist; analog enthält auch der Elektricitätsgrad die Elektricitätsmenge als Factor.

§ 96. **Elektrische Energie.** Bei der Elektricitätserregung wird eine Arbeit geleistet, die später noch genauer betrachtet werden soll. Diese Arbeit ist als elektrische Energie der Ladung aufgespeichert, solange der elektrische Zustand des betreffenden Conductors andauert; beim Entladen wird sie wieder gewonnen. Eine hieher gehörige

mechanische Leistung ist die Anziehung und Abstossung ursprünglich unelektrischer Körper; eine andere Erscheinung ist die bei der Ableitung der Elektricität durch einen dünnen Draht in diesem entwickelte Wärme; dieselbe ist der verschwundenen elektrischen Energie gleichwertig.

Zur näheren Bestimmung dieser Energie sollen erst zwei Vergleiche dienen. Die Wärme eines Körpers, gezählt von 0° C., wird bestimmt durch das Product aus dem Intensitätsfactor, der Temperatur, in den Extensitätsfactor, die specifische Wärme mal dem Gewichte. Die Raumenergie eines Flüssigkeitsgewichtes hat das Volumen der Flüssigkeit zum Extensitätsfactor und den Bodendruck zum Intensitätsfactor. Nimmt man bei zwei communicierenden Gefässen mit der im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit eine virtuelle Verschiebung vor, so dass der Intensitätsfactor als unverändert gelten kann, dann tritt ein verschwindend kleiner Theil des Flüssigkeitsvolumens aus einem ins andere Gefäss über, die Energieabnahme der Flüssigkeit in einem Gefässe ist gleich der Energiezunahme im anderen, die algebraische Summe der Energieänderungen ist gleich Null, und die Energie bleibt constant. Denken wir uns in ähnlicher Weise zwei elektrische Conductoren mit einander leitend verbunden, so ist im Gleichgewichtszustande der Elektricitätsgrad bei beiden Conductoren derselbe; denken wir uns ferner eine virtuelle Verschiebung der Elektricität, die zwar nicht den Elektricitätsgrad, aber die elektrische Energie auf jedem Körper verschwindend wenig ändert, so muss im Gleichgewichtszustande der Wert der gesammten Energie unverändert bleiben. Was ändert sich nun hiebei auf jedem Conductor bei constantem Elektricitätsgrad? Die Elektricitätsmenge. Aus dem Vergleiche derselben mit dem Flüssigkeitsraum der communicierenden Gefässe folgt, dass sie der Extensitätsfactor der elektrischen Energie ist. Wenn der Analogieschluss richtig ist, so muss die elektrische Energie den Elektricitätsgrad V und die Elektricitätsmenge Q als Factoren enthalten, und es muss die Gleichung bestehen

$$W = c \cdot Q \cdot V.$$

Nach dem gebräuchlichen elektrischen Masse ist die Constante $c = 1/2$. Eine Probe für W liefert die Bedingung der virtuellen Verschiebung $d(Q_1^2/2r_1) = d(Q_2^2/2r_2)$, aus der die Gleichheit der Elektricitätsgrade Q_1/r_1 und Q_2/r_2 folgt. Die theoretische Begründung dieses Gesetzes soll später noch weiter ausgeführt werden. Hier sei nur noch auf die experimentelle Bestätigung hingewiesen. Es dient dazu das von Kinnersley erfundene und von Riess (1838) zu Messungen benützte elektrische Luftthermometer. Dasselbe besteht im wesentlichen aus einem mit Luft gefüllten Ballon, in welchem sich auch ein spiral-

förmig gewickelter Draht befindet. Wird der Draht durch einen elektrischen Entladungsstrom erwärmt, so ändern sich Volumen oder Druck der Luft, und es wird eine Flüssigkeitssäule in einer mit dem Ballon verbundenen Röhre verschoben. Eine Berechnung der entwickelten Wärme zeigt, dass dieselbe proportional ist der Elektricitätsmenge und dem Elektricitätsgrade des entladenen Conductors, in mechanischen Einheiten ausgedrückt $= \frac{1}{2} Q \cdot V$.

Eine andere Art, um die Ladungsenergie zu bestimmen, ist mit Hilfe der Influenzelektrisiermaschine ausführbar. Rosetti bestimmte die mechanische Arbeit der Elektrisierung, indem er eine Influenzmaschine durch Gewichte in Betrieb setzte, und zwar einmal im unelektrischen und dann im elektrischen Zustande, und jedesmal die verbrauchte mechanische Arbeit berechnete. E. Mach hat zu diesem Zwecke die Einrichtung der Influenzmaschine wesentlich verbessert[1]). Die Versuche bestätigen, dass die Ladungsenergie durch das Product $\frac{1}{2} \cdot Q \cdot V$ bestimmt wird. Der Ausdruck ist für beliebig gestaltete Conductoren giltig.

§ 97. **Elektricitätsgrad als Arbeitswert. Potential.** (Green 1828, Gauss 1840.) a) Die Bedeutung des Elektricitätsgrades als Arbeitswert folgt leicht aus seiner Bedeutung als Energiefactor. Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist die elektrische Ladungsenergie

$$W = \frac{1}{2} Q \cdot V$$

und in § 95 wurde für den Elektricitätsgrad einer Kugel durch Versuche der Ausdruck gefunden

$$V = \frac{Q}{r}.$$

Mit Rücksicht darauf wird die elektrische Energie

$$W = \frac{Q^2}{2 \cdot r}.$$

Daraus erhält man wieder

$$V = \frac{dW}{dQ} = \frac{Q}{r},$$

d. h. der Elektricitätsgrad ist die Energieänderung, welche der Änderung der Ladung um eine Elektricitätseinheit entspricht.

b) Diese Bedeutung des Elektricitätsgrades V lässt sich auch mittelst des Coulomb'schen Gesetzes direct gewinnen. Das Gesetz gestattet die Arbeit zu berechnen, welche zur Vermehrung der elektrischen Ladung eines Conductors erforderlich ist. Wenn eine sehr kleine Kugel mit der Elektricitätsmenge Q geladen ist, so wirkt sie auf eine Elektricitätseinheit in der Entfernung R mit der Kraft

1) E. Mach, Vortrag über die Grundbegriffe d. Elektr. w. o. 1884. Siehe auch Rusch Abhdlg. i. d. Zeitsch. f. d. Rlw. Wien 1893.

$$\frac{Q}{R^2},$$

und die Arbeit, welche nothwendig ist, um die gleichartige Elektricitätseinheit aus unendlicher Entfernung in die Entfernung R zu bringen, ist

$$\int_R^\infty \frac{Q}{R^2}\,dR = -\frac{Q}{R}.$$

Man nennt diesen Wert das Potential der Elektricitätsmenge Q in der Entfernung R; der Ausdruck stimmt mit dem für die Gravitation abgeleiteten Potential (§ 16) überein; an der Stelle der Elektricitätsmenge steht dort die ponderable Masse. Die Übereinstimmung beider Potentialwerte hat ihren Grund in den übereinstimmenden Formen der Gesetze von Newton und Coulomb. Dieselbe gestattet eine unmittelbare Anwendung der in der Mechanik in den §§ 18 und 19 entwickelten Lehren auf elektrische Erscheinungen. Wir benützen zunächst die Sätze von Gauss, das Potential und die potentielle Energie einer Kugelschale. Wir denken uns an der Stelle der ponderablen Masse M der Kugelschale hier die elektrische Ladung Q auf der Oberfläche eines kugelförmigen Conductors und erhalten für die elektrische Kraft auf die Masseneinheit in der Entfernung R

$$f = \frac{Q}{R^2},$$

d. h. ein elektrischer Kugelconductor wirkt auf eine ausser ihm liegende Elektricitätseinheit so, als ob die ganze elektrische Ladung im Kugelmittelpunkt vereint wäre.

Der Wert für die potentielle Energie

$$W = \frac{Q^2}{2r}$$

und für das Potential in einem Punkte der Oberfläche

$$V = \frac{dW}{dQ} = \frac{Q}{r}$$

stimmen mit den vorstehend unter a) angegebenen Werten für W und V überein. Das Potential ist dieselbe Grösse, wie der Elektricitätsgrad; es bedeutet die bei der Ladungsänderung auf die Elektricitätseinheit entfallende Energieänderung.

Die Vorzeichen der Kraft und der Arbeit müssen besonders berücksichtigt werden; sie müssen zum Ausdrucke bringen, dass gleichnamige Elektricitätsmengen abstossend und ungleichnamige anziehend auf einander wirken.

Bei der Verbindung eines elektrischen Conductors mit einem unelektrischen gibt das Potential des ersteren die Potentialdifferenz beider Leiter an und bestimmt die Arbeit, welche bei der Fortführung der Elektricitätseinheit geleistet wird; in diesem Sinne wird das

Potential oder auch die Potentialdifferenz elektromotorische Kraft genannt (zum Unterschiede von Dichte und Spannung).

Aus dem letzten Werte für V gewinnen wir die Einheit des Potentials, wenn $Q = 1$ und $r = 1$, d. h.: eine elektrische Kugelfläche besitzt die Einheit des Potentials, wenn die Elektricitätsmenge und der Kugelradius der Einheit gleich sind.

Die elektrostatische Einheit des Potentials ist jenes Potential, welches der elektrostatischen Elektricitätseinheit in der Entfernung der Längeneinheit (1 cm) entspricht. Im cm-g-sec-Systeme ist der betreffende Arbeitswert 1 Erg.

Bei praktischen Berechnungen verwendet man als Einheit des Potentials und somit auch als Einheit der elektromotorischen Kraft 1 Volt $= 1/(3 \cdot 10^2)$ elektrostatische Einheiten des Potentials. Die Dimension des Potentials ist $(M^{1/2} \cdot L^{1/2} \cdot T^{-1})$.

c) Gleichgewichtsbedingung. Um auch hier zu zeigen, dass das Potential jener Factor der Energie ist, der das elektrische Gleichgewicht bedingt, soll die Gleichgewichtsbedingung für zwei elektrische, leitend verbundene Kugeln ermittelt werden. Sind die Kugeln entsprechend weit von einander entfernt, so dass Influenzwirkungen ausgeschlossen sind, dann sind die Ladungsenergien

$$W_1 = \frac{Q_1^2}{2r_1}, \quad W_2 = \frac{Q_2^2}{2r_2}.$$

Gleichgewicht herrscht, wenn bei einer virtuellen Verschiebung der Elektricitätsmenge keine Arbeit geleistet wird. Geht die sehr kleine Elektricitätsmenge dQ längs des Leitungsdrahtes von einer Kugel zur anderen über, so ist die Arbeitsleistung gleich der Summe der Energieänderung, nämlich

$$\left(\frac{dW_1}{dQ_1} - \frac{dW_2}{dQ_2}\right) dQ = \left(\frac{Q_1}{r_1} - \frac{Q_2}{r_2}\right) dQ = 0.$$

Die Bedingung wird erfüllt, wenn $Q_1/r_1 = Q_2/r_2$, d. h.: es herrscht Gleichgewicht, wenn die Potentiale auf beiden Conductoren einander gleich sind.

Aufg. 1. Eine Kugel I ist mit $Q = 20$ e. s. E. geladen; in einer Entfernung $R = 400$ cm ist eine Kugel II mit $q = 8$ e. s. E. geladen. Welche Arbeit muss gegen die elektrischen Kräfte geleistet werden, wenn eine Kugel der anderen bis auf $r = 320$ cm genähert werden soll? — $(Q \cdot q(1/r - 1/R) = 0{\cdot}1$ Erg.) **2.** Wenn von einer mit $+Q = 10$ e. s. E. geladenen Kugel eine in $r = 250$ cm Abstand befindliche mit $-q = -7$ e. s. E. geladene Kugel um $d = 100$ cm weggerückt werden soll, welche Arbeit hat man der elektrischen Anziehung entgegen zu leisten? — $(Qq(1/r - 1/(r+d)) = 0{\cdot}08$ Erg.) **3.** Welche Arbeit muss gegen die elektrischen Kräfte geleistet werden, wenn eine Ladung von $+Q = 100$ e. s. E. aus unendlicher Ferne auf eine isolierte Kugel K von $r = 25$ cm Halbmesser gebracht werden soll? Wie gross ist die Arbeit für die

Ladung — Q? — ($W = Q^2/2r = 200$ Erg.) **4.** Eine Kugel von $r = 9$ cm Halbmesser, die mit $Q = 180$ e. s. E. geladen ist, wird vollständig entladen. Wie viel Wärme könnte hiebei gewonnen werden, falls die ganze elektrische Energie in Wärme übergienge? —

$$(W = Q^2/2r \cdot 427 \cdot 0{\cdot}981 \cdot 10^5 = 43 \cdot 10^{-6} \text{ Cal.})$$

5. Wie gross ist das Potential von der Erdoberfläche, wenn die Erde nach F. Exner als eine negative mit $2 \cdot 10^{16}$ e. s. E. geladene leitende Kugel vom Halbmesser $r = 6 \cdot 10^3$ km angesehen wird? —

$$(V = Q/r = 3{\cdot}\dot{3} \cdot 10^7 \text{ Erg.})$$

6. $n = 8$ Kügelchen (Regentropfen) von gleichem Halbmesser r sind mit je q e. s. E. geladen. Wie vielmal wird das Potential an derjenigen Kugel grösser sein, welche durch Zusammenfliessen der n Kügelchen entsteht? — ($v = q/r$, $V = nq/R$, $n \cdot \frac{4}{3} r^3\pi = \frac{4}{3} R^3\pi$; $V = v\sqrt[3]{n^2} = 4v$. Steigerung des Potentials der Gewitterwolken durch Condensation.) **7.** Eine Ladung von $Q = 200$ e. s. E. soll von einer Stelle M des elektrischen Feldes der Erde, an welcher das Potential $V = 2{\cdot}3 \cdot 10^7$ Erg beträgt, an die Erdoberfläche (vgl. Aufg. 5) gebracht werden. Welche Arbeit muss gegen die elektrischen Kräfte geleistet werden? —

$$(W = 200(3{\cdot}\dot{3} \cdot 10^7 - 2{\cdot}\dot{3} \cdot 10^7) = 200 \cdot 10^7 \text{ Erg.})$$

8. Die Potentialdifferenz zwischen einem metallischen Conductor und der Erdoberfläche ist zu 50 elektrostatischen Potentialeinheiten bestimmt worden; jene zwischen einem zweiten Conductor und der Erde zu 10 e. s. Potentialeinheiten. Welche Arbeit erfordert der Übergang von 500 e. s. E. vom ersten zum zweiten Conductor? — ($W = 500(50 - 10) = 20000$ Erg.) **9.** In einer Höhe von $h = 580$ m, beziehungsweise $h' = 360$ m über der Erdoberfläche ist ein Potentialunterschied von $\Delta V = 28600$ Volt beobachtet worden; wie gross war damals an dem Beobachtungsorte das Potentialgefälle im elektrischen Felde der Erde? —

$$(\Delta V/10^2(h - h') = 1{\cdot}3 \text{ Volt pro cm.})$$

10. Wenn an einem Orte der Erde ein durchschnittliches Potentialgefälle von $\Delta V = 1{\cdot}4$ Volt pro 1 cm ist, welcher Potentialunterschied besteht an zwei Stellen, deren Höhen um $l = 5$ m verschieden sind? —

$$(1{\cdot}4 \cdot 500 = 700 \text{ Volt.})$$ [E. Maiss.]

§ 98. **Sitz der Elektricität. Dichte. Spannung.** a) In § 90 wurde bereits auf die Versuche hingewiesen, welche zeigen, dass die Elektricität guter Leiter auf deren Oberfläche ihren Sitz habe. Dieser Umstand kann auch daraus geschlossen werden, dass das Potential im Inneren eines elektrischen Conductors constant ist. In § 18 wurde nachgewiesen und im vorhergehenden Paragraphen wurde es geltend gemacht, dass das Potential im Inneren einer Kugelschale einen unveränderlichen Wert besitzt; bei der Verschiebung eines elektrischen Punktes im Innern einer elektrischen Schale wird demnach

keine Arbeit geleistet, und es besteht daselbst auch keine elektrische Kraftwirkung; ein elektrischer Punkt im Inneren des Körpers ist in jeder Lage im Gleichgewichte. Dieselbe Bedingung muss auch für das elektrische Gleichgewicht in jedem beliebigen guten Elektricitätsleiter gelten. In jedem inneren Punkte muss die elektrische Kraft und somit auch die Elektricitätsmenge gleich Null sein. Wäre das Innere etwa schalenförmig mit elektrischer Masse erfüllt, dann wäre im Körper das Potential nicht mehr constant, es müssten elektrische Kräfte eine Bewegung der Elektricitätsmenge veranlassen, welcher der gute Leiter kein Hindernis entgegensetzt; ein solcher Zustand wäre aber gegen die Voraussetzung des elektrischen Gleichgewichtes.

Ein weiterer theoretischer Grund für den Satz, dass die Elektricität der Conductoren auf der Oberfläche ihren Sitz hat, ist der, dass der Satz selbst dazu benützt werden kann, um das Coulomb'sche Gesetz mathematisch abzuleiten. (Siehe die nachfolgenden Aufgaben.)

b) Das Potential, beziehungsweise die elektrische Kraft in einem Punkte der Oberfläche gestattet die Bestimmung der elektrischen Dichte, d. i. der Elektricitätsmenge auf der Flächeneinheit (nach Coulomb). Speciell für eine Kugel ist die ganze elektrische Ladung

$$Q = 4r^2\pi \cdot \delta,$$

wenn δ die elektrische Dichte bezeichnet. Die Kraft auf die Masseneinheit in einem Oberflächenpunkte sei f; dann ist die Arbeit bei der Bewegung längs eines normalen Wegelementes dr zur Oberfläche, berechnet aus dem Potential V,

$$f \cdot dr = \frac{dV}{dr} \cdot dr = \frac{Q}{r^2} \cdot dr = \frac{4r^2\pi \cdot \delta}{r^2} \cdot dr,$$

und daraus ist

$$\delta = \frac{f}{4\pi},$$

d. h. die Dichte in einem Punkte einer elektrischen Schichte wird gefunden, wenn man die auf die Masseneinheit der Schichte wirkende normale Kraft durch 4π dividiert.

Die Elektricitätsmenge auf der Kugel ist aus geometrischen Gründen gleichmässig vertheilt; bei anders gestalteten Leitern hängt die Vertheilung von der Form ab. Durch Versuche wird diese Vertheilung mit „Probescheibchen“ untersucht, die man behufs Aufnahme der Elektricität auf einem Flächenstückchen des zu untersuchenden Conductors tangential an das betreffende Flächentheilchen anlegt und dann etwa mittelst der Coulomb'schen Drehwage oder in anderer Weise auf seine elektrische Ladung prüft.

c) Die vorstehend für die Kugelfläche erwiesene Beziehung zwischen der Kraftwirkung f und der Dichte δ gilt nach Laplace und Poisson ganz allgemein und dient zu dem Nachweise, dass die elektrische Dichte im Inneren eines Conductors gleich Null ist.

Zur elementaren Ableitung dieser Beziehung bedienen wir uns des Satzes von Gauss über die Kraftströmung (§ 18). Darnach ist die Kraft, welche eine wirkende Masse auf eine Fläche normal zu dieser ausübt, gleich dem Producte aus der Masse in den Raumwinkel, unter welchem die betreffende Fläche von der Lage der Masse aus erscheint. Mit Hilfe dieses Satzes kann nun die elektrische Oberflächendichte ermittelt werden. Wir greifen ein Element dS einer elektrischen Fläche S heraus, schliessen es in einen unendlich niedrigen, geraden Cylinder ein, dessen Erzeugenden normal zu dS stehen; dann beschränkt sich die Kraftwirkung auf beide Cylinderbasen, deren Grösse $= dS$. Ist die Kraft auf eine Basis $= f_1 . dS$ und auf eine andere $= f_2 \cdot dS$, dann ist die ganze Wirkung nach Gauss

$$(f_1 + f_2) \cdot dS = 4\pi \cdot q = 4\pi \cdot \delta \cdot dS.$$

Da die Kraft auf die innere Basis $f_2 = 0$ ist, so erhält man in Übereinstimmung mit dem obigen Werte für die Dichte

$$\delta = \frac{f_1}{4\pi}.$$

Für eine im Inneren eines Conductors liegende Schichte ist $f_1 = f_2 = 0$ und daher ist auch $\delta = 0$, d. h. im Inneren ist die elektrische Dichte gleich Null. — Auch ausserhalb des elektrischen Körpers führt eine analoge Anwendung des Gauss'schen Satzes zu der Relation $f_2 - f_1 = 0$, aus der folgt, dass auch dort $\delta = 0$ ist.

Dies sind die physikalischen Gründe für die Beziehung, welche Poisson (1813) zwischen den elektrischen Kräften und der elektrischen Dichte aufstellte. Poisson erhielt die Beziehung mittelst des Potentials als Kräftefunction, deren Differentialquotienten nach den Raumcoordinaten die Componenten der Kraft darstellen. Durch Zuhilfenahme einer Fläche im Raume und die Bestimmung der durch dieselbe hindurch gehenden Kraftströmung ist es möglich, das Ergebnis der Potentialtheorie auch auf elementarem Wege zu gewinnen. Bei solcher Vermeidung von verwickelten mathematischen Operationen treten die physikalischen Grössen deutlicher hervor, und es wird ersichtlich, dass die gewonnenen Resultate die Bedingung fordern, dass die Kräfte f_1 und f_2 auf den Basen eines unendlich kleinen Cylinders wirklich vorhanden seien; denn nur dann ist der Schluss zulässig, dass an der äusseren Seite der Oberfläche des Körpers f_1 endlich und $f_2 = 0$, ferner dass ausserhalb des elektrischen Körpers f_1 und f_2 von endlicher Grösse und einander gleich und die elektrische Dichte daselbst gleich Null seien.

Bei der Ableitung des Gauss'schen Satzes musste die Fläche, auf welche eine Masse eine Wirkung ausüben sollte, ebenfalls mit einer Masse belegt gedacht werden. Die letztere wird als Hilfsgrösse an-

genommen; sie kann eventuell reell gedacht werden, wie in dem bei der Gravitation behandelten Falle. Bei den vorstehenden Betrachtungen über Elektricität muss aber die Fläche ausserhalb des elektrischen Körpers thatsächlich von einer Kraftströmung getroffen werden, und die Potentialtheorie führt somit zur Kenntnis von Kräften im Raume rings um elektrische Körper. Faraday ist von einem anderen Gesichtspunkte und auf experimentellem Wege zu derselben Einsicht gelangt; die betreffenden Untersuchungen sollen im folgenden Paragraphen angestellt werden.

d) In dem Ausdrucke für die Dichte δ befindet sich die Kraft f der elektrischen Ladung auf die Elektricitätseinheit der Oberfläche; aus f lässt sich leicht die Kraft auf die Flächeneinheit, das ist die elektrische Spannung oder der elektrostatische Druck p berechnen. Da die Elektricitätsmenge auf der Flächeneinheit $= \delta$ ist, so ist die Kraft auf dieselbe

$$p = f \cdot \delta = 4\pi \cdot \delta^2.$$

Die elektrische Spannung ist demnach dem Quadrate der Dichte proportional.

Zu einem genaueren Ausdrucke für p gelangen wir, wenn wir die Oberflächenladung aus einer sehr dünnen Schichte bestehend annehmen. Die Wirkung der Ladung auf ein Element des elektrischen Oberflächenbeleges wächst da von innen nach aussen von Null bis f; sie ist in der Mitte der Schichte $\frac{1}{2} f$; und die Spannung als mittlere Kraft auf die Schichte pro Flächeneinheit ist

$$p = \frac{1}{2} f \cdot \delta = \frac{f^2}{8\pi} = 2\pi\,\delta^2.$$

Der Spannung p muss durch den Widerstand des umgebenden „dielektrischen“ Mittels das Gleichgewicht gehalten werden. Befindet sich der Conductor in der Luft, so besteht die Wirkung der Spannung darin, dass der Luftdruck an der Oberfläche verkleinert wird. Eine isolierte Seifenblase nimmt durch Elektrisierung an Volumen zu und erhält ihr ursprüngliches Volumen erst wieder, wenn sie in den natürlichen Zustand zurückkehrt. Van Marum hat thatsächlich nachgewiesen, dass ein mit Wasserstoff gefüllter Ballon scheinbar leichter, und dass seine Steigkraft grösser wird, wenn man ihn elektrisiert. Ebenso wird auch die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit (§ 60 und § 85) verändert.

Aufg. 1. Wie gross ist die Wirkung zweier Oberflächenelemente einer elektrischen Kugel auf einen Punkt im Inneren, von welchem aus die betreffenden Flächenelemente in entgegengesetzter Richtung unter gleichen Raumwinkeln erscheinen? Wie gross ist die Wirkung der ganzen elektrischen Ladung auf denselben Punkt? — (Nach Coulombs Gesetz

$= 0.$) **2.** Zwei in leitender Verbindung stehende Kugeln, deren Radien r_1 und r_2 seien, haben zusammen die elektrische Ladung Q; wie gross ist die elektrische Dichte jeder der beiden Kugeln? — (Es ist $Q = Q_1 + Q_2$ und das Potential $Q_1/r_1 = Q_2/r_2$. Daraus folgt $\delta_1 = Q/4\pi r_1(r_1 + r_2)$ und $\delta_2 = Q/4\pi r_2(r_1 + r_2)$.) **3.** Welches ist die elektrische Spannung auf jeder der beiden Kugeln in der vorhergehenden Aufgabe? Wie lässt sich mittelst des gewonnenen Resultates die Spitzenwirkung erklären? **4.** Wenn die Erde ($R = 6367$ km) eine negative Ladung von $Q = 2 \cdot 10^{16}$ e. s. E. besitzt, wie gross ist die elektrische Dichte der Erde? — ($\delta = 0{\cdot}004$ e. s. E. pro 1 cm^2.) **5.** Wie gross ist der elektrostatische Druck pro 1 cm^2 der elektrischen Erdladung nach der vorhergehenden Aufgabe? — ($p = 2\pi\delta^2 = 0{\cdot}000100$ Dyn.) **6.** Welchen elektrostatischen Druck übt die Ladung einer Kugel von 25 cm Durchmesser auf die umgebende Luft aus, wenn dieselbe 7850 e. s. E. beträgt? — ($p = 100{\cdot}5$ Dyn.) **7.** Nach Versuchen von Thomson kann die Luft einen Druck der elektrischen Ladung von 0·67 g auf 1 cm^2 ertragen, ehe eine Funkenentladung eintritt. Welche Elektricitätsmenge kann somit auf einer Kugel von 6 cm Halbmesser höchstens angehäuft werden, wenn ein Funke nicht erscheinen soll? — ($Q^2 = 8\pi \cdot 6^4 \cdot 0{\cdot}67 \cdot 981$, $Q = 4626{\cdot}9$ e. s. E.) **8.** Eine Seifenblase von 5 cm Halbmesser wurde nach Abschluss des Blaserohres mit 700 e. s. E. elektrisiert und zeigte eine Volumsvergrösserung. Wie viel betrug der diese Ausdehnung bewirkende Überdruck von innen nach aussen für je 1 cm? — (Der Überdruck ist $p = 700^2/8\pi \cdot 5^4 = 31{\cdot}2$ Dyn.) [E. Maiss.]

§ 99. **Arbeit der Ladung.** a) Ladung eines beliebigen Conductors. Denkt man sich die Ladung eines Conductors auf die Weise entstehen, dass die einzelnen elektrischen Massentheilchen aus unendlicher Entfernung her auf die Oberfläche zusammengebracht werden, so folgt leicht, dass das Laden, beziehungsweise das Elektrisieren, mit einer Arbeitsleistung verbunden ist. Die Arbeit besteht nach dieser Vorstellung in der Überwindung der gegenseitigen Abstossung jener gleichartigen Elektricitätstheilchen, welche auf der Oberfläche zusammengetragen werden. Nach dem Energieprincipe muss die Arbeit der Ladung der potentiellen Energie des elektrischen Conductors gleich sein und bei der Entladung wieder zum Vorschein kommen.

Zur Bestimmung der Arbeit benutzen wir die „elektrische Capacität“. Man versteht darunter jene Elektricitätsmenge, welcher in ihren Punkten die Einheit des Potentials entspricht. Aus dem Werte für das Potential $\sum \frac{Q}{r}$ folgt leicht, dass das Potential mit der Ladung Q proportional wächst, und dass demnach die Capacität für einen bestimmten Körper eine constante Grösse ist. Ist nun für einen Conductor die Ladung Q, das Potential V und die Capacität C, dann gilt nach dem Begriffe der Capacität die Relation

$$Q = VC.$$

Nach dem Begriffe des Potentials bedeutet V die Arbeit, um der Ladung die Elektricitätseinheit zuzuführen. Wird die Ladung um die sehr kleine Elektricitätsmenge dQ vermehrt, dann ist die Arbeit hierzu:

$$dw = V \cdot dQ = \frac{Q}{C} \cdot dQ.$$

Und die Arbeit der Gesammtladung ist

$$w = \int_0^Q \frac{Q\,dQ}{C} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} \cdot V \cdot Q,$$

d. h. der Arbeitswert oder die potentielle Energie der Ladung wird durch das halbe Product aus dem Potentiale in die Elektricitätsmenge bestimmt. Der Ausdruck heisst auch das Potential der Elektricität auf sich selbst. Er stimmt mit dem in § 96 angegebenen Werte für die elektrische Energie vollkommen überein.

Für die Kugel ist $V = \frac{Q}{r}$ und somit $w = \frac{Q^2}{2r}$ die Energie der Ladung. Gleichzeitig folgt für die Capacität $C = r$ der Zahlenwert des Radius, woraus wir schliessen, dass die Dimension der Capacität einer Länge entspricht.

b) Sind im Raume zwei elektrische Körper, wir nehmen zwei Kugeln mit den Radien r_1 und r_2 an, vorhanden, so besteht die potentielle Energie aus den Ladungsenergien der beiden Körper. Diese sind gegeben durch die Potentiale der Elektricitäten auf sich selbst, nämlich durch $\frac{Q_1^2}{2r_1}$ und $\frac{Q_2^2}{2r_2}$. Die Summe dieser Energien gibt die gesammte Energie des Systems, solange sich die Körper gegenseitig ausserhalb ihrer Wirkungssphären befinden. Besteht aber eine Wechselwirkung beider Körper, welche durch eine Annäherung derselben erreicht wird, dann kommt zu den Ladungsenergien noch die Energie der Wechselwirkung hinzu; dieselbe ist äquivalent der Arbeit der Annäherung der Körper und nach § 16 und § 97b durch das Potential der beiden Körper aufeinander bestimmt. Ist R die Entfernung der beiden kugelförmigen, elektrischen Körper, dann wird die gesammte potentielle Energie

$$W_1 = \frac{Q_1^2}{2r_1} + \frac{Q_2^2}{2r_2} \pm \frac{Q_1 Q_2}{R}.$$

Dieselbe muss durch die Arbeit des Elektrisierens erzeugt werden, wenn die Körper bereits während des Elektrisierens aufeinander wirken. Die Energie der Wechselwirkung im letzten Gliede kann jedoch auch durch die Bewegung der Körper gegen einander hervorgerufen werden. Denken wir uns das Elektrisieren gleichzeitig oder die Verschiebung beider Körper gleichmässig durchgeführt, dann kommt die Wechselwirkungs-Energie wegen der Gleichheit von Action und Reaction

jedem Körper zur Hälfte zu, und die elektrische Energie der einzelnen Körper ist durch folgende Werte gegeben:

$$W_1 = \frac{Q_1^2}{2r_1} + \frac{Q_1 Q_2}{2R} = \frac{Q_1}{2}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{R}\right)$$

und

$$W_2 = \frac{Q_2^2}{2r_2} + \frac{Q_1 Q_2}{2R} = \frac{Q_2}{2}\left(\frac{Q_2}{r_2} + \frac{Q_1}{R}\right).$$

Unter gegenseitiger Einwirkung beider Körper setzt sich das Potential in einem Punkte auf der Oberfläche eines Körpers zusammen aus dem Potentiale der Elektricität auf derselben Oberfläche und dem Potentiale der Elektricität des anderen Körpers; die bezüglichen Summen dieser Potentiale sind in den vorstehenden Klammern enthalten, daher bedeuten die Klammerausdrücke die Potentiale der beiden Körper unter ihrer gegenseitigen Einwirkung. Der Arbeitswert jeder Ladung ist demnach gegeben durch das halbe Product aus der Elektricitätsmenge in das Potential auf dem betreffenden Conductor $\left(\frac{Q}{2} \cdot V\right)$. Derselbe Satz wurde oben für einen Conductor abgeleitet. Die potentielle Energie des Systemes beider Körper setzt sich aus der Summe der Energien der einzelnen Ladungen zusammen.

c) Für das Arbeitsäquivalent der elektrischen Ladungen eines beliebigen Systemes von Conductoren gilt derselbe Satz, welcher für zwei Kugeln gefunden wurde. Denken wir uns die Ladungen der einzelnen Conductoren von Null gleichzeitig und im gleichen Verhältnisse wachsen bis die Endladungen erreicht sind, dann wächst das Potential jedes Körpers proportional mit seiner Ladung genau ebenso, wie es für einen Conductor unter a) angegeben wurde. Für jeden Körper ergibt sich demnach der Arbeitswert $\frac{1}{2} QV$; und die Summe dieser Werte für die einzelnen Conductoren gibt den Arbeitswert oder die potentielle Energie des Systems; also ist

$$W = \frac{1}{2} \sum QV,$$

d. h. die elektrische Energie eines Systems von Conductoren ist gleich der halben Summe der Producte der Ladungen in das Potential jedes Conductors.

§ 100. **Elektrisches Feld. Potentielle Energie.** a) Die Betrachtungen über das Gravitations-Potential in § 19 lassen sich auch auf das elektrische Potential übertragen. Der geometrische Ort eines Punktes mit einem bestimmten Potential ist eine Äquipotentialfläche, eine Fläche gleicher Arbeit oder eine Niveaufläche. Zu einer elektrischen Kugel sind die Niveauflächen concentrische Kugelflächen. Die Kraftrichtung ist in allen Punkten der Niveaufläche normal zu derselben. Die von einem Punkte ausgehenden,

nach einander folgenden Kraftrichtungen setzen nach Faraday eine Kraftlinie zusammen. Das von elektrischen Kraftlinien durchsetzte Feld heisst elektrisches Feld. Kraftlinien, welche ein Oberflächenstück eines elektrischen Conductors umschliessen, bilden eine Kraftröhre; dieselbe heisst Einheitsröhre, wenn ihre Basis mit der Elektricitätseinheit geladen ist, oder auch, wenn die Kraftströmung durch einen Querschnitt der Krafteinheit gleichkommt. Die Kraftströmung, welche eine Fläche im elektrischen Felde trifft, wird durch die Anzahl der Einheitsröhren bestimmt.

Nun lässt sich durch Versuche zeigen, dass im elektrischen Felde thatsächlich Kräfte in der Richtung der Kraftlinien wirksam sind; es sind Kräfte der elektrischen Induction oder Influenz, die an den betreffenden Stellen wirklich das berechnete Potential hervorrufen. Die bezügliche Untersuchung des Feldes kann in folgender Weise durchgeführt werden[1]: Man bringt in das elektrische Feld eines geladenen Conductors eine Probekugel, die durch einen langen dünnen Draht mit der Kugel eines entfernt stehenden nach Potentialmass gerichteten Elektrometers verbunden ist. In dem zu untersuchenden Punkte des Feldes sei das Potential V ohne Probekugel; die Probekugel wird durch Influenz elektrisch und gewinnt durch die Ladung $(-Q)$ das Potential $-Q/r$. Das gesammte Potential an der Versuchsstelle in Anwesenheit der Kugel ist nun $V - Q/r$. Die Elektrometerkugel erhält die Ladung $+Q$ und das Potential Q/R. Wegen der leitenden Verbindung müssen die Potentiale auf der Probekugel und auf der Elektrometerkugel einander gleich sein; daher ist

$$V - \frac{Q}{r} = \frac{Q}{R} = V'$$

und das gesuchte Potential

$$V = V'\left(\frac{R}{r} + 1\right).$$

Das gemessene Potential V' ist daher kleiner als das zu messende V. — Die Messung kann vereinfacht werden, wenn die Probekugel unendlich klein angenommen wird, wenn an ihrer Stelle der Draht eine Spitze besitzt, oder wenn daselbst am Ende der Leitung sich ein brennendes Licht befindet; dann strömt die Elektricität $-Q$ aus, das Potential V wird nicht durch Influenzelektricität verändert, und es ist unmittelbar

$$V = \frac{Q}{R} = V'.$$

Das Elektrometer bestimmt unmittelbar das gesuchte Potential der betreffenden Stelle des Feldes.

Die Bewegung der Probekugel oder der Flamme am Ende des

1) J. Wallentin, Moderne Elektricitätslehre. S. 35.

Leitungsdrahtes bringt keine Änderung im Ausschlage des Elektrometers hervor, wenn dieselbe auf einer Niveaufläche des Feldes erfolgt. Man kann daher durch diesen Versuch die Lage der Niveauflächen ermitteln und die bereits in § 19 gewonnenen Sätze experimentell bestätigen.

Auch die elektrischen Kraftlinien kann man im Raume ersichtlich machen, wenn man im elektrischen Felde einer dunklen Kammer mittelst eines Haarsiebes oder Bäuschchens Lykopodiumpulver ausstreut und dieses mit einem Sonnenstrahl beleuchtet. — Gut geeignet hiezu ist auch Terpentinöl in einem Glasgefässe, in das zwei entgegengesetzt elektrisierte Leitungsdrähte eingeführt sind; eingestreute Krystalle von schwefelsaurem Chinin oder nach Faraday Seidenfäden ordnen sich deutlich nach den Kraftlinien an.

Aus den Untersuchungen des elektrischen Feldes geht nach Faraday hervor, dass die Kraftlinien und die Kraftröhren an der Oberfläche eines elektrischen Körpers beginnen und an der Oberfläche anderer Körper im elektrischen Felde endigen; solche Körper sind entweder Gegenstände in der Nähe des elektrischen Conductors, fernere Gegenstände oder die Decke des Experimentierzimmers. Wenn ein Körper von elektrischen Kraftlinien getroffen wird, so wird er durch Induction oder Influenz elektrisch; aus diesem Grunde nennt Faraday die Kraftröhren auch Inductionsfäden. Der Theil der Oberfläche jenes Körpers, welcher einen Inductionsfaden abschliesst, besitzt immer dieselbe Menge entgegengesetzter Elektricität, als der Theil des Conductors, von dem der Faden ausgeht. Dieser Satz folgt auch aus dem Theoreme von Gauss. Denn denkt man sich einen Inductionsfaden oder eine Kraftröhre, die von dem elektrischen Conductor zu einem anderen Körper im elektrischen Felde übergeht, in das Innere der Körper verlängert und dort abgeschlossen, so ist die Kraftströmung, welche durch die beiden abschliessenden Basen hindurchgeht, gleich Null. Da eine seitliche Kraftströmung nicht vorhanden ist, so muss auch die eingeschlossene Elektricitätsmenge gleich Null sein; die beiden Oberflächenelemente der Körper innerhalb des Inductionsfadens müssen daher mit gleich grossen und entgegengesetzt bezeichneten Elektricitätsmengen geladen sein.

Aber nicht nur am Anfange und am Ende sind die Inductionsfäden ungleichnamig elektrisch; auch jedes Raumelement derselben zwischen zwei Querschnitten zeigt Polarität. Nach Faraday und Mosotti hat dieselbe in der elektrischen Polarität der Molecüle ihren Grund. Die Molecüle sollen gut leitend sein; sie werden aber durch das dielektrische Mittel, in dem sie eingebettet sind, isoliert. Mit Hilfe der Rechnung kann wirklich nachgewiesen werden, dass leitende Kugeln, in einem isolierenden Medium eingebettet, die Wirkung eines dielektrischen Mittels hervorbringen können.

b) Wie im Gravitationsfelde (§ 19) ist es auch im elektrischen Felde möglich, die potentielle Energie der elektrischen Ladung eines Conductors durch die Anzahl der Zellen auszudrücken, welche von Inductionsfäden und Niveauflächen gebildet werden. Man hat für jede Elektricitätseinheit der Ladung eine Einheitsröhre und von der Conductoroberfläche aus die aufeinander folgenden Niveauflächen mit den Potentialdifferenzen Eins zu construieren, dann wird jede Einheitsröhre in V Zellen und somit Q Einheitsröhren in QV Zellen getheilt. Die Zahl ist doppelt so gross, als die Zahl für die Ladungsenergie $\frac{1}{2} QV$.

Maxwell weist auf einfache Weise nach, dass auch für beliebig viele elektrische Körper die Zahl der Zellen doppelt so gross ist, als die Zahl für die elektrische Energie des Körpersystems. (Maxwell, Die Elektr. in elem. Behandlg. S. 50.)

Die bemerkenswerten Beziehungen zwischen Kraftlinien, Fäden, Niveauflächen und der elektrischen Energie führten Faraday und Maxwell zu der Ansicht, dass die elektrische Energie in Wirklichkeit ihren Sitz im Medium des elektrischen Feldes habe. Faraday kommt in seinen berühmten Experimental Researches in Elektricity zu folgenden Resultaten[1]):

„Elektrische Kraftwirkung scheint in einem gewissen durch den elektrisierten Körper in den einzelnen Partikeln des Mediums hervorgerufenen und erhaltenen Polarisationszustand zu bestehen, der sich dadurch charakterisiert, dass die Partikel zwei entgegengesetzt begabte, positive und negative Theile erhalten. Der Zustand, in den das Medium dadurch gerät, ist ein erzwungener; denn er entsteht durch eine äussere Kraft, bleibt, solange diese Kraft wirkt, und verschwindet, sobald die Kraft entfernt wird. Dieser Zustand wird aber nur in Isolatoren durch ein und dieselbe Elekricitätsmenge fortdauernd erhalten, denn nur bei ihnen bleiben die einzelnen Partikel in ihrer erzwungenen Lage, solange die Elektricitätsmenge vorhanden ist.“

c) Theorie der elektrischen Verschiebung. Gestützt auf die Experimental-Untersuchungen und die Anschauungen Faradays über den Zwangszustand des dielektrischen Mediums im elektrischen Felde hat Maxwell in seinem berühmten „Lehrbuche der Elektricität und des Magnetismus“ zur Erklärung der elektrischen Kraftwirkungen die Theorie der „elektrischen Verschiebung“ aufgestellt. Maxwell selbst gibt in seinem Werke „Die Elektricität in elementarer Behandlung“ (S. 51—52) folgende Darstellung derselben:

1) Maxwell, Lehrbuch der El. etc. I, S. 161.

Um eine präcise Vorstellung von dem Vorgange im dielektrischen Medium des Feldes zu gewinnen, wollen wir eine einzige Zelle betrachten, die zu einem Inductionsfaden gehört, der von einem positiv elektrischen Körper ausgeht. Die Zelle ist begrenzt von zwei auf einander folgenden Flächen gleichen Potentials, die den Körper umgeben.

Wir wissen, dass eine elektromotorische Kraft vorhanden ist, die von dem elektrischen Körper nach aussen wirkt. Auf ein nichtleitendes oder dielektrisches Medium ist die Wirkung der elektromotorischen Kraft die, dass sie eine elektrische Verschiebung, wie wir sagen können, hervorbringt, d. h. die Elektricität wird nach aussen in der Richtung der elektromotorischen Kraft gedrängt; aber, wenn die Elektricität diese Verschiebung erlitten hat, so ist doch ihr Zustand der, dass, sobald die elektromotorische Kraft zu wirken aufgehört hat, sie wieder die Lage einnimmt, welche sie vor der Verschiebung hatte.

Die Grösse der elektrischen Verschiebung wird durch die Elektricitätsmenge gemessen, welche durch eine feste Fläche hindurchgeht, die man sich parallel der Niveauflächen gezogen denken kann. Wir wissen absolut nichts über die Grösse des Weges, durch welchen hindurch irgend ein specieller Theil der Elektricität von seiner Anfangslage aus verschoben wird. Das einzige, was wir kennen, ist die Menge, welche durch eine gegebene Fläche hindurchgeht. Je grösser wir den Betrag von Elektricität annehmen, der z. B. in einem Cubikcentimeter vorhanden ist, desto kleiner brauchen wir die Strecke anzunehmen, durch welche sie verschoben ist, damit eine gegebene Elektricitätsmenge durch eine bestimmte Fläche im Medium verschoben erscheint. Wahrscheinlich ist es, dass die wirkliche Verschiebung ausserordentlich klein ist. —

Neben der elektrischen Verschiebung durch einen Querschnitt innerhalb der Zelle haben wir noch den Zustand der beiden Enden der Zelle, welche von Niveauflächen gebildet werden, zu betrachten. Wir müssen annehmen, dass in jeder Zelle die von der Fläche höheren Potentials gebildete Endfläche mit einer Einheit positiver Elektricität belegt ist, während die gegenüberliegende Endfläche mit einer Einheit negativer Elektricität belegt ist. In dem Inneren des Mediums, wo das positive Ende einer Zelle mit dem negativen der nächsten in Berührung ist, neutralisieren sich die beiden Elektrisierungen vollkommen; aber da, wo das dielektrische Medium von einem Leiter begrenzt ist, wird die Elektrisierung nicht mehr neutralisiert, sondern sie bildet dort die beobachtete Elektrisierung an der Oberfläche des Leiters.

Nach dieser Auffassung der Elektrisierung müssen wir die Elektrisierung eher als eine Eigenschaft des dielektrischen Mediums betrachten, statt als eine Eigenschaft des Leiters.

Wenn wir weiter annehmen, dass in jedem Theile eines dielektrischen Mediums, durch welches hindurch elektrische Kraftwirkung stattfindet, ein Zug, ähnlich dem eines Seiles, in der Richtung der Kraftlinien herrscht und ein Druck in allen Richtungen, die normal zu den Kraftlinien sind, so können wir alle mechanischen Wirkungen, welche zwischen elektrischen Körpern stattfinden, erklären.

d) Energie des Feldes. Auf die Anschauung gestützt, dass im Felde eines elektrischen Conductors eine elektrische Verschiebung stattfindet, zufolge welcher auf jeder Niveaufläche beide Arten von Influenzelektricität geweckt werden, lässt sich die Verschiebungsarbeit als Raumenergie nach der hydrostatischen Grundgleichung, die sich zur Berechnung von Raumenergien für feste, flüssige und gasförmige Körper als richtig erwiesen hat, berechnen. Die Grösse jeder Art Influenzelektricität ist gleich der elektrischen Ladung des Conductors. Eine unendlich dünne Raumschichte zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Niveauflächen ist polarisiert: auf der dem Conductor zugewandten Seite befindet sich die Influenzelektricität erster Art, auf der abgewandten gleichviel Influenzelektricität zweiter Art. Auf diese Influenzelektricitäten wirkt die Ladung des Conductors mit gleich starken und entgegengesetzten Kräften und erzeugt im dielektrischen Mittel des Feldes eine Spannung. Mit Hilfe derselben berechnen wir nun die Raumenergie, indem wir diese dem Producte aus dem Drucke in das Volumen proportional setzen. Darnach erhalten wir die Energie des Feldes einer elektrischen Kugel in folgender einfacher Weise[1]):

Auf einer kugelförmigen Niveaufläche mit dem Halbmesser R befindet sich die der Ladung des Conductors gleiche Elektricitätsmenge Q; davon entfällt auf die Flächeneinheit $Q/4R^2\pi$. Darauf wirkt nach Coulombs Gesetz die Conductorladung Q mit der Kraft $p = Q^2/4R^4\pi$. Für die kugelförmige Schale $dv = 4R^2\pi \cdot dR$ ist daher die Raumenergie (nach der Form $\varkappa \cdot p \cdot dv$)

$$dW = \frac{k \cdot Q^2}{4R^4\pi} \cdot 4R^2\pi \cdot dR = \frac{k \cdot Q^2}{R^2} \cdot dR,$$

und für das ganze Feld

$$W = k \cdot Q^2 \int\limits_{R_1 = r}^{R = \infty} \frac{dR}{R^2} = -kQ^2\left(\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{kQ^2}{r}.$$

Der Wert stimmt genau mit jenem für die Ladungsarbeit (§ 97) überein, wenn die Constante $k = 1/2$ gesetzt wird.

Diese Beschränkung der Constanten gilt nur für elektrische Ladungen der Conductoren in der Luft; in einem anderen dielek-

1) Siehe meinen Vortrag über Raumenergie in d. Verhandlg. der Naturf.-Gesellschaft. 1894.

trischen Mittel nimmt k einen anderen Wert an; dies wurde zuerst von H. v. Helmholtz ausgesprochen und von Silow experimentell bestätigt.

Gleichzeitig mag bemerkt werden, dass der Ausdruck W auch für die potentielle Energie eines kugelförmigen Condensators oder einer kugelförmigen Leydener Flasche gilt, wenn die kugelförmigen Begrenzungsflächen die Radien R_1 und R_n haben.

Sind zwei elektrische Conductoren in einem Felde vorhanden, so lässt sich für jeden die vorstehende Betrachtung geltend machen, es wirken beide Ladungen auf jede durch Induction geweckte Elektricitätseinheit im Felde, und die Kräfte setzen sich nach dem Gesetze des Kräftenparallelogrammes zusammen. (Die Ausführung der Rechnung kann ähnlich der im § 53c geschehen.) Das Quadrat der Resultierenden auf eine Elektricitätseinheit im Felde, nach Carnots Lehrsatz ermittelt, dividiert durch 4π gibt, entsprechend der obigen Ausführung, die Spannung p, und in der Luft ist die Volumenergie in einem Raumelemente dv gleich $\frac{1}{2} p \cdot dv$. Durch Summierung über das ganze elektrische Feld erhält man für die potentielle Energie

$$W = \frac{Q_1^2}{2 r_1} + \frac{Q_2^2}{2 r_2} - \frac{Q_1 Q_2}{R},$$

einen Wert, der mit jenem für die Ladungsarbeit in § 99 übereinstimmt. Die Änderung der Energie dW/dR führt wieder zum Coulomb'schen Gesetz zurück, von dem ursprünglich ausgegangen wurde.

e) Theorie der Ätherverschiebung[1]). Es wurde bereits in § 53b) und c) nachgewiesen, dass die potentielle Energie in einem Kraftfelde durch die Arbeit einer Ätherverschiebung erzeugt gedacht werden kann. Im Sinne der Elektricitätslehre tritt dann der Äther ohneweiters an die Stelle der Elektricitätsmenge der Maxwell'schen Theorie. Wird ein Körper positiv elektrisch, so breitet sich eine neue Ätherschichte über der Oberfläche aus, und die Äthermasse kann als Elektricitätsmenge betrachtet werden. Wird ein Körper negativ elektrisch, so verschwindet eine Ätherschichte an der Oberfläche. Sowohl die Hinzufügung, als auch die Wegführung einer Ätherschichte an der Oberfläche eines Conductors hat eine Ätherverschiebung im umgebenden dielektrischen Mittel zur Folge; indem von der Oberfläche aus jede Ätherschichte die benachbarte zur Verschiebung veranlasst, werden Kräfte im elektrischen Felde geweckt, die einen Zwangszustand bedingen und die Fernewirkung der elektrischen Ladung vermitteln. Für die Beweglich-

1) Siehe meine Schriften über das Energieprincip i. d. Elektricitätslehre, 1887, und über den Ätherdruck, 1893.

keit des Äthers muss das Gesetz über die elektrische Leitungsfähigkeit der Körper als massgebend angesehen werden.

Es mag noch besonders darauf hingewiesen werden, dass für die Ableitung der Elektricitätsgesetze in § 52 und § 53 nicht das Elasticitätsgesetz ohneweiters angewendet wurde; nach diesem ist die geweckte elastische Kraft der relativen Verschiebung der Massentheilchen proportional, indem z. B. die elastische Kraft $X = 2\mu \cdot d\xi/dx$ ist. Um zu Gesetzen für elektrische Kräfte zu gelangen, musste vorausgesetzt werden, dass die Kraft der absoluten Verschiebung proportional sei, dass $X = k\xi$ ist. Demgemäss muss angenommen werden, dass die sogenannten elastischen Kräfte in der Änderung der Wechselwirkungsenergie der Molecüle begründet seien, die ausschliesslich durch eine Lagenänderung der Molecüle bedingt ist, während die elektrischen Kräfte in der durch Induction hervorgebrachten Oberflächenverschiebung der einzelnen Molecüle, also in der Änderung der Ladungsenergie oder des Selbstpotentials der Molecüle ihren Grund haben mögen. Zu dieser Interpretation der Rechnung liefert die Hypothese über die Constitution der Molecüle in § 72b ein anschauliches Bild, insbesondere wird ersichtlich, wie durch Ätherverschiebung die molecularen kugelförmigen Wirbel ihre Gestalt ändern und die Molecüle hiedurch in einen elektrischen Polarisationszustand gelangen können (S. 248).

In dieser Fassung ist die Äthertheorie eine Verbindung der Theorien von Euler, Edlund, W. Weber, Secchi u. a., nach welchen die Äthermenge des Körpers dessen elektrische Ladung bestimmt, mit der Maxwell'schen Theorie der elektrischen Verschiebung. Sie liefert nicht nur die der Elektrostatik zugrunde liegenden Anschauungen über Kraftlinien und Niveauflächen im elektrischen Felde und das Grundgesetz von Coulomb zahlenmässig richtig, sondern sie führt auch zu dem den übrigen Theilen der Elektricitätslehre als Grundlage dienenden Maxwell-Hertz'schen Gleichungssysteme des elektromagnetischen Feldes. (Siehe § 52b, S. 183.)

Hier sollen noch die Ausdrücke für die elektrische Dichte und die Spannung mittelst der Theorie der Ätherverschiebung abgeleitet werden.

Die Dichte ist die Elektricitätsmenge auf der Flächeneinheit eines Conductors. Ist die Verschiebung σ, so ist die geweckte Kraft f auf die Masseneinheit $\varkappa \cdot \sigma$, wenn $\varkappa$ den Elasticitätsfactor angibt, und man hat

$$f = \varkappa \cdot \sigma = \left(\frac{\varkappa}{\delta}\right) \cdot (\delta\sigma).$$

$(\delta\sigma)$ als die Äthermenge in der Schichte über der Flächeneinheit ist die elektrische Dichte. Der Wert derselben wird

$$(\delta\sigma) = \frac{\delta}{\varkappa} \cdot f.$$

Setzen wir in der Luft, wie in § 53, für $\varkappa/\delta = 4\pi$, so erhält man für die Dichte

$$(\delta\sigma) = \frac{f}{4\pi}$$

genau den in § 98b) und c) ermittelten Wert.

Die elektrische Spannung oder der elektrostatische Druck ist die Kraft p, welche auf die Oberflächenschichte über der Flächeneinheit wirkt; sie ist eine auf die ganze Masse $(\delta\sigma)$ der Schichte wirkende Kraft und daher der Elasticität in der Mitte der Schichte gleich; demnach ist

$$p = \varkappa \cdot (\delta\sigma) \cdot \frac{1}{2}\sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varkappa}{\delta}(\sigma\delta)^2.$$

Für Luft als dielektrisches Mittel ist wieder $\varkappa/\delta = 4\pi$ und somit die Spannung

$$p = 2\pi(\delta\sigma)^2 = \frac{f^2}{8\pi}\cdot$$

Derselbe Ausdruck wurde auch in § 98d) gewonnen.

§ 101. **Condensatoren.** (Kleist in Cammin 1745, Euneus in Leiden 1746.) a) Die Condensatoren dienen dazu, grössere Elektricitätsmengen anzusammeln und durch Entladung zu verwerten. Den ersten construierte Ewald Georg von Kleist (1745) in folgender Weise: Er gab in ein Medicingläschen Quecksilber oder Spiritus vini, steckte einen Nagel in das Gläschen, elektrisierte den Nagel und berührte ihn mit einer Hand, indem er das Gläschen in der anderen Hand hielt. Der erhaltene Entladungsschlag zeigte eine Verstärkung der Elektricität an. Gralath nahm statt des Arzneiglases eine grössere Flasche und statt des Nagels einen Eisendraht mit einer Kugel am Ende. Bevis belegte die Aussenseite und Watson die innere Seite der Kleist'schen Flasche mit Zinnfolie. Winkler construierte einen Auslader und stellte mehrere Flaschen zu einer Batterie zusammen.

In der Theorie gilt es, die angehäufte Elektricitätsmenge und deren Arbeitswert zu bestimmen. Zur Lösung dieser Aufgabe wählen wir zunächst eine kugelförmige Leydener Flasche als Repräsentant der Condensatoren[1]). Es seien zwei concentrische Kugelschalen *I* und *II* aus Metall von sehr geringer Dicke mit den Radien r_1 und r_2. Die innere Schale *I*, auch Collector genannt, werde mit dem Conductor einer Elektrisiermaschine in Verbindung gesetzt und erhalte dadurch die Ladung Q_1; die äussere Schale als Condensator werde durch Influenz elektrisch und die Influenzelektricität zweiter Art durch eine leitende Verbindung zur Erde geführt. Für den bald eintreten-

1) Tumlirz, Das Potential S. 119; Serpieri, Das elektr. Potential S. 84; Mascart-Wallentin, Handbuch d. stat. El. I. 360. Lehre d. El. v. G. Wiedemann, ferner Wüllner, Maxwell, Mascart und Joubert, Mousson, Wallentin etc.

den Gleichgewichtszustand müssen die leitend verbundenen Flächen gleiche Potentialwerte haben. Es müssen also zunächst die Potentiale von *I* und von dem elektrischen Conductor gleich sein. Das Potential in einem Punkte des Conductors sei V; das Potential in einem Punkte von *I* setzt sich zusammen aus der Summe der Potentialwerte der Elektricitäten (Q_1 und Q_2) auf der inneren und äusseren Kugelschale, ist also $\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}$, und es gilt

$$V = \frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}.$$

Die äussere Kugelfläche *II* ist leitend mit der Erde verbunden und ihr Potential muss gleich Null sein. Dieses Potential setzt sich zusammen aus den Potentialen von Q_1 und Q_2 auf *II* und es besteht die Gleichung

$$\frac{Q_1}{r_2} + \frac{Q_2}{r_2} = 0.$$

Aus den beiden Gleichungen folgen die Werte für die angesammelte Elektricität

$$Q_1 = -Q_2 = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \cdot V.$$

Aus dieser Form ist sofort ersichtlich, dass der Coefficient des Potentialwertes V die Bedeutung der Capacität c der Flasche hat; und somit ist die Capacität, wenn noch $r_2 - r_1 = \varDelta$ sehr klein ist

$$c = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} = \frac{r^2}{\varDelta},$$

oder wenn man die Fläche der Flasche $S = 4r^2\pi$ einführt,

$$c = \frac{S}{4\pi\varDelta} \quad \text{und} \quad Q_1 = \frac{S}{4\pi\varDelta} \cdot V.$$

Wäre die äussere Schale *II* nicht vorhanden, dann würde auf *I* die Elektricität Q_1' durch die Gleichheit der Potentiale in *I* und auf dem elektrischen Conductor bestimmt, also durch

$$V = \frac{Q_1'}{r_1};$$

darnach wird

$$Q_1 = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \cdot Q_1'.$$

Der Coefficient $\frac{r_2}{r_2 - r_1}$ ist die Verstärkungszahl der Flasche; dieselbe ist proportional dem Radius der kugelförmigen Flasche und umgekehrt proportional der Dicke der isolierenden Zwischenschichte. Die Entwickelung ist analog, wenn *II* als Collector und *I* als Condensator benutzt wird.

Die angesammelte Elektricität Q_1 wird durch einen dem vorstehenden analogen Ausdruck gegeben, wenn der Condensator, dessen

Belegungen einander sehr nahe und parallel sind, eine **beliebige** Gestalt hat und die Belegungen (durch etwaige Verbindung mit elektrischen Conductoren) zu **beliebigen** Potentialen V_1 und V_2 geladen sind. Die Flächen der Belegungen sind dann nämlich zwei Niveauflächen, deren Potentiale V_1 und V_2, und es gilt (§ 98) für die Dichte δ die Relation

$$4\pi\delta = f = \frac{V_1 - V_2}{\varDelta}.$$

Darnach ist die Elektricität auf der Oberfläche

$$Q_1 = S \cdot \delta = \frac{S}{4\pi\varDelta} \cdot (V_1 - V_2).$$

Hierin ist wie oben $\frac{S}{4\pi\varDelta}$ der Wert für die Capacität der Flasche. Der Ausdruck geht in den obigen für c_1 über, wenn $V_2 = 0$ wird.

Wir bestimmen für den vorliegenden Fall noch den **Arbeitswert** W der Ladung, welcher als **potentielle Energie** im Condensator aufgespeichert und bei der Entladung wieder gewonnen wird. Nach §§ 96 und 99 gelangt man zu diesem Werte, wenn man das Product aus der halben Elektricitätsmenge Q_1 in das Potential in einem Oberflächenpunkte von I bestimmt. Das betreffende Product für II wird mit seinem Potentialwerte gleich Null.

Es wird

$$W = \frac{1}{2} Q_1 \cdot V = \frac{Q_1^2}{2c}.$$

Darnach ist die potentielle Energie des Condensators dem Quadrate der Ladung direct und der Capacität umgekehrt proportional. Durch Einführung des Wertes für V eines kugelförmigen Condensators wird

$$W = \frac{Q_1}{2}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right) = \frac{r_2 - r_1}{2 r_1 r_2} \cdot Q_1^2 = \frac{\varDelta Q_1^2}{2 r^2}.$$

Zu einem allgemein deutbaren Gesetze über den Arbeitswert der Ladung eines Condensators gelangen wir durch Einführung der elektrischen Dichte δ und der Fläche der Flasche; es ist

$$Q_1 = S \cdot \delta \quad \text{und} \quad 4r^2\pi = S$$

und darnach

$$W = 2\pi \cdot S \cdot \delta^2 \cdot \varDelta,$$

d. h. der Arbeitswert der Ladung ist proportional der Oberfläche des Condensators, der Dicke der isolierenden Zwischenschichte und dem Quadrate der elektrischen Dichte.

Leicht zu erhalten ist auch die Form

$$W = \frac{S \cdot V^2}{8\pi\varDelta}.$$

Diese Sätze gelten auch für andere Formen der Flaschen und wurden von Riess mit dem Luftthermometer experimentell nachgewiesen.

Zur Messung der Capacität mag hier folgendes bemerkt werden: In absoluten elektrostatischen Einheiten wird sie, ihrer Dimension entsprechend, durch Centimeter ausgedrückt. Die praktische Einheit ist ein Farad, jene Capacität, bei welcher die Ladung von 1 Coulomb das Potential 1 Volt liefert; es ist $= 9 \cdot 10^{11}$ elektrost. Einh. und $= 10^6$ Mikrofarad.

b) Durch unmittelbare Anwendung des Energieprincipes lässt sich die Ladungsenergie und die Verstärkungszahl noch einfacher bestimmen als mit Hilfe des Potentials.

Der Versuch mit der zerlegbaren Leydener Flasche zeigt, dass man sowohl den inneren als auch den äusseren Beleg für sich entladen kann, und dass nach der Zusammenstellung der Flasche doch noch ein kräftiger Entladungsschlag erhalten wird. Daraus folgt deutlich, dass der elektrische Zustand seinen Sitz nicht in den metallischen Belegen, sondern im isolierenden Zwischenmittel hat. Einen weiteren Beweis dafür liefert die bald noch näher zu behandelnde Thatsache, dass die angesammelte Elektricitätsmenge von der Natur des Isolators abhängt. Man hat daher nur die im dielektrischen Zwischenmedium aufgespeicherte potentielle Energie als Äquivalent der Ladungsarbeit des Condensators zu betrachten; für dieselbe gilt der nach Faradays Anschauungen abgeleitete Wert in § 100 d). Darnach besteht der Arbeitswert einer zur Erde abgeleiteten kugelförmigen Flasche aus der Ladungsarbeit des inneren Beleges vermindert um die Ladungsarbeit des äusseren Beleges. Bei geringer Wanddicke $\varDelta$ der Flasche ist er

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{r_1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{r_2} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 \cdot \varDelta}{r^2}.$$

Der Ausdruck stimmt mit dem obigen für W vollkommen überein.

Zur Verstärkungszahl vermag die Bestimmung des Intensitätsfactors der elektrischen Energie zu führen[1]). Bei einem Systeme, bestehend aus einem kugelförmigen Condensator und einem Conductor einer Elektrisiermaschine, herrscht Gleichgewicht, wenn die Potentiale der leitend verbundenen Conductoren einander gleich sind. Aus den Factoren der elektrischen Energie des Condensators

$$W = \frac{1}{2} Q \left(Q \cdot \frac{\varDelta}{r^2} \right)$$

folgt sofort das Potential oder der Elektricitätsgrad als Intensitätsfactor

$$V = Q \cdot \frac{\varDelta}{r^2} = \frac{dW}{dQ}.$$

1) Siehe meine Abhandlung zur Übereinstimmung der phys. Arbeitsgesetze. Zeitsch. f. d. Rlw. Wien. 1892. S. 528.

Würde der innere kugelförmige Collector ohne Condensator angenommen und mit dem Conductor der Elektrisiermaschine verbunden, so wäre die Energie des ersteren

$$W' = \frac{1}{2} Q' \cdot \frac{Q'}{r}$$

und der Intensitätsfactor oder das Potential

$$V = \frac{Q'}{r}.$$

Aus der Gleichheit der Intensitätsfactoren folgt die Verstärkungszahl

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{r}{\varDelta}$$

übereinstimmend mit den obigen Angaben.

Die Ladungsenergie als Product aus dem elektrostatischen Druck in das Volumen des elektrischen Feldes (nach § 100 d) enthielt einen constanten Factor; mit Benützung desselben wird die Energie

$$W = k \frac{Q^2 \cdot \varDelta}{r^2}$$

und die Verstärkungszahl

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{r}{2k \cdot \varDelta}.$$

Die letztere erscheint um den Factor $1/2k$ verändert, der von der Natur des dielektrischen Mittels abhängig ist.

In der That hat schon Cavendish (1771) gefunden, dass, wenn in einem Condensator die isolierende Zwischenschichte geändert wird, während die metallischen Belege unverändert bleiben, sich die Capacität des Condensators ändert. Wurde in einem Condensator die Luftschichte durch eine ebenso dicke Schwefelschichte ersetzt, so nahm die Capacität um das $2^1/_4$-fache zu. Die diesbezüglichen Arbeiten von Cavendish, welche 1879 von Maxwell veröffentlicht wurden, waren Faraday unbekannt, als er im Jahre 1837 seine grundlegenden Versuche anstellte, die von Gaugain, Boltzmann, Wüllner, Gordon u. a. vervollkommt und weiter entwickelt wurden.

Faraday nannte die isolierenden Substanzen Dielektrica und die Verhältniszahl $1/2k$ das specifische Inductionsvermögen. Die letztere Zahl führt heute in der Regel den Namen Dielektricitätsconstante. Einige solche Constanten sind: für

Crownglas 3·243 (Gordon), 6·96 (Hopkinson),
Flintglas 3·013 bis 3·164 (Gordon), 7·11 bis 7·44 (Winkelmann),
Ebonit 3·15 bis 3·48 (Boltzmann), 2·72 (Winkelmann),
Schwefel 3·84 bis 3·90 (Boltzmann), 2·58 (Gordon), 3·04 (Wüllner),
Schellack 2·74 (Gordon), 3·10 (Winkelmann),
Paraffin 2·32 (Boltzmann), 1·994 (Gordon), 2·18 (Winkelmann),
Quarz 4·6 (Romich und Nowack),

Steinsalz 18 (Hopkinson),
Olivenöl 3·16 (Hopkinson),
Äther 4·75 bis 4·95 (Hopkinson),
Alkohol 24·29 (Donle),
Schwefelkohlenstoff 2·67.

c) Mittelst der Theorie der Ätherverschiebung ergeben sich die Werte für die Energie und die Ladung eines kugelförmigen Condensators direct auf sehr einfache Weise.

Durch positive Elektrisierung der inneren Kugelfläche *I* wird der Äther des dielektrischen Zwischenmittels radial nach auswärts in der Richtung gegen den Beleg *II* verschoben, es werden elastische Kräfte geweckt und damit ein elektrisches Feld erzeugt. Die Ätherschichte an der concaven Innenseite von *II* sollte in das metallische Innere von *II* hineintreten; da aber im Metall wegen der guten Leitungsfähigkeit keine Verschiebung bestehen kann, so muss die betreffende Ätherschichte, etwa durch eine Öffnung der Fläche *II*, sich an die äussere, convexe Oberfläche begeben und dort als Influenzelektricität zweiter Art ausbreiten. Die innere Fläche von *II* erscheint wegen des Verlustes der Ätherschichte negativ elektrisch; die äussere Fläche ist positiv geladen. Dass die Mengen der beiden Influenzelektricitäten der Ladung auf *I* gleichkommen, folgt unmittelbar, wenn die Ätherdichte constant ist.

Die Influenzelektricität zweiter Art auf *II* veranlasst eine Verschiebung des Äthers und daher eine Ausbreitung des elektrischen Kraftfeldes im Raume ausserhalb des Condensators; wird aber diese Elektricität zur Erde geleitet, so verschwindet auch das elektrische Feld. Die Ladungsarbeit beschränkt sich dann lediglich auf die Verschiebungsarbeit im Dielektricum des Condensators. Zur Berechnung derselben benützen wir die Arbeit der Verschiebung einer kugelförmigen Ätherschichte nach § 53 b; danach ist

$$dW = \frac{1}{2} p\sigma = \frac{1}{2} \varkappa\mu\sigma^2 = \frac{\varkappa}{8\pi\delta} \cdot Q^2 \cdot \frac{dR}{R^2},$$

wenn

$$Q = 4R^2\pi \cdot \sigma \cdot \delta, \quad \mu = 4R^2\pi \cdot \delta \cdot dR$$

und die Ladungsarbeit

$$W = \frac{\varkappa}{8\pi\delta} Q^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dR}{R^2} = \frac{\varkappa}{8\pi\delta} Q^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Hierin bedeuten r_1 und r_2 die Radien der Kugelflächen *I* und *II*. Ist der Unterschied $r_2 - r_1 = \varDelta$ gegenüber den Radien nur klein, so kann man auch schreiben

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varkappa}{4\pi\delta} \cdot Q^2 \cdot \frac{\varDelta}{r^2}.$$

Dieser Wert für die Energie stimmt mit dem der Potentialtheorie vollständig überein. Derselbe kann als Verschiebungsarbeit sofort angeschrieben werden, wenn die Dicke der zu verschiebenden Ätherschichte nur gering ist.

Die Constante $\varkappa/4\pi\delta$ ist der reciproke Wert der Dielektricitätsconstanten.

Aufg. 1. Zwei concentrische Kugelflächen haben beziehungsweise die Halbmesser 10 cm und 11 cm; wie gross ist die Capacität, die Ladung, die Verstärkungszahl und die elektrische Energie derselben als Condensator, wenn die innere Kugel mit einer Elektrisiermaschine von 12000 Volt Elektricitätsgraden verbunden wird? 1 Volt $= 1/3 \cdot 10^2$ e. s. Potentialeinheiten. 1 Coulomb $= 3 \cdot 10^9$ e. s. E. — ($c = r_1 r_2/(r_1 - r_2) = 110$ cm. Verstärkungszahl $= r_1/(r_1 - r_2) = 11$.
Ladung $Q = V r_1 \cdot r_2/(r_1 - r_2) = 4400$ e. s. E. $= 14\frac{2}{3} \cdot 10^{-7}$ Coulomb. $W = \frac{1}{2} c V^2 = 88000$ Erg $= 89{\cdot}7$ gcm.) **2.** Wie gross ist die elektrische Dichte auf der inneren Kugel der vorigen Aufgabe und der elektrostatische Druck, welcher das dielektrische Mittel zu durchbrechen sucht? — ($\delta = Q/4r^2\pi = 3{\cdot}5$ e. s. E., $p = 2\pi\delta^2 = 77{\cdot}03$ Dyn $= 0{\cdot}078$ gr/cm^2.) **3.** Eine Glaskugel von 12 cm innerem Durchmesser und 0·004 cm Wanddicke wird durch Belegung mit Silberschichten auf beiden Seiten zu einem Condensator gestaltet und mit einer Elektrisiermaschine von 18000 Volt verbunden. Die Dielektricitätsconstante des Glases sei 2·4. Wie gross sind Capacität, Ladung, Spannung und elektrische Energie dieses Condensators? — (Die praktische Capacitätseinheit ist 1 Farad $= 9 \cdot 10^{11}$ e. s. E. und $= 10^6$ Mikrofarad. Darnach ist $c = 21614{\cdot}4$ cm $= 0{\cdot}024$ Mikrofarad, $Q = 1296864$ e. s. E. $= 4323 \cdot 10^{-7}$ Coulomb, $W = 38{\cdot}9 \cdot 10^6$ Erg $= 0{\cdot}396$ kgm, $p = 2\pi\delta^2 = 2\pi \cdot 1433{\cdot}4^2 = 516{\cdot}4 \cdot 10^5$ Dyn $= 52{\cdot}6$ kg/cm^2.) **4.** In einem Condensator beträgt die Fläche einer Belegung 1 m^2 und die Dicke des isolierenden Mittels $\varDelta = 0{\cdot}1$ cm; eine Belegung ist mit einer Elektricitätsquelle vom Potential 600 Volt in Verbindung, und die andere ist zur Erde abgeleitet; wie gross ist die elektrische Energie des Condensators? — ($W = S \cdot V^2/8\pi\varDelta = 15924$ Erg $= 16{\cdot}2$ grcm $= 0{\cdot}00028$ gr-cal.) **5.** Ein Condensator hat die Capacität 2·5 Mikrofarad à $9 \cdot 10^5$ elektrostatische Einheiten und eine Ladung mit dem Potential von 600 Volt; wie gross ist die Ladung und die Energie? —
($Q = cV = 2{\cdot}5 \cdot 9 \cdot 10^5 \left(\frac{600}{300}\right) = 4500000$ e. s. E. $= 15 \cdot 10^{-4}$ Coulomb, $W = \frac{1}{2} QV = 45 \cdot 10^5$ Erg $= 0{\cdot}046$ kgm.) **6.** Wie gross muss die Dicke der isolierenden Luftschichte eines Kugelcondensators vom Radius $r_2 = 10$ cm sein, damit die Verstärkungszahl $= 100$ sei? — ($100 = r_1/r_1 - r_2$, daraus $r_1 = 10{\cdot}101$ cm und $r_1 - r_2 = 0{\cdot}101$ cm.) **7.** Eine Batterie von Leydener Flaschen enthält geladen 0·6 kgm Energie, und die beiden Belegungen haben eine Potentialdifferenz von 3000 Volt. Wie gross ist die Ladung und wie gross ist die Capacität der Batterie? —
($Q = 2W/V = 4 \cdot 10^{-3}$ Coul., $C = W/2V^2 = 300000$ e. s. E. $= 1/3$ Mikrofarad.)

[R. Weber.]

§ 102. **Ebene Condensatoren.** Statt der Kugelflächen wählen wir nun zwei planparallele, gutleitende Platten, welche durch eine verhältnismässig dünne, isolierende Zwischenschichte von einander getrennt sind. Die Zusammenstellung bildet einen ebenen Condensator[1]. Die Ladung dieses Condensators kann ebenso wie bei der Leydener Flasche geschehen, also entweder dadurch, dass man nur eine Platte ladet und die zweite leitend mit der Erde verbindet, oder dadurch, dass man beide Platten mit den entgegengesetzt elektrischen Conductoren einer Elektrisiermaschine verbindet. Um einer beliebigen Elektrisierung Rechnung zu tragen, nehmen wir an, dass die Platten zu den verschiedenen Potentialen V_1 und V_2 geladen seien. In einer Entfernung von den Rändern, welche sehr gross im Verhältnisse zur Dicke der Zwischenschichte ist, ist die Elektricität über den Platten gleichförmig vertheilt und sind die Kraftlinien in dem betreffenden Theil der Zwischenschichte unter einander parallele, zu den Platten normale Geraden. Das elektrische Feld ist daselbst gleichförmig. Die Grösse der Fläche mit gleichförmiger Elektricitätsvertheilung sei S; wir wollen dieselbe etwa durch eine geschlossene krumme Linie begrenzt denken. Ist der Abstand der Platten $\varDelta$, dann ist die Arbeit, um die Elektricitätseinheit von einer Platte zur andern zu bewegen,

$$V_1 - V_2 = f \cdot \varDelta,$$

daher die Kraft des Feldes

$$f = \frac{V_1 - V_2}{\varDelta}.$$

Dies ist auch die Kraft in den Oberflächenschichten der Platten; demnach wird die elektrische Dichte einer Platte

$$\delta = \frac{V_1 - V_2}{4\pi\varDelta}$$

und die Elektricität auf S ist

$$Q = \frac{V_1 - V_2}{4\pi\varDelta} \cdot S.$$

Die Elektricitätsmengen auf beiden Platten sind gleich gross, aber von entgegengesetzter Vorzeichnung. Ist $V_2 = 0$, so folgt unmittelbar für die Capacität des Condensators

$$c = \frac{S}{4\pi \cdot \varDelta},$$

die etwa noch mit der Dielektricitätsconstanten zu multiplicieren ist. Die potentielle Energie setzt sich zusammen aus den Energien beider Plattenladungen und ist

$$W = \frac{1}{2}[QV_1 + (-Q) \cdot V_2] = \frac{1}{2} Q(V_1 - V_2) = \frac{2\pi}{S} \cdot Q^2 \cdot \varDelta.$$

1) Mascart-Wallentin. I. 384. Maxwell, Die Elektr. in elem. Behdlg. S. 73. Meine Schrift über das Energieprincip in d. Elektrl. 1887.

Aus dem Ausdrucke für die Energie lässt sich die Kraft F berechnen, mit welcher die Platten sich gegenseitig festhalten, die also überwunden werden muss, um eine Platte, beziehungsweise ein Oberflächenstück S von seiner Stelle zu ziehen. Um dieselbe zu finden, denken wir uns die Distanz $\varDelta$ etwas vergrössert; dadurch wird die Energie

$$W' = \frac{2\pi}{S} \cdot Q^2 \cdot \varDelta',$$

und der Unterschied

$$W' - W = F \cdot (\varDelta' - \varDelta) = \frac{2\pi}{S} \cdot Q^2(\varDelta' - \varDelta),$$

daraus wird die Kraft

$$F = \frac{2\pi}{S} Q^2.$$

Dieses Resultat wird dazu benützt, um sowohl die Elektricitätsmenge Q als auch die Potentialdifferenz $(V_1 - V_2)$ zu bestimmen; man hat

$$Q = \sqrt{\frac{F \cdot S}{2\pi}} \quad \text{und} \quad V_1 - V_2 = \varDelta \sqrt{\frac{8 \cdot \pi \cdot F}{S}}.$$

Hierin sind S das begrenzte Flächenstück mit gleichförmiger Elektricitätsvertheilung auf den Platten und F die Kraft, mit welcher ein solches Flächenstück festgehalten wird.

Eine Messung der Grösse F und somit eine Bestimmung der Elektricitätsmenge Q und der Potentialdifferenz nach absolutem Maasse gestattet das Schutzring-Elektrometer von W. Thomson. Dasselbe besteht aus zwei in geringer Entfernung befindlichen, kreisförmigen Platten, die zu verschiedenen Potentialen geladen werden können. Von einer Platte ist ein begrenztes Stück S durch einen Einschnitt längs seiner Grenzlinie vollkommen beweglich gemacht; der feste S ergänzende Theil der Platte heisst „Schutzring“. Das bewegliche Stück S ist mit einem Wagebalken in Verbindung und kann durch Gegengewichte äquilibriert werden. Mittelst der Wagebalkenvorrichtung wird auch die Kraft F gemessen, mit welcher die Platte S angezogen wird.

Nach der Theorie der Verschiebung ergeben sich die Ausdrücke für die Ladung, die Energie und das Potential direct in ähnlicher Weise wie für den Kugelcondensator (§ 101c).

Aufg. 1. Wie gross ist die Capacität einer Franklin'schen Tafel, deren Zinnbelegung 25 cm lang und 16 cm breit, und für deren Glas $\varDelta = 0{\cdot}1$ cm und die Dielektricitätsconstante $k = 3{\cdot}2$ ist? —

($C = k \cdot S / 4\pi\varDelta = 1018$ e. s. E. $= 0{\cdot}00113$ Mikrofarad.)

2. Die Metallscheibe eines Elektrophors hat 20 cm Durchmesser und ist im Mittel um 0·02 cm von der Hartgummischeibe entfernt. Wie gross ist seine elektrische Capacität? — ($C = 1250$ e. s. E. $= 0{\cdot}0014$ Mikrofarad.)

3. Ein Plattencondensator von 2·5 Mikrofarad Capacität (à $9 \cdot 10^5$ e. s. E.) wird mit einer Batterie von 300 Volt elektromotorischer Kraft (à $1/3 \cdot 10^2$) geladen. Welche Ladung nimmt er auf? —

$$(Q = C \cdot V = 22{\cdot}5 \cdot 10^5 \text{ e. s. E.} = 0{\cdot}00075 \text{ Coulomb.})$$

4. Eine Franklin'sche Tafel von 2 elektrostatischen Capacitätseinheiten wurde mit einer Holtz'schen Influenzmaschine geladen, deren elektromotorische Kraft auf 3000 Volt stieg. Welche Elektricitätsmenge enthielt sie? — ($Q = 200$ e. s. E.) [R. Weber.]

§ 103. **Elektrische Batterien.** a) Flaschenverbindung neben einander oder auch Batterie schlechtweg genannt. Eine Flaschenverbindung nebeneinander kommt zustande, wenn man von mehreren Leydener Flaschen alle inneren Kugelflächen mit einander und alle äusseren Kugelflächen miteinander verbindet. Wir nehmen an, dass alle Flaschen dieselbe Form haben; dann lässt sich der Fall der Flaschenverbindung auf die Betrachtung einer einzelnen Flasche zurückführen. Eine und somit alle äusseern Kugelschalen stehen mit der Erde in leitender Verbindung. Die Elektricität, welche von einer Elektricitätsquelle her auf die innere Kugel der ersten Flasche geleitet wird, verbreitet sich gleichförmig über alle inneren Kugelschalen der Flaschen und wirkt auf die äusseren Kugelschalen so, wie wenn jede Flasche allein vorhanden wäre. Ist die Elektricitätsmenge auf einer Kugel q, so ist, abgesehen von der Elektricität in den Verbindungsdrähten, die gesammte zugeführte, über n Flaschen vertheilte Elektricitätsmenge

$$Q = n \cdot q = n \cdot s \cdot \delta,$$

wobei δ die elektrische Dichte der inneren Kugelflächen bedeutet. Ebenso ist der Wert der Energie n-mal grösser, als der einer Flasche; daher ist

$$W = n \cdot 2\pi \cdot s \cdot \delta^2 \cdot \varDelta = 2\pi \cdot S \cdot \delta^2 \cdot \varDelta.$$

Hieraus folgt der Satz wie für eine Flasche: Die Energie der Ladung ist proportional den Oberflächen des Condensators, der Dicke der isolierenden Zwischenschichte und dem Quadrate der elektrischen Dichte.

Drücken wir die Energie durch die zugeführte Elektricitätsmenge Q und das Potential V der inneren Kugelschalen aus, so wird

$$W = n \cdot \frac{1}{2} q V = \frac{1}{2} n \frac{q^2}{c} = \frac{Q^2}{2nc}$$

und

$$W = n \cdot \frac{1}{2} q V = \frac{1}{2} \cdot n \cdot c \cdot V^2.$$

Aus den beiden Werten folgt, dass die Energie W durch eine Vermehrung der Flaschenzahl n der Batterie nur dann steigt, wenn das Potential V auf den inneren Kugeln constant erhalten werden

kann, — dass aber W bei einer Vermehrung der Flaschenzahl vermindert wird, wenn man nur über eine gleichbleibende Elektricitätsmenge Q verfügt. Die Batterie wird daher zweckmässig nur dann zu verwenden sein, wenn zur Ladung derselben eine Elektricitätsquelle von constantem Potential benutzt werden kann.

b) Flaschenverbindung hintereinander, Franklin'sche oder Cascadenbatterie. Eine Flaschenverbindung hintereinander wird erhalten, wenn man immer die innere Kugelschale einer Flasche mit der äusseren Kugelschale der nächstfolgenden Flasche in Verbindung setzt. Die innere Kugelschale der ersten Flasche werde mit der Elektricitätsmenge $+q$ geladen und nehme das Potential V_1 an. $+q$ wirkt influencierend auf die äussere Schale und ladet mit negativer Influenzelektricität erster Art; die Influenzelektricität zweiter Art geht zur inneren Kugelschale der nächsten Flasche und wirkt dort so wie die Ladung der ersten Flasche etc. Die äussere Kugelschale der letzten Flasche sei zur Erde abgeleitet. Sind alle n Flaschen von gleicher Art und Grösse, dann sind auch ihre Capacitäten und sehr nahe sämmtliche Influenzelektricitäten der einzelnen Flaschen gleich q. Im Gleichgewichtszustande haben die mit einander verbundenen äusseren und inneren Kugelschalen je zweier aufeinander folgenden Flaschen gleiche Potentiale. Mit Benützung der obigen Bezeichnungen und wenn $V_1, V_2, V_3, \cdots V_{n+1}$ die Potentiale der nach einander erzeugten Ladungen sind, so gelten für die aufeinander folgenden Flaschen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} q &= c(V_1 - V_2) \\ q &= c(V_2 - V_3) \\ q &= c(V_3 - V_4) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ q &= c(V_n - V_{n+1}), \end{aligned}$$

wobei $V_{n+1} = 0$.

Durch Addition der Gleichungen erhalten wir die Summe der Elektricitäten auf den inneren Kugelschalen, nämlich

$$n \cdot q = c \cdot V_1 \quad \text{und daraus} \quad q = \frac{c}{n} \cdot V_1 .$$

Die Flaschenverbindung hat demnach den Erfolg, die Capacität c einer Flasche um das n-fache zu vermindern.

Zur Berechnung der potentiellen Energie führt folgende Bemerkung: Die äussere Kugelschale einer Flasche und die innere der nächstfolgenden haben gleiche Potentialwerte und numerisch gleiche aber entgegengesetzte Ladungen, daher die Summe ihrer Energien (als die halben Producte der Ladungen in die Potentiale) gleich Null ist; die äussere Kugelschale der letzten Flasche hat das Potential Null und daher auch den Energiewert Null. Die totale Energie der

Cascadenbatterie reduciert sich demnach auf die Energie der inneren Kugelfläche in der ersten Flasche und diese ist

$$W = \frac{1}{2} q \cdot V \text{ und da } n \cdot q = c \cdot V,$$

so wird

$$W = \frac{nq^2}{2c} = \frac{n \cdot \varDelta}{2r^2} \cdot q^2,$$

oder

$$W = \frac{cV^2}{2n} = \frac{r^2}{2n\varDelta} \cdot V^2.$$

Dieser Wert der Energie wächst mit der Anzahl der Flaschen nur dann, wenn zur Ladung eine bestimmte Elektricitätsmenge q verfügbar ist. Bei einem bestimmten Potentialwerte V aber nimmt der Wert der Energie mit der Anzahl der Flaschen ab [1]).

Durch Vergleich der Ausdrücke für die Arbeitswerte oder Energien der gewöhnlichen Batterie und der Cascadenbatterie ergibt sich die Lehre:

Ist eine bestimmte Elektricitätsmenge verfügbar, so wird die grösste Energie dann erhalten, wenn alle Flaschen nach einander in Cascade angeordnet sind; und

wenn man über ein gegebenes Potential zu verfügen hat, so wird die grösste Energie dadurch erreicht, dass man alle Flaschen zu einer gewöhnlichen Batterie verbindet.

Serpieri (Das elektr. Potential, S. 141) citiert nach Blavier und Raynaud den Arbeitswert einer Batterie von 10 cylindrischen Flaschen (Durchmesser 15 cm, Höhe 50 cm, $\varDelta = 0{,}2$ cm und $V = 300$) zu

$$W = 7{,}75 \text{ kgm}.$$

c) Ein Fall, welcher vom Standpunkte des Principes der Erhaltung der Energie von Interesse ist, tritt ein, wenn man die innere Kugelschale einer bereits geladenen Flasche mit der inneren Kugel einer Flasche verbindet, welche aussen in leitender Verbindung mit der Erde steht [2]). Vor der Verbindung beider Flaschen ist die Energie der ersten Flasche

$$W = \frac{1}{2} q \cdot V = \frac{1}{2c} \cdot q^2.$$

Durch Verbindung beider Flaschen wird die Hälfte der Elektricität q auf die innere Kugelschale der zweiten Flasche übergeführt und die Energie der aus zwei Flaschen bestehenden Batterie ist

$$W' = 2\left[\frac{1}{2c}\left(\frac{q}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4c} q^2 = \frac{1}{2} W.$$

Die in beiden Flaschen aufgespeicherte Energie ist nur die Hälfte

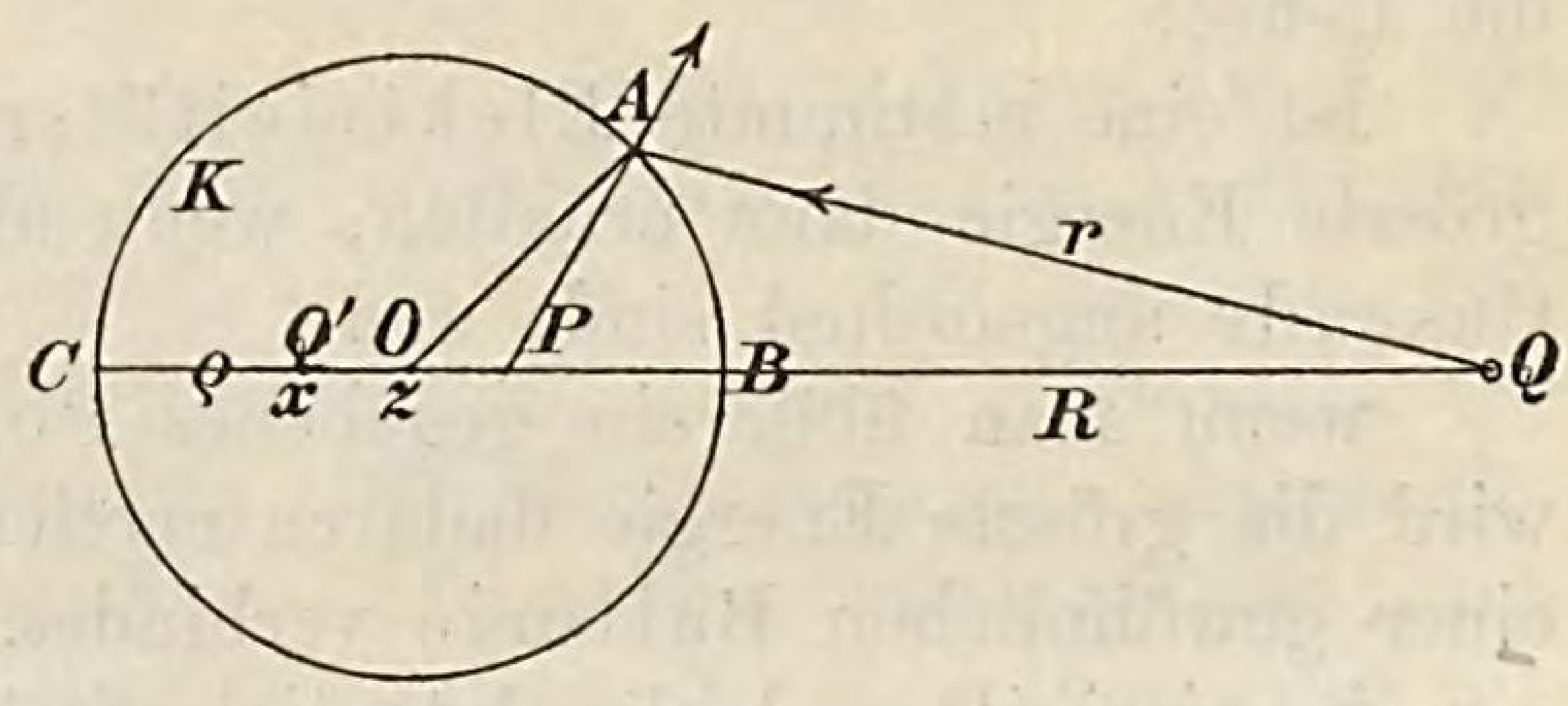
1) Serpieri, Das elektr. Potential. S. 139.

2) Tumlirz, Das Potential. S. 165.

derjenigen, welche die erste Flasche vor der Verbindung allein besass. Es scheint die Hälfte der Energie verloren gegangen zu sein. Thatsächlich ergibt sich aber ein Äquivalent für diesen Energieverlust; denn bei der Leitung der Elektricität von der ersten zur zweiten Flasche wird der Draht erwärmt und unmittelbar vor Berührung des Leitungsdrahtes mit der inneren Kugelschale der zweiten Flasche entsteht ein Lichtfunke und ein kleiner Knall. Nach dem Energieprincipe müssen wir folgern, dass Wärme, Licht und Schall die Hälfte der ursprünglich in der ersten Flasche aufgespeicherten Energie verbrauchen.

§ 104. Elektrische Vertheilung auf einer Kugel. Elektrisierungsarbeit[1]. Wir betrachten eine Kugel K im elektrischen Felde eines Punktes oder einer anderen, sehr kleinen Kugel mit der Ladung $+ Q$ (Fig. 66). Der Abstand des Kugelmittelpunktes O von Q sei R, der Kugelhalbmesser ϱ, der Mittelpunkt der negativen Influenzelektricität $(- Q_1)$, in dem man sich $(- Q_1)$ vereint denken kann, sei P, und dessen Entfernung von O sei $OP = z$, der Mittelpunkt der positiven Influenzelektricität $(+ Q_1)$ sei Q' und $OQ' = x$.

Fig. 66



Nun sollen Q_1, x und z bestimmt werden. Die dazu nöthigen drei Bedingungsgleichungen erhält man aus drei bekannten Gleichgewichtsbedingungen: Auf K herrscht elektrisches Gleichgewicht unter dem Einflusse von Q, $+ Q_1$ und $- Q_1$; es kann auch $+ Q_1$ abgeleitet werden und es herrscht wieder Gleichgewicht; in letzterem Fall besteht auch Gleichgewicht zwischen K und der Erde.

Behufs Aufstellung der bezüglichen Gleichungen berechnen wir vorerst die Arbeit, welche geleistet wird, wenn überhaupt eine Elektricitätseinheit im elektrischen Felde verschoben wird. Wir benützen hiezu die Elektricität Q und eine Elektricitätseinheit in A. Die elektrische Kraft ist Q/r^2.

Die Verschiebungsarbeit bei der Änderung der Entfernung ist

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{r^2} \cdot dr = Q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Den Ausdruck wenden wir auf jede von den Elektricitäten Q, $+ Q_1$ und $- Q_1$ ausgehende Kraft an und bestimmen damit die Arbeiten der Kräfte während der Bewegung der Elektricitätseinheit A

1) Siehe meine Schrift über den Ätherdruck. 1893. S. 23.

längs des Halbkreises BC. Im Gleichgewichtszustande muss die Summe der drei Arbeiten gleich Null sein; daher besteht die Gleichung

$$Q\left(\frac{1}{R-\varrho}-\frac{1}{R+\varrho}\right)-Q_1\left(\frac{1}{\varrho-z}-\frac{1}{\varrho+z}\right)+Q_1\left(\frac{1}{\varrho+x}-\frac{1}{\varrho-x}\right)=0.$$

Mit Rücksicht darauf, dass auch Gleichgewicht herrscht, wenn $+Q_1$ abgeleitet wird, lässt sich die Gleichung in zwei Gleichungen zerlegen, von welchen eine die beiden ersten Glieder, die andere das letzte Glied der vorstehenden Gleichung zu enthalten hat. Aus der Gleichung für das letzte Glied folgt dann unmittelbar

$$x=0,$$

d. h. der Mittelpunkt der positiven Influenzelektricität befindet sich im Kugelmittelpunkt; die Elektricität $+Q_1$ verbreitet sich daher gleichmässig über die ganze Kugeloberfläche.

Setzen wir die Summe der beiden ersten Glieder vorstehender Gleichung gleich Null, so folgt die weitere Bedingung

$$\frac{Q\varrho}{R^2-\varrho^2}=\frac{Q_1 z}{\varrho^2-z^2}.$$

Die Gleichung gilt, wenn die Kugel K mit der Erde in leitender Verbindung steht; dann muss auch bei Überführung einer Elektricitätseinheit von der Kugel, z. B. vom Punkte B längs des Leitungsdrahtes zur Erde die Arbeitsleistung gleich Null sein. Die Elektricitätseinheit wird diesfalls unter Einwirkung von Q und $(-Q_1)$ von B ins Unendliche fortgeführt und nach dem Arbeitsgesetze besteht die Gleichung

$$\frac{Q}{R-\varrho}-\frac{Q_1}{\varrho-z}=0.$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgen die gesuchten Werte

$$z=\frac{\varrho^2}{R} \quad \text{und} \quad Q_1=\frac{\varrho}{R}\cdot Q.$$

Das Vorzeichen der unableitbaren Influenzelektricität erster Art ergibt sich auch durch Rechnung aus den Gleichgewichtsbedingungen, welche gelten, wenn die Kugel mit der Erde in leitender Verbindung steht.

Bei Bewegung der Kugel K im elektrischen Felde wird in der Zeiteinheit folgende Elektricitätsmenge entwickelt

$$i=\frac{dQ_1}{dt}=-\varrho\cdot\frac{Q}{R^2}\cdot\frac{dR}{dt},$$

d. h. die influenzierte Elektricitätsmenge ist dem Kugelhalbmesser ϱ, der Intensität des Feldes Q/R^2 und der Geschwindigkeit dR/dt proportional.

Durch Einführung des Potentials

$$V=\frac{Q_1}{\varrho}=\frac{Q}{R}$$

erhält man die Form

$$i = \varrho \cdot \frac{dV}{dt}.$$

nach welcher i der Capacität ϱ und der Änderung des Potentials in der Zeiteinheit proportional ist. Dieses letzte Gesetz zeigt Übereinstimmung mit dem Ohm'schen Gesetze für elektrische Ströme.

Durch entsprechende Bewegung von K im elektrischen Felde kann auch ein constanter elektrischer Strom erzeugt werden: K müsste an eine Stelle des Feldes, an welcher die Influenzelektricität zweiter Art das Potential V besässe, gebracht, dann leitend, etwa mit der Erde, verbunden und augenblicklich mit solcher Geschwindigkeit Q genähert werden, dass die abgeleitete Elektricität durch neue Influenzelektricität fortwährend vollständig ersetzt würde. Ähnlich könnte ein Strom durch Entfernen entwickelt werden.

Der gedachte Fall gibt ein deutliches Bild davon, wie durch die Bewegungsarbeit der Kugel K im elektrischen Felde fortgesetzt Elektricität entwickelt, beziehungsweise ein elektrischer Strom erzeugt werden kann.

Die geleistete Arbeit in der Zeiteinheit wäre

$$V \cdot i = \frac{i^2}{\varrho}.$$

Ist das Raummedium ein anderes als Luft, so kommt die Constante $\varkappa / 4\pi\delta$ hinzu.

Die Gleichung entspricht dem Joule'schen Gesetze.

Der Elektricitätserregung durch Influenz dienen die Influenzmaschinen. Bei der Thätigkeit derselben wird mechanische Arbeit im elektrischen Felde in elektrische Energie umgesetzt.

Auch die übrigen Arten der Elektricitätserregung dürften im wesentlichen durch eine Arbeit im elektrischen Felde erklärlich sein; der Unterschied scheint in den arbeitenden Kräften zu liegen; thatsächlich sind auch bei der Volta-Elektricität chemische Kräfte und bei der Thermo-Elektricität die Wärme thätig.

§ 105. **Elektrische Bilder. Schirm**[1]). Zwischen der elektrischen Influenz und der Reflexion des Lichtes besteht eine auffallende Beziehung. Bei beiden Erscheinungen wird nämlich von einem Punkte aus eine Kraftwirkung auf eine Fläche übertragen und die Fläche selbst durch Elektricität oder Licht wirksam; die Wirkung der Fläche kann in beiden Fällen durch die Wirkung eines Punktes ersetzt werden, welcher in der betreffenden optischen Erscheinung das Bild des ursprünglichen Lichtpunktes heisst. Mit Bezug auf diese Analogie nennt W. Thomson den Punkt, dessen Elektricität die Influenzelektricität zu ersetzen vermag, ein elektrisches Bild. Aus dem vor-

1) Zeitschrift für das Realschulw. XI. S. 269.

stehenden Paragraphen ist auch zu entnehmen, dass bei der Influenzerscheinung Bild und Gegenstand sich ebenso wechselseitig entsprechen wie in der Optik.

Die Übereinstimmung der bezüglichen Gesetze wird vollständig, wenn wir statt der Kugel eine ebene Fläche betrachten. Wir können für diesen Fall die mathematischen Ausdrücke aus § 104 benutzen, indem wir erst für die Entfernung $R = a + \varrho$ und schliesslich $\varrho = \infty$ setzen. Man erhält darnach für die Bildweite

$$a' = \varrho - z = \varrho - \frac{\varrho^2}{R} = \frac{\varrho(a+\varrho) - \varrho^2}{a + \varrho} = \frac{a}{1 + \frac{a}{\varrho}} = a,$$

d. h. die Bildweite ist der Gegenstandsweite gleich.

Für die Influenzelektricität ergibt sich

$$Q_1 = -\frac{\varrho}{a+\varrho} Q = -\frac{Q}{1 + \frac{a}{\varrho}} = -Q.$$

Der Analogie gemäss können wir das letzte Resultat dahin aussprechen, dass die gesammte Elektricität von der Fläche reflectiert werde; die ebene Fläche selbst functioniert als ein Schirm. Hinter dem Schirme besteht keine elektrische Wirkung. Dies folgt auch unmittelbar, wenn wir die Ebene als eine Kugel von unendlichem Radius auffassen; der Raum hinter dem Schirme entspricht dem inneren Raume der Kugel und in diesem sind die elektrischen Kraftwirkungen gleich Null. (Faradays Würfel und Cylinder.)

Das Princip der Bilder an einer Kugel kann auch auf ein beliebiges System von elektrischen Punkten, also auch auf eine elektrische Fläche angewendet werden. Denn jedes Element ruft durch Influenz auf der Kugelfläche Elektricität hervor, deren Wirkung nach aussen hin durch die Wirkung des Bildes ersetzt werden kann. Da jede Schichte der Influenzelektricitäten sich im Gleichgewichte befindet, liefert ihre Übereinanderlagerung wieder einen Gleichgewichtszustand. Die Gesammtheit der Bilder gibt ein System, welches das Bild des gegebenen Systemes in der Kugel ist.

Zwischen Gegenstand und Bild bestehen innige geometrische Beziehungen; so z. B. dass die entsprechenden Winkel einander gleich sind, daher Kugeln und Kreise sich wieder als Kugeln und Kreise abbilden. Die Beziehungen dienen dazu, um auf verhältnismässig einfache Weise die Vertheilung der Elektricität auf Körperflächen in complicierteren Verhältnissen zu finden[1]).

1) Siehe Mascart-Wallentin, Handbuch d. stat. El. I. S. 484—520 und Maxwell, Lehrb. d. El. I. S. 248—292. Maxwell, Die Elektr. in elem. Behandl. S. 85.

VII. Magnetismus.

§ 106. **Grunderscheinungen.** Die alten Culturvölker, welche die Küsten des Mittelmeeres bewohnten, kannten schon frühzeitig die Eigenschaft des Magneteisensteins (Fe_3O_4), kleinere Eisentheile aus einer gewissen Entfernung anzuziehen und dann festzuhalten. Der Name Magnet soll davon herrühren, dass dieses Mineral zuerst in der Nähe von Magnesia in Kleinasien gefunden worden sein soll. Nach einer anderen Ansicht soll ein Hirte namens Magnes, der auf dem Berge Ida Schafe hütete, plötzlich an den eisernen Beschlägen seiner Sandalen und seines Schäferstabes am Boden festgehalten worden sein[1]).

Die ersten schriftlichen Nachrichten über den Magnetstein finden wir bei den Griechen, und zwar in Platons „Ion" und bei Aristoteles. Platon kennt nicht allein die Anziehung, sondern weiss auch, dass ein an den Magnet gehaltener Ring selbst wieder magnetisch wird und einen zweiten, dritten u. s. w. zu tragen imstande ist, und dass sich so eine Kette von magnetischen Ringen zusammenstellen lasse. Lucretius erwähnt nicht nur die magnetische Kette, sondern spricht auch über abwechselndes Anziehen und Abstossen, über den Durchgang der magnetischen Kraft durch eherne Schalen und hebt hervor, dass andere Metalle und Holz nicht angezogen würden.

Die Kenntnis der natürlichen Magnete hatte wissenschaftlich und praktisch keine Erfolge; sie führte nicht einmal zur Auffindung der grossen Lager von Magneteisensteinen, die in Schweden, Norwegen, Steiermark, Tirol, Piemont, Elba, am Ural, in Sibirien u. a. O. vorkommen.

Einen mächtigen Impuls zum Studium des Magnetismus gab die Einführung der Magnetnadel, die von China aus nach Indien und Arabien verbreitet, dann im 12. Jahrhunderte wahrscheinlich durch die Mauren nach Europa gebracht und durch die Kreuzfahrer allgemein bekannt wurde. Der chinesische Kaiser Hoang-ti (2600 v. Chr.) soll bereits magnetische Wagen besessen haben. In dem Vordertheile eines solchen bewegte eine freischwimmende Nadel Arm und Hand einer kleinen Figur, die nach Süden hinwies. Ein solcher

1) K. Ausserer, Die Geschichte der Magnetnadel. Gymn.-Progr. Troppau. 1876. P. Reis, Lehrb. d. Phys. 8. Aufl. S. 602.

Apparat hiess sce-nan (Andeuter des Südens). Es ist bemerkenswert, dass die Magnetnadel in China zunächst nicht zum Zwecke der Seereisen, sondern für Landreisen verwendet wurde; erst aus dem 4. Jahrhunderte n. Chr. haben wir sichere Kunde, dass der Compass zur See gebraucht wurde. Die Magnetnadel wurde als „Leitstein", auf Stroh oder Kork schwimmend, gebraucht, bis Flavio Gioja (1203) sie auf eine feine Stahlnadel setzte, um die sie sich horizontal drehen konnte. Hierdurch war der Grund gelegt zur Construction des Compasses.

Ausser der Eigenschaft der Magnetnadel, dass sie bei freier Bewegung in einer horizontalen Ebene stets die Richtung von Norden nach Süden annimmt, war auch bekannt, dass die Enden eines Magnetstabes am meisten Eisenfeilspäne anziehen. Man nennt diese Enden beziehungsweise Nord- und Südpol nach der Weltgegend, nach der sie hinweisen.

Porta (1589) berichtet auch über die Wechselwirkung der Pole und über die Verfertigung künstlicher Magnete durch Streichen von Eisen mit einem natürlichen oder einem anderen künstlichen Magnete.

Im Jahre 1600 veröffentlichte Dr. Gilbert eine grosse Zahl von Entdeckungen im Gebiete des Magnetismus in seinem berühmten Werke: De Magnete. Er wies die Pole als Punkte der stärksten anziehenden Kraft nach, zeigte, dass die gleichnamigen Pole einander abstossen und die ungleichnamigen einander anziehen und beobachtete die magnetischen Figuren der Eisenfeilspäne zwischen zwei ungleichnamigen Magnetpolen; er nannte die Verbindungslinie der Pole Achse und die Stelle in der Mitte derselben, die keine Anziehung äussert, bezeichnete er als Äquator des Magnetes. Er bestimmte die Anziehungskraft eines Magnetes gegen Eisen mittelst einer Wage und fand übereinstimmend mit Newton die Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung. Er fand, dass der Magnet durch feste, flüssige und gasförmige Körper hindurch wirkt, nur nicht durch Eisen und andere magnetische Körper. Ein hohles eisernes Gefäss wirkt als magnetischer „Käfig" und schützt seinen Innenraum vor magnetischen Einwirkungen.

Später fand man, dass ausser Eisen und Stahl auch noch andere Körper die Eigenschaft haben, vom Magnete angezogen und selbst magnetisch zu werden und in diesem Zustande Polarität im Sinne eines Eisenmagnetes zu zeigen; solche Körper, paramagnetisch genannt, sind: Nickel, Kobalt, Chrom, Mangan u. a. Einige andere Körper, namentlich Wismut, Antimon, Phosphor, Kupfer, werden von den Polen eines Magnetes abgestossen und stellen sich bei freier Aufhängung zwischen den Polen eines Magnetes nicht achsial, sondern äquatorial (Faraday 1845); sie heissen diamagnetisch.

Gilberts wichtigste Entdeckung war die des Erdmagnetismus. Er erkannte die Erde als einen grossen Magnet und verglich ihr Verhalten mit einer magnetischen Kugel, nahm aber die magnetischen Pole mit den astronomischen zusammenfallend an. Beobachtungen bei grösseren Reisen nach Amerika führten zur Entdeckung der magnetischen Declination (Columbus 1492) und der Inclination (Norman 1576). Der magnetische Nordpol der Erde wurde von Ross (1831) auf der Halbinsel Boothia Felix aufgefunden; er besitzt 70° 5′ nördl. Breite und 96° 46′ westl. Länge v. Gr. Die Lage des magnetischen Südpoles ist nicht genau bekannt.

Ausser der Stellung der Magnetnadel führt Gilbert auch noch das Magnetisieren von Eisenstäben unter dem Einfluss der Erde als Beweis für den magnetischen Zustand derselben an. Wenn man einen Eisenstab ungefähr in der Richtung der Inclinationsnadel (im magnetischen Meridian nach abwärts geneigt) gegen die Erde hält, mit einem hölzernen Hammer schlägt oder mit demselben mehrmals auf den Fussboden klopft, so wird der Stab magnetisch.

Die Magnetisierung durch den Doppelstrich haben zuerst Michell und Aepinus vorgenommen.

§ 107. **Hypothesen.** Ebenso wie gleichnamige Elektricitäten einander abstossen, so stossen auch gleichnamige magnetische Pole einander ab, und ungleichnamige Elektricitäten wirken ebenso wie ungleichnamige Magnetpole anziehend aufeinander. Diese Übereinstimmung zwischen Elektricität und Magnetismus hat Coulomb (1779) zu der Annahme geführt, dass ebenso wie die Elektricität auch der Magnetismus besondere Fluida als Träger habe, dass es ein nord- und ein südmagnetisches Fluidum gebe. Darnach kann weiter angenommen werden, dass die beiden Fluida im unmagnetischen Körper vereint seien und sich gegenseitig neutralisieren, dass sie aber beim Magnetisieren von einander getrennt und entsprechend gerichtet werden.

Andere Versuche führten Weber zur Theorie der Molecularmagnete. Man kann zeigen, dass nach dem Zerbrechen einer magnetischen Stricknadel jeder Theil wieder ein Magnet mit zwei Polen ist, ferner dass Eisenfeilspäne in einer Glasröhre einen Magnet zusammensetzen, wenn die Röhre wie ein Eisenstab magnetisiert wurde, und endlich, dass durch Schütteln der Röhre ihr magnetischer Zustand wieder verloren geht. Diesen Versuchen gemäss ist die Annahme, dass die kleinsten Theile eines Magnetes, die Molecüle selbst, fertige Magnete seien; im unmagnetischen Eisen würden die Achsen der Molecularmagnete unregelmässig nach allen Richtungen hinweisen, im magnetischen Eisen aber würden die magnetischen Achsen der Molecüle zumeist parallel laufen, so dass alle Nordpole nach einer und alle Südpole nach der entgegengesetzten Seite gewendet wären.

Mit dieser Theorie steht vor allem im Einklange, dass Magnetismus

nicht fortgeleitet werden kann, und dass Nord- und Südmagnetismus nicht von einander getrennt werden können. Durch diese Thatsache unterscheidet sich auch der Magnetismus wesentlich von der Elektricität. Weiter lassen sich erklären: die Lage der Pole in der Nähe der Enden eines Magnetes, die Lage der Indifferenzzone in der Mitte, die Magnetisierung durch die verschiedenen Arten des Streichens, der Sättigungsgrad und die Coërcitivkraft, d. i. der Widerstand, den das Eisen der Magnetisierung (der Drehung der Molecularmagnete) entgegensetzt; kehren die Molecüle von selbst wieder in ihre früheren Lagen zurück, so ist der Körper temporär magnetisch; verharren sie in ihrer parallelen Lage, so ist er permanent magnetisch.

§ 108. **Coulombs Gesetz** (1785). Das Gesetz für die Wechselwirkung zweier Magnetpole stimmt mit dem Gesetze für die Wechselwirkung zweier Elektricitätsmengen überein. Zum Nachweise dessen benützte Coulomb seine Drehwage[1]): Der Apparat wurde so aufgestellt, dass eine an einem dünnen Silberdrahte aufgehängte Magnetnadel sich im magnetischen Meridian befand, ohne dass der Draht tordiert war; weiter wurde ermittelt, dass einer Drehung des Drahtes um 35^0 die Ablenkung der Nadel um 1^0 aus dem magnetischen Meridian entsprach. Darnach brachte Coulomb einen zweiten Magnet in den Apparat und zwar so, dass nur die Wirkung eines Poles desselben in der Ablenkung der ersten, beweglichen Nadel zur Geltung kam. Die Nadel wurde um 24^0 abgestossen. Der Abstossungskraft hielt die Torsionselasticität des Fadens, die durch 24 Krafteinheiten gemessen werden kann, und die magnetische Erdkraft $= 24 \cdot 35$ Krafteinheiten das Gleichgewicht; die Abstossungskraft betrug demnach 864 Krafteinheiten. Nun wurde die Torsionsscheibe so gedreht, dass der aufgehängte Magnet dem wirkenden Pole des festen Magnetes näher gebracht wurde, und zwar solange, bis der Abstand zwischen den einander abstossenden Polen nur halb so gross wie anfänglich war. Es ergab sich, dass die Torsionsscheibe acht volle Umdrehungen machen musste, damit die Pole einen Abstand von 12^0 hatten. Diese acht Umdrehungen betragen $8 \cdot 360^0 = 2880^0$. Die Torsion des Fadens ist $2880 + 12 = 2892^0$. Die Wirkung des Erdmagnetismus entspricht $12 \cdot 35 = 420^0$. Daher kommt die Abstossung einer durch 3312^0 gemessenen Kraft gleich; diese ist ungefähr das Vierfache von 864^0, der Kraft bei der doppelten Entfernung der Pole. Daraus wurde geschlossen, dass die Wechselwirkung zweier Magnetpole sich im umgekehrt quadratischen Verhältnis mit der Entfernung der Pole ändere. —

Bei gegebener Entfernung hängt auch die Kraft noch von der

1) Silv. Thompson, Vorles. über Elektr. u. Magn. Deutsch von Himstedt. S. 102.

Polstärke ab. Man nimmt an, dass jener Pol die Stärke Eins habe oder die magnetische Masse Eins besitze, welcher auf einen gleichen Pol in der Entfernung von 1 cm die Kraft von 1 Dyn ausübt. Hiernach üben zwei Magnetpole von der Stärke m und m' in der Entfernung r die Kraft

$$f = \frac{m \cdot m'}{r^2}$$

aufeinander aus. Je nachdem m und m' gleichnamig oder ungleichnamig sind, ist f positiv oder negativ, es findet beziehungsweise Abstossung oder Anziehung statt. Mit Rücksicht auf diese Wirkung wird auch die magnetische Masse als positiv oder negativ bezeichnet.

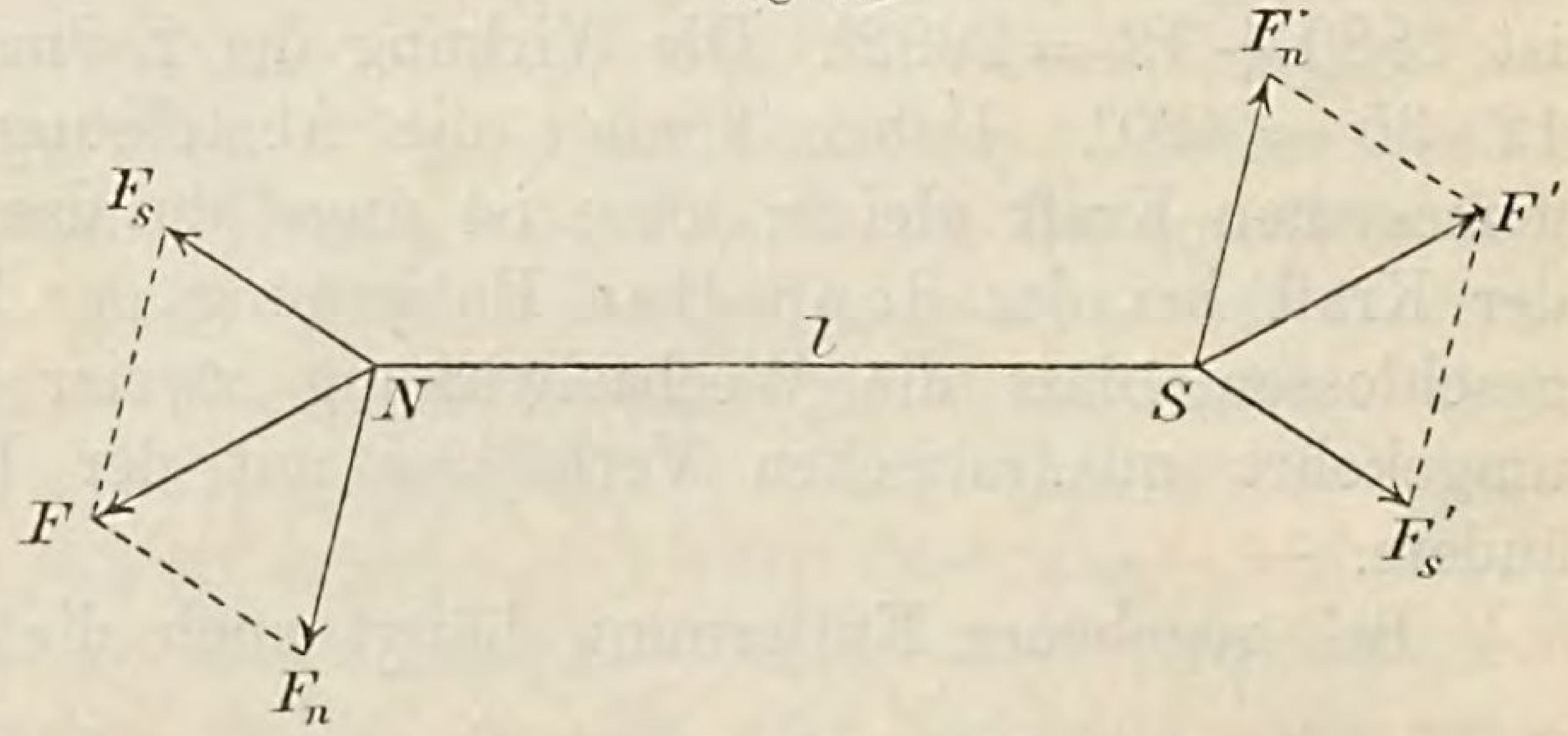
Aufg. Coulomb liess eine Declinationsnadel unter dem Einfluss der Erde allein schwingen und beobachtete 15 Schwingungen in der Minute; wenn der Nordpol eines langen Magnetes im magnetischen Meridian dem Südpol der Nadel in einer Entfernung von 21·66 cm gegenüber stand, dagegen 24 Schwingungen und bei einer Entfernung der Pole von 10·83 cm 41 Schwingungen. In welchem Verhältnis stehen die Kräfte, mit denen die ungleichnamigen Pole von Stab und Nadel aufeinander wirken? — (Aus der Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels $t = \pi\sqrt{T/Mal}$ folgt $60/15 = \pi\sqrt{T/MlH}$, wenn H die erdmagnetische Horizontalintensität ist. Ferner gilt analog $60/24 = \pi\sqrt{T/Ml(H+f_1)}$ und $60/41 = \pi\sqrt{T/Ml(H+f_2)}$, und es folgt

$$f_1/f_2 = (24^2 - 15^2)/(41^2 - 15^2) = 1/4\,.)$$

§ 109. **Magnetisches Moment. Intensität des Erdmagnetismus.** Der Versuch mit einer schwimmenden Magnetnadel beweist, dass die magnetischen Kräfte der Erde nur eine Drehung hervorzubringen vermögen. Zu demselben Ergebnisse gelangt man, wenn man die Erde als einen grossen Magnet betrachtet und die Wirkung der Pole derselben auf eine Magnetnadel ermittelt.

In Fig. 67 seien N und S beziehungsweise Nord- und Südpol eines Magnetstabes mit den magnetischen Massen $+m$ und $-m$. $NS = l$ sei die magnetische Achse.

Fig. 67.



Der Nordpol der Erde wirke mit den Kräften F_n und F_n' und der erdmagnetische Südpol mit den Kräften F_s und F_s' ein. Es ist ersichtlich, dass derselbe Erdpol auf N und S gleiche und entgegengesetzte Wirkungen ausübt; daher müssen auch die Resultierenden F und F' einander gleich, aber

entgegengesetzt gerichtet sein. Im ganzen wirkt daher ein Kräftepaar, das nur eine Drehung, aber keine fortschreitende Bewegung hervorbringen kann. Das grösste Drehungsmoment des Kräftepaares ist

$$D = F \cdot l.$$

Hat die Achse l die Richtung der Kräfte F, so befindet sich die Nadel im Gleichgewichte.

Nach der Weber'schen Theorie des Magnetismus wirkt auf jeden Elementarmagnet ein Kräftepaar; alle diese Kräftepaare lassen sich (nach § 27) zu einem resultierenden Kräftepaare zusammensetzen, dessen Drehungsmoment gleich ist der Summe der Drehungsmomente der auf die Elementarmagnete wirkenden Kräftepaare; es muss also die Beziehung bestehen

$$D = \Sigma f \cdot \lambda = F \cdot l.$$

Das resultierende Kräftepaar hat keine bestimmte Lage, und es lassen sich die Factoren F und l nicht einzeln bestimmen; denn wie aus der Bedeutung des Drehungsmomentes als Arbeitswert der Drehung für die Winkeleinheit folgt, kann ein Kräftepaar durch ein anderes ersetzt werden, wenn die Drehungsmomente beider einander gleich sind. Damit auch die Gleichgewichtslage eine bestimmte sei, ist nur noch erforderlich, dass die Kraftrichtung beziehungsweise die Arme parallel angenommen werden. Bei der Unbestimmtheit von F und l ist auch die Lage der Angriffspunkte von F, d. i. die Lage der Pole unbestimmt.

Wird F nach dem Newton'schen Kraftmasse ausgedrückt durch die hypothetische magnetische Masse m und die Intensität des Erdmagnetismus J, ist also $F = m \cdot J$, so wird

$$D = J \cdot ml = J \cdot \mathfrak{M}.$$

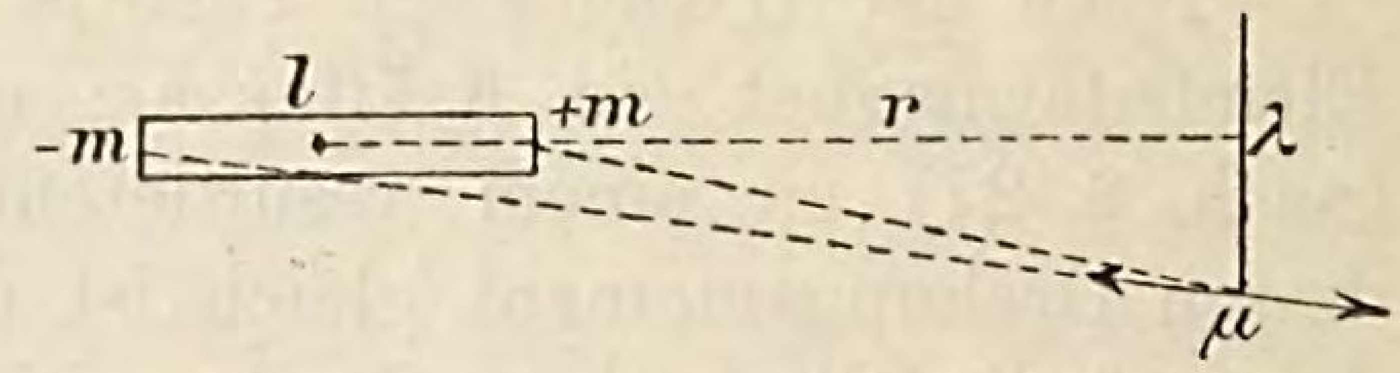
Das Product $\mathfrak{M}$ aus der magnetischen Masse m in die magnetische Achse l heisst das magnetische Moment. Seine Dimension ist $L^{5/2} \cdot M^{1/2} \cdot T^{-1}$ oder $\mathrm{cm}^{5/2} \cdot \mathrm{gr}^{1/2} \cdot \mathrm{sec}^{-1}$. Dasselbe kommt bei den meisten magnetischen Versuchen zur Geltung und kann durch Ablenkungs- und Schwingungsversuche ermittelt werden.

Die Intensität des Erdmagnetismus J kommt nur bei der Inclinationsnadel zu voller Wirksamkeit; bei der Declinationsnadel macht sich nur die Horizontalcomponente $\mathfrak{H} = J \cdot \cos i$ geltend, wenn i den Inclinationswinkel bedeutet.

Aufg. 1. Eine Magnetnadel ist in einer Ebene beweglich, welche normal zur Richtung der Inclinationsnadel steht; wie gross sind die Kräfte des wirkenden Kräftepaares? — $(F = 0.)$ **2.** Eine Magnetnadel ist in einer Verticalebene beweglich, die mit dem magnetischen Meridian einen rechten Winkel bildet; mit welcher Kraft wirkt der Erdmagnetismus drehend auf die Nadel? — $(V = J \sin i.)$ **3.** Nach Gauss kann man

das magnetische Moment $\mathfrak{M}$ und die horizontale Componente $\mathfrak{H}$ der Intensität des Erdmagnetismus auf folgende Weise berechnen: Man lässt den aufgehängten Magnet schwingen und ermittelt die Schwingungsdauer $t = \pi\sqrt{T/\mathfrak{M}\mathfrak{H}}$, wobei $\mathfrak{M} = m \cdot l$. Hierauf bringt man den Magnet in eine normale Lage zum magnetischen Meridian, hält in einer Entfernung r (Fig. 68) von demselben eine Magnetnadel und lässt diese ablenken. Die Länge des Magnetstabes sei l, die magnetische Masse seiner Pole $\pm m$; die Länge der Nadel sei λ, ihre Polmassen $\pm \mu$. — l und λ seien gegen die Entfernung r nur klein. Wie gross ist die ablenkende Kraft F, wie gross ist der Quotient $\mathfrak{M}/\mathfrak{H}$, wie gross sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$? —

Fig. 68.



$(F = m\mu/(r - l/2)^2 - m\mu/(r + l/2)^2 \doteq 2ml \cdot \mu/r^3 = 2\mathfrak{M} \cdot \mu/r^3$. Ist φ der Ablenkungswinkel der Nadel, so ist das Drehungsmoment der Horizontalcomponente $\mathfrak{H}$ gleich $\mathfrak{H} \cdot \mu \cdot \lambda \cdot \sin\varphi$; dasselbe muss im Gleichgewichtsfalle dem Momente $F\lambda \cdot \cos\varphi$ gleich sein. Daraus folgt $\mathfrak{M}/\mathfrak{H} = \frac{1}{2}r^3 \cdot \operatorname{tg}\varphi$, ferner mit Rücksicht auf den Schwingungsversuch $\mathfrak{M} = (\pi r/t) \cdot \sqrt{\frac{1}{2}rT \operatorname{tg}\varphi}$ und $\mathfrak{H} = (\pi/rt)\sqrt{2T/r \operatorname{tg}\varphi}$.) **4.** Ein Magnetstab hat die Länge $l = 10$ cm, das Gewicht 10 gr, eine Schwingungsdauer von 6·4 sec; bei einer Entfernung von $r = 30$ cm lenkt er eine Magnetnadel um $\varphi = 2^0\ 7'$ ab. Wie gross sind die Horizontalcomponente $\mathfrak{H}$ und das magnetische Moment $\mathfrak{M}$ des Magnetstabes? —

$(T = 10 \cdot 10^2/12\ \mathrm{grcm}^2$, $\mathfrak{M} = 100\ \mathrm{gr}^{1/2}\mathrm{cm}^{5/2}\mathrm{sec}^{-1}$, $\mathfrak{H} = 0{\cdot}2\ \mathrm{gr}^{1/2}\mathrm{cm}^{-1/2}\mathrm{sec}^{-1}$.)

5. Im Jahre 1845 ergaben die Versuche in Berlin, dass ein Magnetstab, dessen Trägheitsmoment $T = 1243{\cdot}35\ \mathrm{grcm}^2$ war, 6·67 sec zu einer Schwingung brauchte und die Nadel eines Magnetometers in 45 cm Abstand vom Nadelmittelpunkte um $10^0\ 53'$ ablenkte. Wie gross war damals die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus in Berlin? —

$(\mathfrak{H} = 0{\cdot}179\ \mathrm{gr}^{1/2}\mathrm{cm}^{-1/2}\mathrm{sec}^{-1}$.)

6. Wie gross war die totale Intensität des Erdmagnetismus nach der vorhergehenden Aufgabe, wenn die Inclination $67^0\ 35'$ betrug? — $(J = 0{\cdot}469$.) **7.** In Wien wurde 1890 eine Bestimmung der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus vorgenommen. Es ergab sich, dass ein Magnetstab, dessen Trägheitsmoment $T = 1437\ \mathrm{grcm}^2$ und dessen Schwingungsdauer 5·17 sec war, in 44·6 cm Abstand von der Magnetnadel diese um $15^0\ 20'$ ablenkte. Wie gross war die Horizontalcomponente? — $(\mathfrak{H} = 0{\cdot}209$.) **8.** Wie gross war der vorhergehenden Aufgabe gemäss die totale Intensität des Erdmagnetismus, wenn die Inclination $63^0\ 6'$ war? — $(J = 0{\cdot}462$.)

§ 110. **Potential eines kleinen Magnetes.** Ein sehr kleiner Magnet (Fig. 69) habe die magnetische Achse l und in den Polen die Massen $\pm m$. In einem Punkt A ist das Potential

$$V = \frac{m}{r} - \frac{m}{r'} = m\frac{r' - r}{rr'}.$$

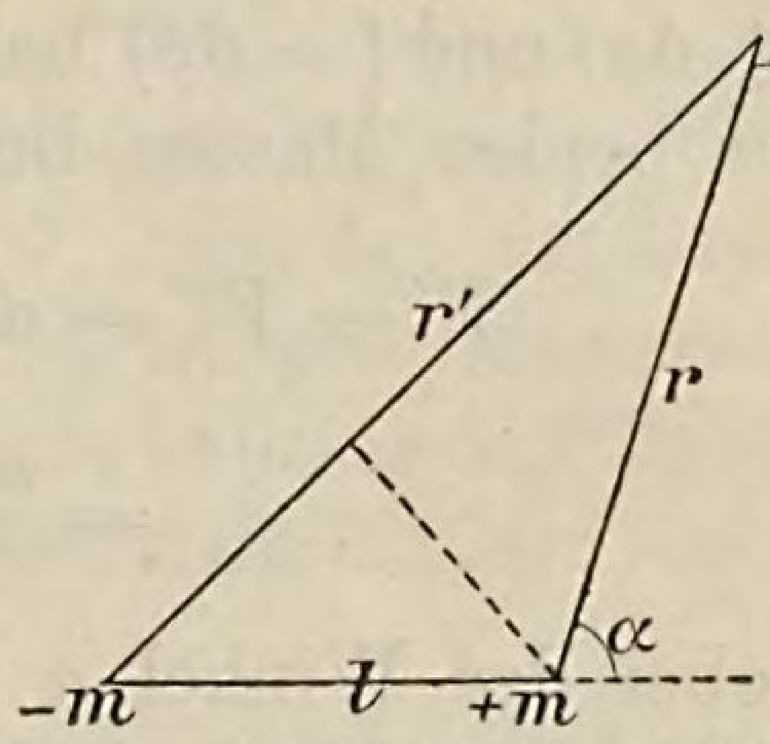
Setzt man für $r' - r = l \cos\alpha$ und $rr' = r^2$, so ist

$$V = \frac{ml \cos\alpha}{r^2} = \mathfrak{M} \cdot \frac{\cos\alpha}{r^2},$$

wenn $\mathfrak{M}$ das magnetische Moment des sehr kleinen Magnetstabes angibt.

Mit Hilfe des Potentials lässt sich leicht die Kraft berechnen, welche auf die magnetische Masseneinheit in A wirkt; sie ist

Fig. 69.



$$F_r = -\frac{dV}{dr} = \frac{2\mathfrak{M}\cos\alpha}{r^3};$$

man kann die Kraft gegen die Mitte des Magnetes gerichtet annehmen. In der Verlängerung von l ist $\sphericalangle\, \alpha = 0$, und es wird

$$F_r = \frac{2\mathfrak{M}}{r^3};$$

dieser Wert stimmt mit der Berechnung von F in Aufg. 3 des vorhergehenden Paragraphen überein[1]).

Für die in A normal zu r wirkende Kraft erhält man

$$F_n = -\frac{dV}{r\,d\alpha} = \frac{\mathfrak{M}\sin\alpha}{r^3}.$$

Aufg. 1. Welchen Wert hat das Potential eines 7 cm langen Magnetstabes von 110 absoluten magnetischen Einheiten Polstärke in einem Punkte, welcher in der Stabachse liegt und vom Nordpol 77 cm absteht? — ($V = 0{\cdot}119$.) **2.** Wie gross ist die Potentialdifferenz zwischen dem angegebenen und einem um 21 cm weiter vom Nordpol abgelegenen Punkte? — ($V - V' = 0{\cdot}119 - 0{\cdot}075 = 0{\cdot}044$.) **3.** In einem Kreise von r cm Radius sind in gleichen Abständen n Magnetstäbe von l cm Länge und m magnetischen Einheiten Polstärke radial angeordnet, so dass die Nordpole in der Peripherie des obigen, die Südpole aber in einem entsprechend grösseren Kreise liegen. Wie gross ist das Potential im Mittelpunkte des Kreises? — ($V = n(m/r - m/(r + l) = n \cdot m \cdot l/r(r + l))$.) **4.** Wie gross wäre das Potential im Kreismittelpunkte, wenn die Magnete der vorhergehenden Aufgabe abwechselnd Nord- und Südpol demselben zuwendeten? — ($V = 0$.) [E. Maiss.]

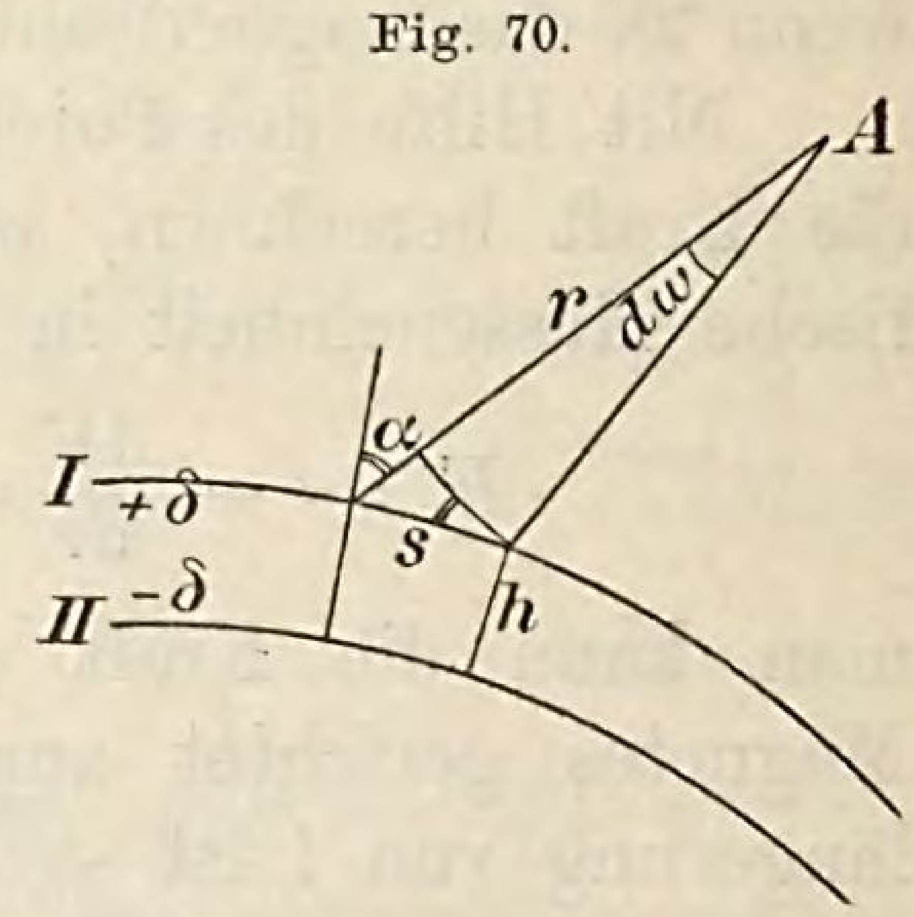
§ 111. **Blattmagnete.** Eine ebene oder krumme Platte von sehr kleiner Dicke, die auf einer Seite gleichmässig mit nordmagnetischer und auf der anderen Seite ebenso stark mit südmagnetischer Masse belegt gedacht werden kann, heisst magnetische Schale oder magnetisches Blatt. — Es soll das Potential, die Kraft und die potentielle Energie eines solchen Blattes bestimmt werden. Die Dichte,

1) Die Wirkung zweier Magnetnadeln, nach dem Arbeitsgesetze berechnet, siehe in meiner Schrift über das Energieprincip in d. Elektrl. 1887. S. 76.

die magnetische Masse auf der Flächeneinheit, sei auf einer Fläche $(+\delta)$ und auf der anderen $(-\delta)$. Der Abstand beider Flächen sei h. Das Product $h\delta = \Phi$ heisst die magnetische Stärke des Blattes[1]).

a) Um das Potential des Blattes in einem ausserhalb liegenden Punkte A (Fig. 70) zu ermitteln, bestimmen wir zuerst das Potential eines Elementes über der Fläche s. Das Element stellt einen kleinen Magnet vor, dessen Enden mit den magnetischen Massen $(+\delta s)$ und $(-\delta s)$ belegt sind; das Potential der beiden Massen im Punkte A ist

Fig. 70.



$$V' - V'' = dV = d\left(\frac{s \cdot \delta}{r}\right)$$

$$= \frac{s\delta \cdot dr}{r^2} = \frac{s\delta}{r^2} \cdot h \cdot \cos\alpha,$$

wobei der Winkel α von der Normalen des Flächenstückes s und der Entfernung r gebildet wird. Analog wie in § 18 können wir den Ausdruck für dV durch Einführung des körperlichen Gesichtswinkels, unter welchem s vom Punkte A aus erscheint, wesentlich vereinfachen. Es ist nämlich der Factor $s \cos\alpha$ die Projection von s auf eine Kugel, welche von A als Mittelpunkt mit dem Halbmesser r beschrieben wird und $\frac{s \cos\alpha}{r^2}$ die Centralprojection dieser Fläche auf eine Kugel um A vom Halbmesser $= 1$; wir bezeichnen diesen räumlichen Gesichtswinkel mit

$$\frac{s \cos\alpha}{r^2} = d\omega$$

und erhalten

$$dV = (h\delta) \cdot d\omega = \Phi \cdot d\omega$$

und für das ganze Blatt

$$V = \Phi \cdot \omega.$$

Hieraus folgt der wichtige Satz von Gauss: Das Potential eines einfachen magnetischen Blattes in einem äusseren Punkte ist gleich dem Producte der magnetischen Stärke des Blattes in den körperlichen Winkel, unter welchem das Blatt von dem Punkte aus gesehen wird. Das Potential ist also von der Form des Blattes unabhängig und nur abhängig von der äusseren Begrenzungslinie desselben. Die Grösse ω ist je nach dem Vorzeichen von $\cos\alpha$ positiv oder negativ; man überzeugt sich leicht, dass sie demnach positiv oder negativ wird, je nachdem man von A aus den positiven oder negativen Theil des Blattes besieht.

Bildet das Blatt eine geschlossene Fläche, so ist das Potential in einem äusseren Punkte gleich Null, da von dem Punkte aus der

1) Siehe meine Schrift über das Energieprincip in d. El. S. 73.

Gesichtswinkel der zugewandten Seite gleich und entgegengesetzt dem Gesichtswinkel der abgewandten Seite, also die algebraische Summe beider gleich Null ist; auf einem inneren Punkte besitzt das Potential die constante Grösse $4\pi \cdot \Phi$. Es sind demnach die Potentialwerte für äussere Punkte und für innere Punkte constant, daher die Kraftwirkung eines geschlossenen Blattes sowohl nach aussen wie nach innen gleich Null ist.

Bildet das Blatt eine ebene Figur, dann wird in einem Punkte dicht an der positiven Fläche des Blattes der Gesichtswinkel des Blattes gemessen durch die halbe Kugeloberfläche vom Radius Eins, also durch 2π, und das Potential ist $(+ 2\pi \cdot \Phi)$; an der negativen Seite ist das Potential $(- 2\pi \cdot \Phi)$. Um die magnetische Masseneinheit von einer Fläche auf irgend einem Wege zur anderen zu führen, ist eine Arbeit erforderlich, welche durch die Potentialdifferenz $4\pi \cdot \Phi$ gegeben ist.

b) Die Grösse ω für den körperlichen Gesichtswinkel hat auch eine physikalische Bedeutung. Ist die Flächendichte von s Eins, dann gibt s auch die magnetische Masse der betreffenden Fläche an; und ist überdies die Masse im Punkte A gleich Eins, dann ist $\frac{s}{r^2}$ nach dem Coulomb'schen Gesetze die Wechselwirkung zwischen s und A und es bedeutet

$$\omega = \frac{s \cos \alpha}{r^2}$$

die zu s normale Componente der Kraftwirkung der Masseneinheit in A auf den Beleg in s, wenn dessen Dichte gleich Eins ist. Da die Wirkung eine wechselseitige ist, so gibt der Ausdruck zugleich die Kraft, mit welcher die Fläche auf den Punkt wirkt.

Für die magnetische Induction ist die Einwirkung eines ebenen Blattes auf einen Punkt zwischen den beiden magnetischen Flächen von Wichtigkeit. Diese Wirkung setzt sich zusammen aus der Einwirkung beider Flächen auf den Punkt. Der Gesichtswinkel, unter welchem jede Fläche von einem inneren Punkte erscheint, wird mit grosser Annäherung gemessen durch die Fläche einer Halbkugel vom Radius Eins und ist somit bestimmt durch 2π; die Kraftwirkung einer Fläche ist demnach $2\pi \cdot \delta$, wenn die Flächendichte δ ist. Die Summe der Wirkungen beider Flächen des Blattes auf einen inneren Punkt wird demnach

$$p = 4\pi \cdot \delta .$$

c) Die potentielle Energie eines magnetischen Blattes in einem magnetischen Felde wird bestimmt durch die Arbeit, welche nötig ist, um das Blatt aus wirkungsloser Ferne in seine gegenwärtige Lage zu bringen. Im einfachsten Falle hat man es mit einem Felde um einen magnetischen Punkt zu thun. Die Energie ist dann gleich der

Arbeit W zur Heranbewegung des Punktes an das Blatt und diese ist gegeben durch das Product aus dem Potential V in die Masse m des Punktes, also ist

$$W = m \cdot V = m \cdot \Phi \cdot \omega = \Phi \cdot p .$$

Hierin wurde mit Rücksicht auf die Bedeutung von ω als Kraft das Product $m\omega = p$ gesetzt; es ist die Kraftwirkung zwischen dem magnetischen Punkte und der positiven Seite des Blattes. Die Energie W ist demnach gleich dem Producte aus der Stärke des Blattes in die magnetische Einwirkung des Feldes auf die positive Seite des Blattes.

Ist das Feld durch ein magnetisches System erzeugt, so wird jeder Punkt desselben eine Kraftwirkung ausüben und die Energie wird gleich sein dem Producte aus der Stärke des Blattes in die gesammte Kraftwirkung des Feldes auf die positive Seite des Blattes.

Wirken demnach zwei Blätter aufeinander, dann ist die Energie von I im Felde von II gleich

$$W_1 = \Phi_1 \cdot \Sigma p .$$

Analog ist die Energie von II im Felde des Blattes I

$$W_2 = \Phi_2 \cdot \Sigma q .$$

Die beiden Energiewerte müssen einander gleich sein; denn auch die Arbeit ist dieselbe, ob I an II oder II an I herangeschoben wird. Demnach kann man für die Energie schreiben

$$W = \Phi_1 \cdot \Sigma p = \Phi_2 \cdot \Sigma q = \Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdot Q .$$

Mit Bezug auf den obigen Ausdruck für die Energie bedeutet Q die Kraft, mit welcher ein Blatt auf die positive Seite des anderen wirkt, wenn beide Blätter die Stärke Eins haben. Die Energie beider Blätter ist somit bestimmt durch das Product aus der Kraftwirkung Q in das Product aus den magnetischen Stärken beider Blätter. Q heisst auch der Coefficient der wechselseitigen Induction.

Die vorstehenden Resultate für magnetische Blätter gelten auch für elektrische Stromkreise, welche den magnetischen Blättern gleiche Flächen umschliessen.

§ 112. **Magnetische Induction.** (Poisson 1821.) a) Magnetisches Feld. Da das Newton'sche Gravitationsgesetz und das Coulomb'sche Gesetz für elektrische Kräfte der Form nach mit dem Coulomb'schen Gesetze für magnetische Kräfte übereinstimmen, so lassen sich nach Maxwell die in § 19 und § 100 angegebenen Faraday-schen Betrachtungen über das Kraftfeld auch auf das magnetische Kraftfeld anwenden.

Wirkt ein Magnetpol auf eine magnetische Masseneinheit und bewegt sich diese beständig in der Richtung der auf sie wirkenden

Kraft, so beschreibt sie eine Kraftlinie. Kraftlinien rings um ein Flächenstück setzen eine Kraftröhre zusammen. Zu den Kraftlinien normal verlaufen die Äquipotential- oder Niveauflächen.

Fig. 71.

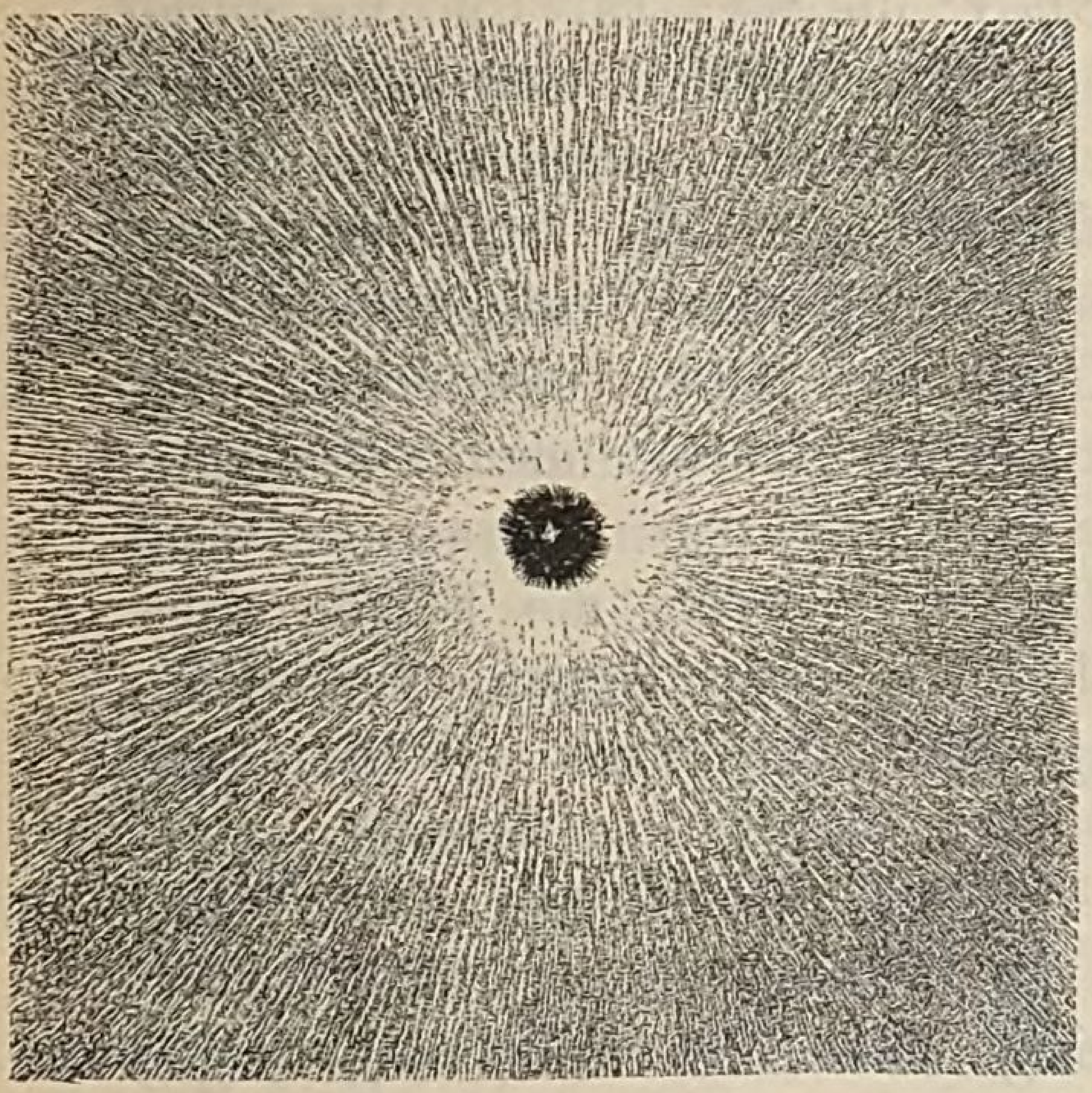
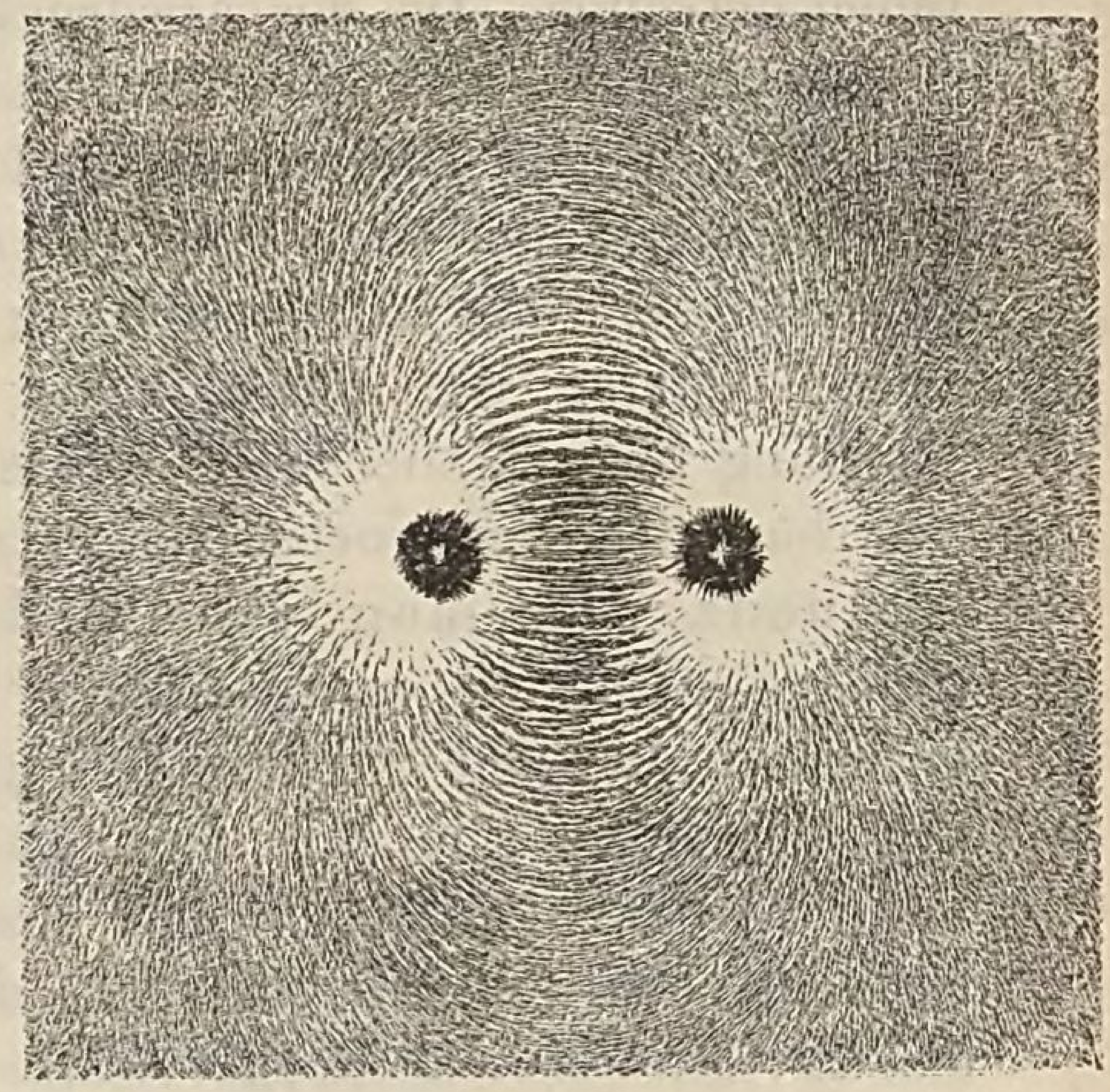


Fig. 72.



Sehr deutlich werden die Kraftlinien im magnetischen Felde von Eisenfeilspänen dargestellt, indem diese sich in der Richtung solcher Linien anordnen. Einige wichtige Fälle sind in den beifolgenden

Fig. 73.

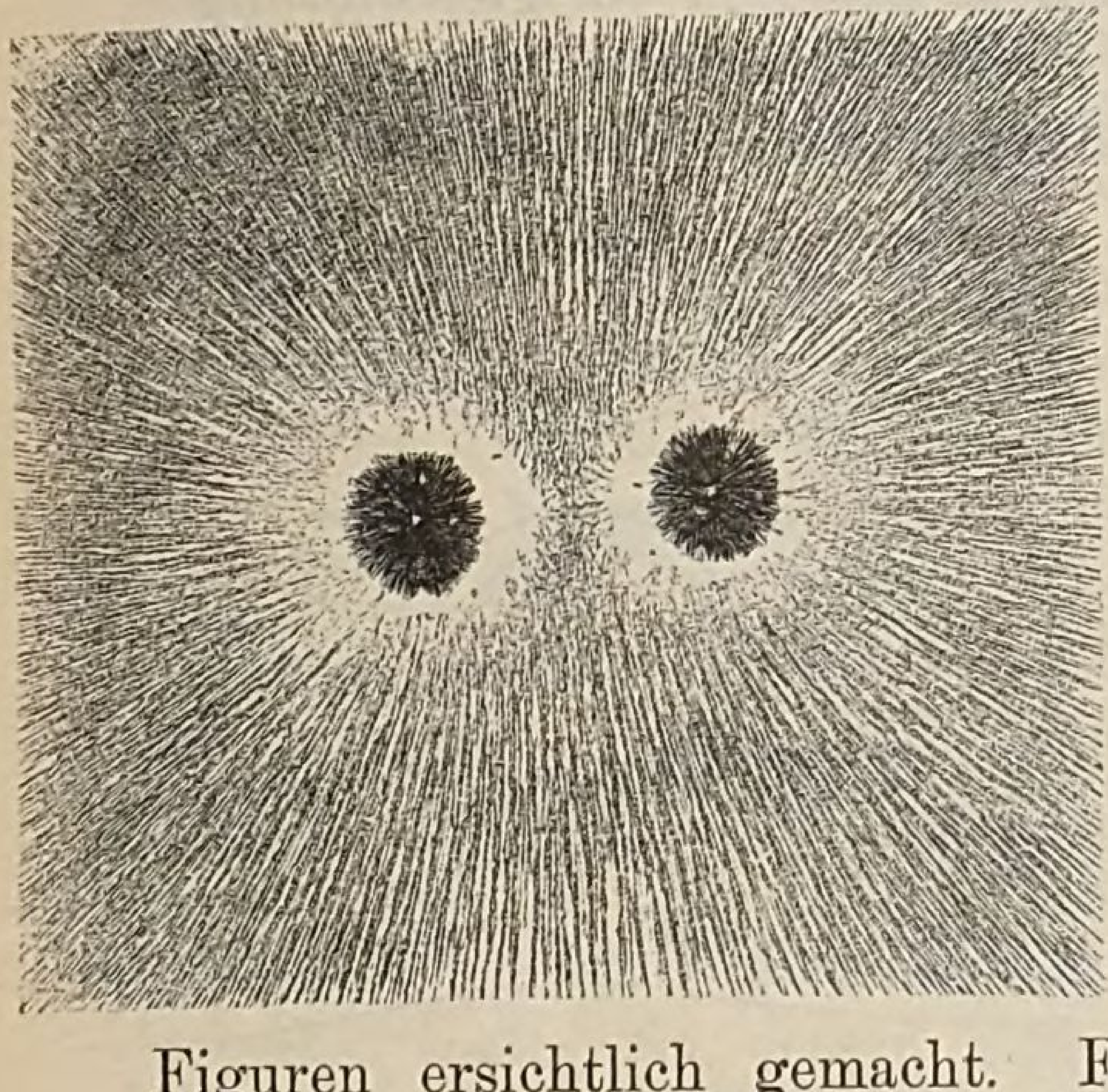
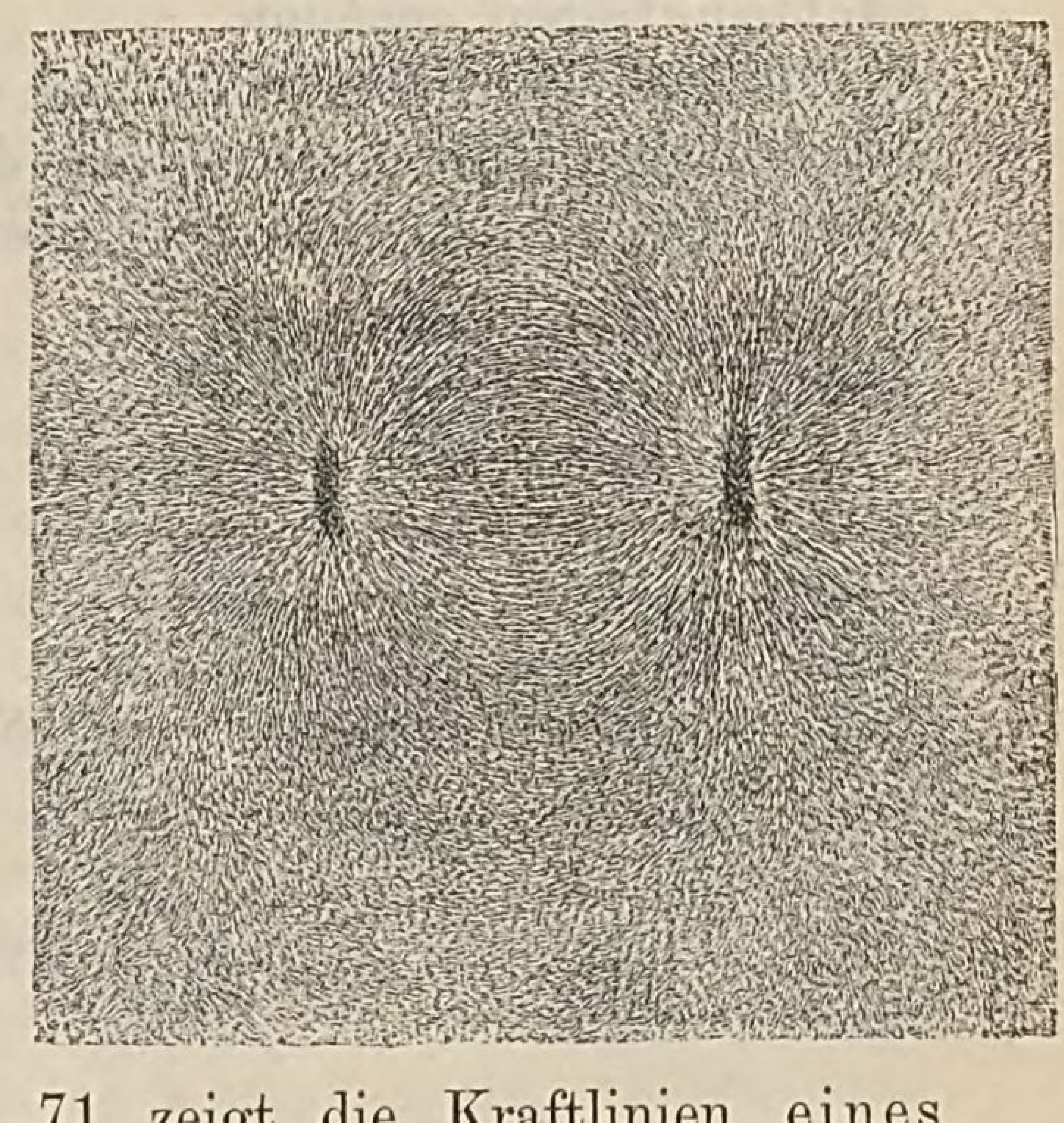


Fig. 74.



Figuren ersichtlich gemacht. Fig. 71 zeigt die Kraftlinien eines magnetischen Poles, Fig. 72 die zweier ungleichnamigen Pole, Fig. 73 die zweier gleichnamigen Pole und Fig. 74 die Kraftlinien eines vollständigen Magnetes[1]).

1) Wüllner's Lehrb. d. Physik. Elektricität. S. 108.

Von einem Pole mit der magnetischen Masse m denkt man sich m Kraftröhren oder Kraftfäden, nach allen Richtungen gleichmässig vertheilt, ausgehen. Ein Flächenstück einer concentrischen Kugelfläche mit dem Halbmesser r wird alsdann von $(S/r^2) \cdot (m/4\pi)$ Kraftfäden getroffen. Da der Ausdruck Sm/r^2 die Kraftströmung durch S angibt, so nimmt man auch diesen Wert als Zahl der Kraftröhren an. Nach dieser Zählungsmethode entspricht der magnetischen Masse $1/4\pi$ eine Kraftröhre und daher der Masse m die Zahl von $4\pi m$ Kraftröhren. Wie die Darstellung der magnetischen Kraftlinien (§ 106) zeigt, bringen die magnetischen Kräfte im Felde thatsächlich eine Wirkung hervor, ebenso wie die elektrischen Kräfte, indem sie magnetisierbare Stoffe magnetisieren; man nennt den Vorgang magnetische Influenz oder magnetische Induction. Wird die Fläche eines Stückes Eisen im magnetischen Felde von einer Anzahl Kraftfäden getroffen, so wird dieselbe entgegengesetzt magnetisch wie die Stelle des Magnetes, von der die betreffenden Kraftlinien ausgehen, und zwar gleich stark. Ebenso wie bei den elektrischen Kraftfäden, ist auch bei den magnetischen die algebraische Summe der Massen an den Endflächen gleich Null. Diese Thatsache steht im innigen Zusammenhange damit, dass der Kraftfluss in allen Querschnitten der Kraftröhre eine constante Grösse ist. Die Menge des durch Induction erzeugten Magnetismus kann demnach durch die Anzahl der auftreffenden Kraftfäden bestimmt werden, und diese werden auch Inductionsfäden genannt.

Bringt man einen Stab aus weichem Eisen in ein gleichförmiges magnetisches Feld, in welchem die Kraftlinien mit einander parallel laufen, z. B. zwischen die Polplatten eines kräftigen Magnetes (Fig. 75),

Fig. 75.

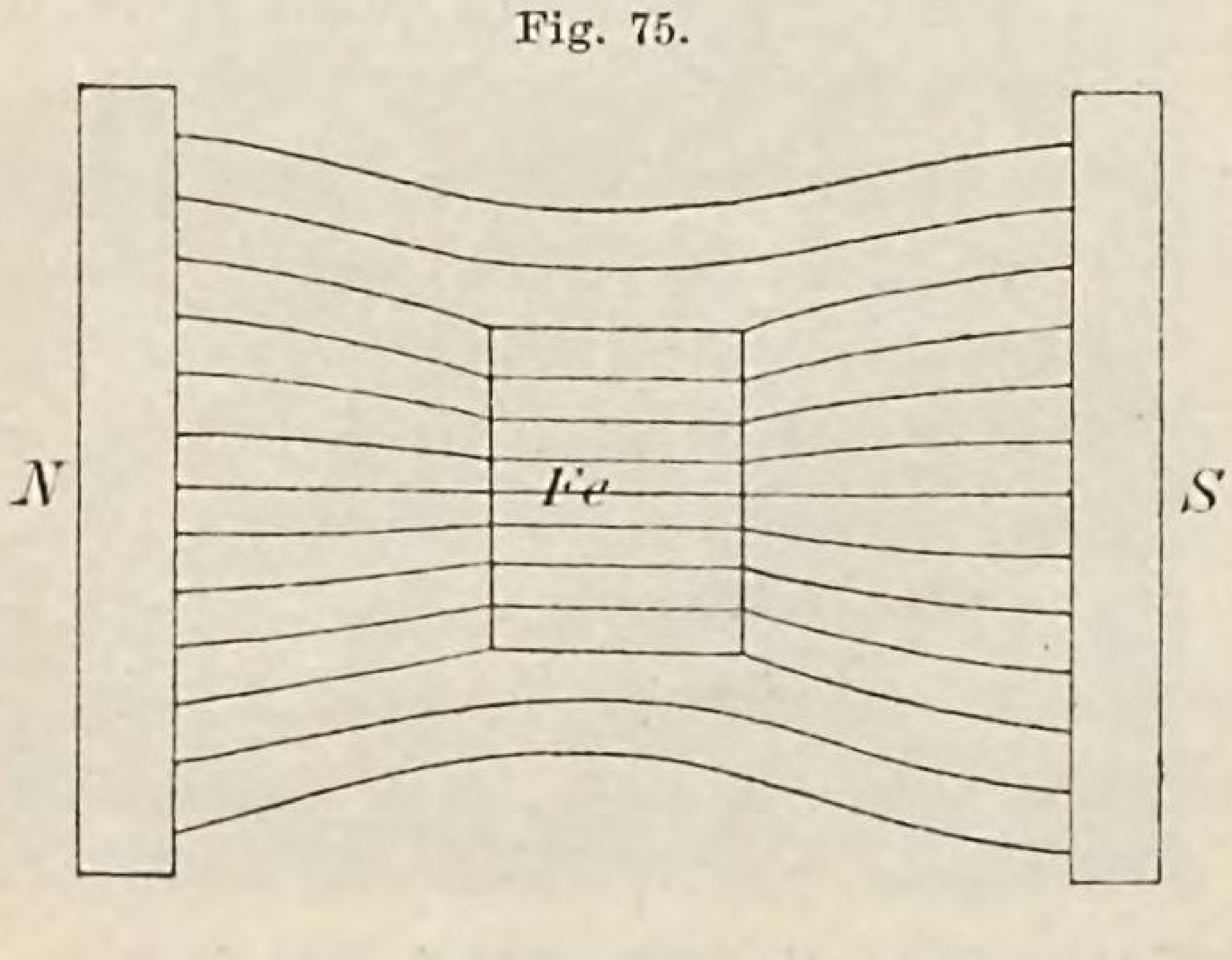
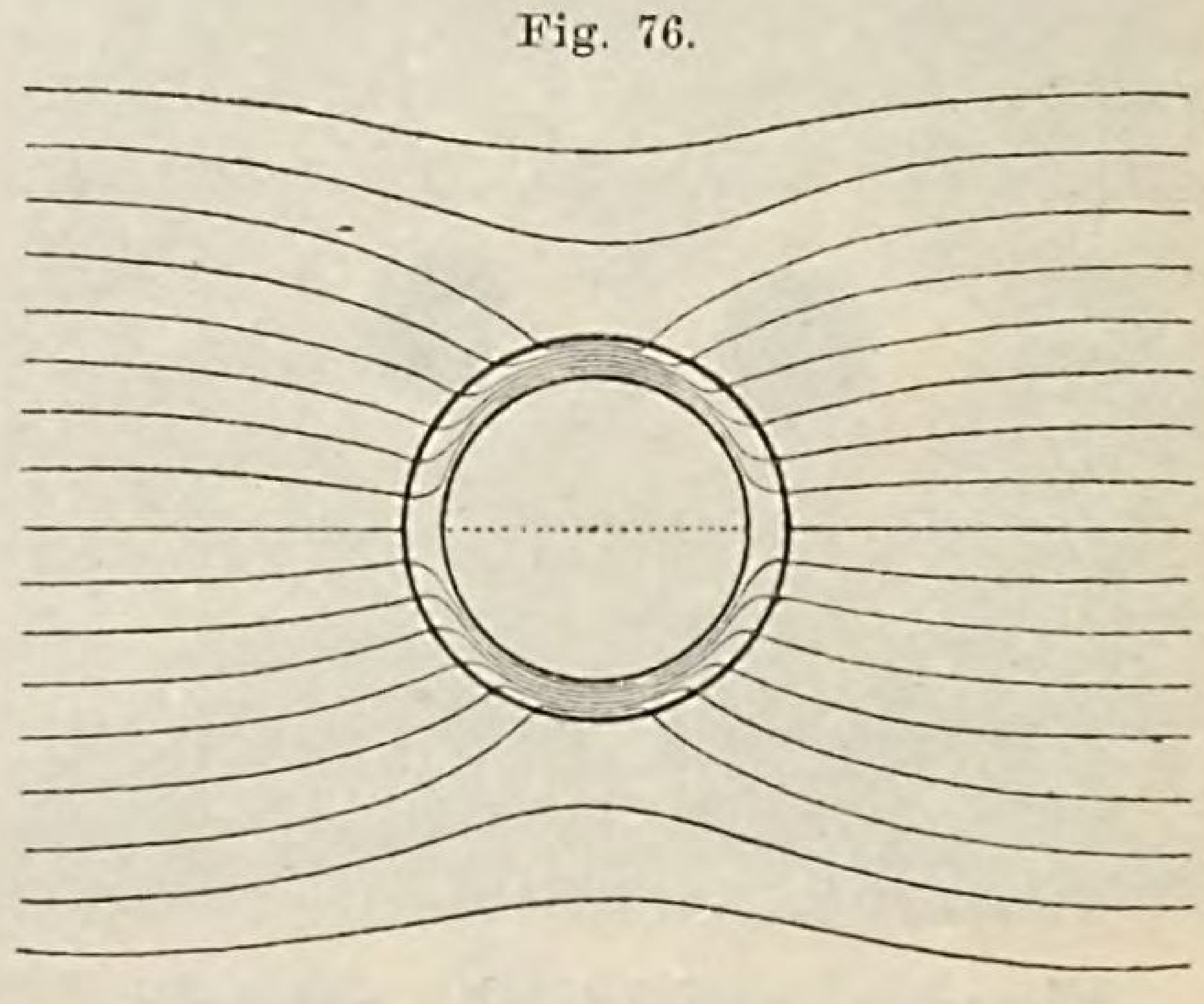


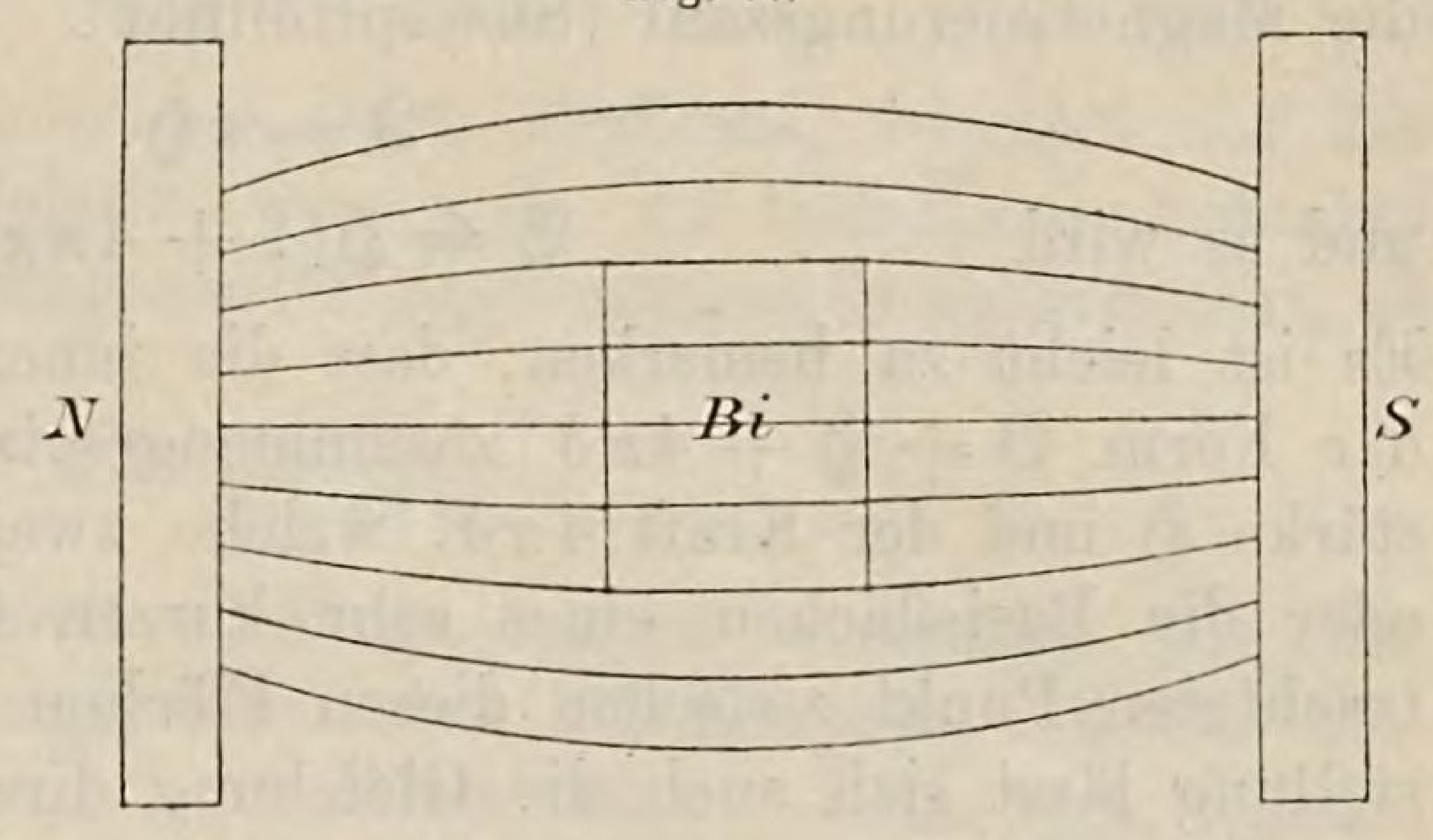
Fig. 76.



so sammelt das Eisen die Kraftlinien oder verdichtet sie, und führt sie in grösserer Zahl durch sich hindurch, als es im freien Raume der Fall wäre; man spricht deshalb von einer grösseren Durchlässigkeit des Eisens für Kraftlinien. Infolge dieses Verhaltens ist das Eisen auch geeignet, als Schirm gegen magnetische Wirkungen im

magnetischen Kraftfelde zu dienen: Ein Eisenrohr im magnetischen Felde (Fig. 76) verdichtet die Kraftlinien seiner Umgebung, führt sie in seiner Wand fort und lässt keine in den inneren Hohlraum dringen. Von solcher Schirmwirkung des Eisens wird Anwendung gemacht, um Galvanometer vor störenden magnetischen Einflüssen zu schützen. Ein diamagnetischer Körper, z. B. Wismut übt im magnetischen Felde eine zerstreuende Wirkung auf die Kraftlinien aus (Fig. 77). — Aus Fig. 75 ist ersichtlich, dass die in einen Eisenstab eintretenden Kraftlinien denselben durchsetzen, dass der Eisenstab somit auch das Verhalten der Kraftlinien zu untersuchen gestattet. Zunächst ist zu erkennen, dass die Endflächen gleich stark und entgegengesetzt magnetisch werden. Weiter zeigt sich, dass zwei neben einander aufgehängte Stäbchen im magnetischen Felde einander abstossen. Faraday folgerte daraus, dass ein Querdruck zu den Kraftlinien bestehe, während infolge des Bestrebens der Kraftlinien, sich zu verkürzen, längs der Kraftlinie eine Zugspannung vorhanden sei. Diese Zug- und Druckspannungen im magnetischen Felde ermöglichen es, die in demselben vorkommenden Erscheinungen mechanisch zu erklären. Ein anschauliches Bild für solche Spannungszustände wurde in der Elasticitätslehre (§ 53b und c, S. 185) angegeben.

Fig. 77.



b) Coefficient der Magnetisierung (Susceptibilität oder Aufnahmsfähigkeit der Kraftlinien) und Inductionsconstante (Permeabilität, Leitfähigkeit oder Durchlässigkeit für Kraftlinien). Diamagnetismus. Um die Stärke der Magnetisierung zu bestimmen, kann man die in § 98c entwickelte Beziehung zwischen Masse und Kraftströmung benützen. Wir betrachten einen Eisenkörper, welcher im magnetischen Felde homogen magnetisiert worden sei. Die nordmagnetische Seite habe magnetische Masse von der Flächendichte δ. Im Inneren ist die Dichte des freien Magnetismus gleich Null. Schliessen wir ein Flächenelement der Polfläche in einen entsprechend langen Cylinder ein, dessen Erzeugenden normal zu dem Oberflächenelemente, also parallel den Kraftlinien im Eisen sind, so gilt für die magnetische Masse auf der Flächeneinheit innerhalb des Cylinders

$$4\pi\delta = \mathfrak{B} - \mathfrak{H},$$

wenn $\mathfrak{B}$ die Kraftströmung durch die Cylinderbasis im Eisen und $\mathfrak{H}$

die eintretende Kraftströmung des durch das Eisen noch nicht beeinflussten Feldes bedeuten.

Für δ setzt man auch die Stärke der Magnetisierung $\mathfrak{J}$. Nach F. Neumann (1848) setzt man diese proportional der Intensität des magnetischen Feldes $\mathfrak{H}$ und nennt den Proportionalitätsfactor $\varkappa$ die Magnetisierungszahl (Susceptibilität). Darnach ist

$$\mathfrak{J} = \varkappa \mathfrak{H},$$

und es wird

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H}(1 + 4\pi\varkappa).$$

Es ist leicht zu bemerken, dass die innere magnetische Kraft $\mathfrak{B}$ in der Form $\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\delta$ zusammengesetzt erscheint aus der Feldstärke $\mathfrak{H}$ und der Kraft $4\pi\delta$, welche zwei benachbarte Querschnitte oder die Basisflächen eines sehr kurzen Hohlcylinders auf den betrachteten Punkt zwischen diesen Flächen ausüben. Mit dieser Feststellung lässt sich auch die Gleichung direct begründen (§ 111b).

Der Factor bei $\mathfrak{H}$, nämlich

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa,$$

heisst die magnetische Inductionsconstante oder nach Thomson Permeabilität. Durch μ wird die ganze durch Induction erzeugte Kraft $\mathfrak{B}$ bestimmt.

Der Coefficient der Magnetisierung $\varkappa$ ist um so grösser, je kleiner die Coërcitivkraft ist. Bei der Intensität des erdmagnetischen Feldes ist für weiches Eisen $\varkappa = 40$. Für Stahl schwanken die Werte je nach der Härte zwischen 10 und 35. Für die diamagnetischen Stoffe ist $\varkappa$ negativ, speciell für Wismut $= -1/400000$. Für Krystalle ist der Magnetisierungscoefficient nach den verschiedenen Achsenrichtungen verschieden.

Aus genauen Versuchen geht hervor, dass bei der Magnetisierung $\varkappa$ zuerst constant ist, bei weiterem Anwachsen der magnetischen Kraft aber abnimmt und dann gleich Null wird. Die Magnetisierungsintensität erreicht nämlich einen Maximalwert.

Der Wert von μ beträgt für weiches Eisen höchstens 3000; für diamagnetische Stoffe wird er wegen des geringen negativen Wertes von $\varkappa$ niemals negativ. Für Luft ist $\mu = 1$[1]).

Befindet sich ein zu magnetisierender Körper mit der Inductionsconstanten μ_1 in einem homogenen magnetischen Felde eines Mittels, dessen Inductionsconstante μ_2 ist, dann ist der Magnetisierungscoefficient $\varkappa$ von den Magnetisierungscoefficienten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ beider mit einander in Berührung stehender Stoffe abhängig. Die betreffende Beziehung ergibt sich aus der Relation zwischen den Coefficienten der Magnetisierung und der Induction, nämlich aus

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa.$$

1) J. Wallentin, Moderne Elektrl. S. 251.

Die Kraftströmung in jedem Körper für sich wäre

$$\mathfrak{H}_1 = \mu_1 \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{H}_2 = \mu_2 \mathfrak{H},$$

wenn $\mathfrak{H}$ die Feldintensität in der Luft angibt. Darnach ist

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \mathfrak{H}_2 = \mu \mathfrak{H}_2 .$$

μ ist die Inductionsconstante des einen Mediums, bezogen auf das andere. Werden in der Relation $\mu = \mu_1/\mu_2$ die Inductionsconstanten durch die entsprechenden Magnetisierungscoefficienten ausgedrückt, so erhält man

$$\varkappa = \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{1 + 4\pi\varkappa_2} .$$

Der Magnetisierungscoefficient $\varkappa$ hängt sonach wesentlich von der Differenz der Magnetisierungscoefficienten des Körpers und des umgebenden Mittels ab und wird mit dieser positiv, Null oder negativ. Jenachdem $\varkappa_1 \gtreqless \varkappa_2$, erscheint der Körper in seiner Umgebung paramagnetisch, neutral oder diamagnetisch; im letzteren Falle wird der Körper entgegengesetzt der Kraftwirkung magnetisiert und erfährt von dem Erreger des Kraftfeldes eine Abstossung.

Beobachtungen von Brugmans von Leyden (1778) haben gelehrt, dass ein Stück Wismut vom Magnete abgestossen wird, jene von Le Baillif und Becquerel (1827) ergaben dasselbe Resultat für Antimon. Durch Versuche von Faraday (1845) mit kräftigen Elektromagneten wurde von einer sehr grossen Anzahl von Körpern nachgewiesen, dass dieselben magnetisches Verhalten an den Tag legen, dass viele (Eisen, Nickel, Cobalt, Mangan, Platin u. a.) vom Magnete angezogen, andere dagegen (Wismut, Phosphor, Antimon, Zink, Quecksilber, Silber, Kupfer, Gold, Luft u. s. w.) abgestossen werden. Faraday nannte die ersteren Körper paramagnetisch, die letzteren diamagnetisch.

Schwach magnetische Körper verhalten sich in einem stärker magnetischen Mittel diamagnetisch: Eine schwache Lösung von Eisenchlorür in einer Glasröhre verhält sich in der Luft paramagnetisch; in einer stärkeren Lösung desselben Körpers, die zwischen den Polen eines kräftigen Elektromagnetes stärker magnetisch wird, zeigt die schwächere Lösung in der Glasröhre diamagnetisches Verhalten.

c) Gesetz des magnetischen Kreises. (Hopkinson und Kapp 1886.) Der Kraftlinienstrom, der von einem Magnet ausgeht, durchsetzt auch andere Körper im Felde und kehrt stets wieder zum ursprünglichen Magnet zurück, er bildet einen magnetischen Kreis. Die Inductionsröhren sind geschlossen, und alle Querschnitte einer Röhre werden von gleich viel Inductionslinien durchsetzt. Ist $\mathfrak{B}$ die Zahl der Inductionsfäden auf der Flächeneinheit, so ist das Product aus $\mathfrak{B}$ in den Querschnitt s der Röhre eine constante Grösse. Für den Inductionsfluss erhält man

$$\Phi = \mathfrak{B} \cdot s = \mu \cdot \mathfrak{H} \cdot s.$$

Setzt man für die Permeabilität oder Leitfähigkeit $\mu = 1/\nu$, so kann man ν als den specifisch magnetischen Widerstand bezeichnen; berücksichtigt man zudem auch die Länge l des magnetischen Kreises, so wird

$$\Phi = \frac{\mathfrak{H} \cdot l}{\left(\frac{\nu l}{s}\right)} = \frac{f}{\mathfrak{R}}.$$

f heisst magnetomotorische Kraft (analog der elektromotorischen Kraft) und $\mathfrak{R}$ der gesammte Widerstand des Kreises; demnach gilt das Gesetz: Der gesammte Inductionsfluss oder Kraftlinienstrom innerhalb einer Inductionsröhre ist gleich der magnetomotorischen Kraft dividiert durch den gesammten magnetischen Widerstand längs der Röhre. Das Gesetz ist dem Ohm'schen Gesetze des elektrischen Stromes analog.

Dim. $\Phi = L^{3/2} \cdot M^{1/2} \cdot T^{-1}$, Dim. $f = L^{1/2} \cdot M^{1/2} \cdot T^{-1}$, Dim. $\mathfrak{R} = L^{-1}$.

§ 113. **Magnetisierungsarbeit.** Wenn man ein Stück Stahl in ein magnetisches Feld bringt, so bilden sich sowohl in den Elementarmagneten, als auch im ganzen Felde magnetische Pole aus. Dazu ist eine Arbeit erforderlich, die in einer Deformation der Kraftlinien im Felde erkannt wird. Um diese Arbeit zu berechnen, bestimmen wir das Potential eines Elementarmagnetes von der Länge λ im magnetischen Felde. Die magnetischen Massen an den Endflächen seien beziehungsweise $\pm m$ und die Potentialwerte daselbst V' und V''. Dann ist der Energiewert

$$W = mV' - mV'' = m \cdot \Delta V$$

und die Änderung desselben

$$dW = \Delta V \cdot dm.$$

Ist nun in dem betreffenden Raumelemente die Feldstärke $\mathfrak{H}$, so ist $\Delta V = -\mathfrak{H}\lambda$ und auf jeder Polfläche σ die Menge

$$m = \sigma \cdot \frac{\mu}{4\pi} \mathfrak{H}.$$

Damit wird

$$dW = -\frac{\mu}{4\pi}(\sigma\lambda)\mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{H}$$

und für die Raumeinheit

$$W = -\frac{\mu}{8\pi} \cdot \mathfrak{H}^2 = -\frac{1}{8\pi} \cdot \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B}.$$

Die Energie ist daher dem Quadrate der Feldstärke proportional oder dem Producte aus der Feldstärke in die Anzahl der gesammelten magnetischen Kraftfäden dividiert durch 8π gleich. —

In welcher Weise diese Arbeit z. B. beim Magnetisieren durch Streichen zu leisten ist, wird durch Betrachtung des betreffenden

Vorganges ersichtlich. Würde man einen Eisenstab mit demselben Magnetpole immer erst nach einer und dann nach der entgegengesetzten Richtung bestreichen, so würden gleiche und entgegengesetzte magnetische Arbeiten geleistet, deren Wirkungen sich aufheben müssten. Man muss wiederholt nach einer und derselben Richtung streichen; dann bildet sich im Eisen an der Ansatzstelle ein mit dem streichenden gleichnamiger Pol und an der Abhebungsstelle ein ungleichnamiger Pol. Nach jedem Strich muss man den streichenden Pol von dem ungleichnamigen Pole des Eisenstabes wegziehen und nach Überheben der Mitte dem gleichnamigen Pole auf der anderen Seite nähern; dazu ist jedesmal eine Arbeitsleistung erforderlich. (Vgl. das Elektrisieren durch Influenz.)

Joubert hat gefunden, dass die Magnetisierungsarbeit für Stahl 120 000 bis 200 000 Erg und für weiches Eisen 10 000 bis 15 000 Erg für 1 cm^3 beträgt. Wird das Eisen wieder entmagnetisiert, so wird die Magnetisierungsarbeit in Wärme verwandelt. Mit Hilfe des specifischen Gewichtes des Eisens $= 7{\cdot}8$ gr, der specifischen Wärme $= 0{\cdot}11$ Cal. und der Grammcalorie $= 4{\cdot}19 \cdot 10^7$ Erg findet man, dass 1 Erg 1 cm^3 Eisen um $27 \cdot 10^{-9}$ ^{0} C erwärmt; darnach kann leicht die Erwärmung durch Magnetisierung berechnet werden. Auf der Magnetisierungsarbeit beruhen die pyromagnetischen Maschinen[1]).

1) Das Princip der pyromagnetischen Motoren siehe in Wallentins moderner Elektrl. S. 261.

VIII. Elektrischer Strom.

§ 114. **Grundversuche.** Die Erscheinungen, welche zur Kenntnis und Erzeugung eines andauernden elektrischen Stromes führten, wurden zufällig beim Experimentieren entdeckt; ihre Auswertung, durch welche die grossartigsten Errungenschaften für das wissenschaftliche und praktische Leben erzielt wurden, ist scharfsinnigen Beobachtern und genialen Denkern zu danken. Die Grundlage für die ganze Entwickelung legte Volta. Die Anregung wurde aber von anderer Seite gegeben.

Schon im Jahre 1678 zeigte Swammerdam dem Grossherzog von Toskana die Zusammenziehung eines Froschschenkels, die er dadurch hervorrief, dass er den Schenkelnerv mit Silberdraht umwickelte und alsdann den Muskel und den Draht durch eine kupferne Stütze in Verbindung brachte. Galvani, Professor der Anatomie in Bologna, machte die Beobachtung, dass die Schenkel von frisch getödteten Fröschen sich krampfhaft zusammenzogen, wenn in der Nähe eine Elektrisiermaschine entladen wurde. In der Absicht, Versuche über Luftelektricität anzustellen, wurde er (1789) auf Swammerdams Beobachtung geführt, von der er aber keine Kunde hatte. Er hieng enthäutete Froschschenkel mittelst kupferner Drähte an einem Eisengitter auf und bemerkte, dass dieselben jedesmal in Zuckungen geriethen, wenn sie das Eisen berührten. Galvani schrieb diese Erscheinung einer vom Thiere selbst erzeugten Elektricität zu, welche vom Nerven durch die Drähte zu den Muskeln übergehen sollte.

Volta, Professor der Physik an der Universität zu Pavia, erklärte jedoch (1793), dass die Elektricität nicht von den Muskeln oder den Nerven, sondern von der Berührung der ungleichen Metalle herrühre, und wies dies auf folgende Weise mittelst seines Condensator-Elektroskopes nach: Er nahm einen Metallstreifen, aus einem Kupfer- und einem Zinkstreifen zusammengelöthet, in eine Hand, berührte mit einem Ende des Streifens die untere Collectorplatte des Elektroskopes, und mit der anderen Hand leitete er die obere Condensatorplatte zur Erde ab; nach beendigter Berührung hob er die obere Platte ab und fand, dass die Goldblättchen auseinander flohen und einen elektrischen Zustand anzeigten. Einen weiteren Nachweis erbrachte Volta mittelst der nach ihm benannten Säule, die aus

einer Reihe von Plattenpaaren aus Zink und Kupfer besteht, zwischen welchen mit Salzlösung getränkte Filzlappen oder Löschpapiere liegen. Befindet sich an einem Ende eine Zinkplatte und am anderen eine Kupferplatte, so erscheint diese positiv und jene negativ elektrisch; bei einer entsprechenden Anzahl von Plattenpaaren erhält man bei gleichzeitiger Berührung beider Polplatten mit nassen Fingern einen kräftigen Schlag. —

Eine andere Zusammenstellung ist der Becherapparat, und zwar als einfaches Element und als Batterie. Das Element besteht aus einem Glasgefässe, gefüllt mit verdünnter Schwefelsäure, in die eine Zink- und eine Kupferplatte getaucht ist. Die letztere erscheint positiv, die erstere negativ elektrisch. Wenn man von je zwei nebeneinander stehenden Elementen die ungleichartigen Platten durch Leitungsdrähte verbindet, so erhält man eine Batterie. Dieselbe ist nur eine andere Form der Volta'schen Säule.

Mit diesen Zusammenstellungen waren auch die Mittel zur Erzeugung eines andauernden Stromes gegeben. Die Metallplatten der Elemente und die End- oder Polplatten der Batterie sind ungleichnamig elektrisch und besitzen verschiedene Elektricitätsgrade oder Potentiale; nach ihrer Verbindung durch einen Draht sucht die Elektricität die Potentialdifferenz auszugleichen, es entsteht eine elektrische Strömung in ähnlicher Weise, wie ein Flüssigkeitsstrom, der durch ungleiche Höhen einer Flüssigkeit an verschiedenen Stellen derselben bedingt ist. Die elektrische Strömung dauert aber nicht eine sehr kurze Zeit, wie es bei der Entladung einer Leydener Flasche oder einer Elektrisiermaschine der Fall ist, sondern sie währt längere Zeit ununterbrochen, unter geeigneten Umständen beliebig lange.

Im elektrischen Strome werden fortgesetzt gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität, die an den Polen entwickelt wurden, neutralisiert, und es verschwindet damit die elektrische Energie. Es entsteht nun die Frage: welches ist die Quelle dieser Energie, welches sind ihre Factoren und wozu wird die Energie verbraucht? Diese Fragen sollen in den folgenden Paragraphen beantwortet werden.

§ 115. **Elektrische Energie. Elektromotorische Kraft.** a) Voltas Fundamentalversuch. Volta zeigte in der oben angegebenen Weise, dass bei der Berührung zweier verschiedener Metalle das eine positiv und das andere negativ elektrisch wird. Nach der Theorie der Fluida tritt dabei eine Trennung der sich neutralisierenden ungleichartigen Elektricitäten auf, die eine Elektricität begibt sich auf das eine, die andere auf das andere Metall. Die trennende Kraft heisst die elektromotorische Kraft; dieselbe wird durch die erzeugte Potentialdifferenz oder durch die für jede Elektricitätseinheit geleistete Arbeit bestimmt.

Volta fand ausserdem, dass die elektromotorische Kraft von der

Natur der Metalle abhängt, dass dieselbe z. B. zwischen Zink und Blei viel geringer ist, als zwischen Zink und Gold. Er vermochte, die Metalle in einer Reihe so zu ordnen, dass bei der Berührung zweier derselben das vorhergehende stets positiv und das nachfolgende negativ elektrisch wurde. Die Reihe lautet mit den von Ayrton und Perry bestimmten Potentialdifferenzen in Volt:

$$\underbrace{Zn, \quad Pb,}_{0{\cdot}210,} \underbrace{\quad Sn,}_{0.069,} \underbrace{\quad Fe,}_{0{\cdot}313,} \underbrace{\quad Cu,}_{0{\cdot}146,} \underbrace{\quad Pt,}_{0{\cdot}238,} \underbrace{\quad C}_{0{\cdot}113.}$$

Das für diese Reihe von Volta aufgestellte Gesetz kann so ausgesprochen werden: Die Potentialdifferenz zweier beliebiger Metalle ist gleich der Summe der Potentialdifferenzen der in der Reihe zwischen ihnen stehenden Metalle[1]).

Aus dem Gesetze geht hervor, dass in einem Leiterkreise, der nur aus Metallen gebildet wird, kein Strom entstehen kann; denn denken wir uns drei Metalle in Drahtform der Länge nach aneinander gereiht, so erkennen wir, dass den drei Metallen infolge der elektromotorischen Kräfte an den Contactstellen verschiedene Potentialwerte zukommen, z. B. V_1, V_2, V_3; bringt man nun die beiden Enden der verbundenen Drähte mit einander in Berührung, so macht sich an der Berührungsstelle zwischen dem ersten und dritten Metalle die Potentialdifferenz ($V_1 - V_3$) geltend; dieser wird aber nach Voltas Gesetz durch die elektromotorische Kraft an der Contactstelle das Gleichgewicht gehalten. Die Summe der elektromotorischen Kräfte aller drei Berührungsstellen ist

$$(V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + (V_3 - V_1) = 0 .$$

Wird eine Elektricitätseinheit im ganzen Leiterkreis herumgeführt, so ist die zu verrichtende Arbeit gleich Null; diesem Mangel jeglicher Leistung entspricht auch der Mangel einer Energiequelle. Umgekehrt kann nach dem Energieprincip aus dem Mangel einer Energiequelle auf die Leistungsunfähigkeit und daraus auf das Volta'sche Gesetz der Reihe „der Leiter erster Ordnung“ geschlossen werden.

Ein Leiterkreis, der nur aus Metallen zusammengesetzt ist, kann daher keinen elektrischen Strom und keine andauernden elektrischen Wirkungen hervorbringen.

Über das Wesen der elektromotorischen Kraft wurden verschiedene Hypothesen aufgestellt. Volta selbst hielt sie für eine beim Contacte zweier heterogener Metalle zur Geltung gelangende Kraft; er schrieb dieser die Wirkung zu, die er durch seine berühmten Versuche hervorrief. Aber schon Fabroni, ein Zeitgenosse Voltas, trat der Contacttheorie entgegen und sprach die Ansicht aus, dass ein chemischer Process die Quelle der elektrischen Energie sei, und

1) Silv. Thompson, Elektr. u. Magn. S. 74.

diese Ansicht wurde nachher von Delarive, Faraday, Becquerel u. a. Forschern vertreten und begründet. Es wurde nämlich nachgewiesen, dass die Volta'sche Reihe der Metalle zugleich die Reihenfolge der Metalle nach ihrer Oxydierbarkeit angibt, und dass die elektromotorische Kraft der Verbrennungswärme, d. i. der bei der Oxydation entwickelten Wärmemenge entspricht. Ausserdem spricht der von Pellat angestellte Versuch, durch welchen gezeigt wird, dass zwei Metallplatten auch ohne Berührung elektrisch werden, wenn sie nur einige Zeit einander nahe gegenüber gestellt werden, gegen die Contacttheorie.

Vom Standpunkte der chemischen Theorie wird nach F. Exner der Volta'sche Fundamentalversuch folgendermassen erklärt: Jedes unedle Metall wird an der Luft oxydiert; dabei wird das Metall negativ und die Oxydschichte positiv elektrisch. Die Elektricität des Metalls wird abgeleitet, während die Oxydschichte als schlechter Leiter ihre Ladung behält und auf andere ihr genäherte Metalle influenzierend wirkt. Darnach sind die positive Elektricität der Oxydschichte in einem Metalle und die Influenzelektricität erster Art eines berührenden zweiten Metalles die beiden durch Contact erzeugten Elektricitäten.

b) Voltas Element. Bei demselben taucht eine Zink- und eine Kupferplatte in verdünnte Schwefelsäure. Ist die Zinkplatte ganz rein oder gut amalgamiert, so wird sie negativ und die Kupferplatte positiv elektrisch. Wird durch einen Draht eine leitende Verbindung zwischen beiden Platten hergestellt, so beginnt alsbald ein chemischer Process im Elemente, und im Drahte ausserhalb kreist ein beständiger elektrischer Strom vom Kupfer zum Zink.

Um die Elektrisierung der Metalle zu erklären, nimmt man an, dass die Bestandtheile der Verbindung Schwefelsäure = $SO_4 H_2$ elektrisch geladen seien, und zwar SO_4 negativ und H_2 ebenso stark positiv. Die vollständige Verbindung erscheint in ihrer Wirkung nach aussen unelektrisch. Durch Zerlegung der Verbindung entstehen ihre elektrischen Bestandtheile im „activen Zustande". Durch Entziehung der elektrischen Ladung oder Absättigung, wobei sich entgegengesetzt elektrische Theilchen verbinden, werden dieselben „neutral".

Nach Schönbein besteht zwischen den Metallen und der Flüssigkeit eine „Tendenz zur chemischen Verbindung"; durch dieselbe wird eine Störung des chemischen und elektrischen Gleichgewichtes eingeleitet; es entsteht ein elektrisches Kraftfeld zwischen den Metallplatten, in welchem sich die elektrischen Molecüle (Ionen) nach den Kraftlinien bewegen, und zwar die negativen Molecüle SO_4 gegen das Zink und die positiven H_2-Molecüle gegen das Kupfer. An den Metallplatten selbst treten dann Influenzwirkungen auf. Die gegen die Zinkplatte herantretenden negativen SO_4-Molecüle elektrisieren jene

an der zugewandten Seite positiv und an der abgewandten negativ. Die negative Influenzelektricität zweiter Art muss eine Zuströmung von weiteren SO_4-Molecülen durch Abstossung verhindern, solange keine Ableitung durch einen Schliessungsdraht stattfindet. Chemisch reines Zink kann sich also in Schwefelsäure nicht auflösen. Findet die Ableitung der negativen Influenzelektricität des Zinkes durch den elektrischen Strom statt, dann verbinden sich Zn und SO_4 zu Zinksulfat. Die positive Elektricität der Kupferplatte für den elektrischen Strom wird durch Influenzwirkung des positiven H_2 hervorgebracht.

Die wirkende Kraft im Elemente ist die Intensität des elektrischen Feldes, welche den Flüssigkeitsdruck vermindert und die elektrischen Molecüle in ähnlicher Weise in Bewegung setzt, wie der Auftrieb die in eine Flüssigkeit getauchten Körper nach dem Archimedischen Principe. Besteht das Element aus zwei gleichen Metallplatten, und herrscht in einem Theile der Flüssigkeit ein osmotischer Druck als Überdruck, so kann dieser eine Molecularbewegung hervorbringen und nach Nernst und Helmholtz dazu benützt werden, die Grösse der elektromotorischen Kraft zu berechnen[1]). Zum Schlusse dieses Absatzes soll hierüber ein Beispiel angeführt werden.

Um zu zeigen, dass der chemische Process auch die elektrische Energie liefert, betrachten wir einen unreinen Zinkstab in Schwefelsäure; die Verunreinigungen rühren von anhaftenden Eisentheilchen und anderen Stofftheilchen her. Diese Theilchen ersetzen hier die im Voltaelemente befindliche Kupferplatte; es erfolgt eine Auflösung des Zinkes in Schwefelsäure, und gleichzeitig finden auch die bereits angegebenen elektrischen Wirkungen statt. Die negative Influenzelektricität zweiter Art des Zinkes und die positive des Wasserstoffes gelangen in den Eisentheilchen zum Ausgleich und entwickeln Wärme. Dieselbe Wärmemenge wird im äusseren Leitungsdrahte entwickelt, wenn die beiden Elektricitäten des Volta'schen Elementes durch den elektrischen Strom zum Ausgleich gelangen.

J. P. Favre stellte (1854) folgende Versuche an: Eine Volta'sche Batterie wurde in ein Calorimeter gebracht; dieselbe entwickelte, wenn keine Energie nach aussen trat, auf 1 Äquivalent Zink 188·0 Cal. Als in den Strom ein Voltameter mit verdünnter Schwefelsäure eingeschaltet wurde, betrug die Wärmeentwicklung nur 117·7 Cal., die fehlenden 70·3 Cal. waren zur Trennung des Wasserstoffes und Sauerstoffes verbraucht worden; die Verbrennungswärme des entwickelten Knallgases betrug 68·9 Cal. Als Kupfersulfat zwischen Kupferstäben sich im Voltameter befand, war die geleistete chemische Arbeit Null, und es wurden 187 Cal., also nahezu alle erforderlichen 188 Cal. Wärme erhalten.

1) W. Ostwald, Lehrb. d. allg. Chem. Bd. II, 1, Chem. Energetik. S. 825 ff.

Favre stellte auch eine Volta'sche Batterie aus Zink und Platin in verdünnter Schwefelsäure zusammen und brachte sie in ein Calorimeter. Die Metallplatten wurden durch verschieden lange Drähte ausserhalb des Calorimeters miteinander verbunden. Durch den chemischen Process in den Elementen wurde Wärme entwickelt; auf 1 g entwickelten Wasserstoff zeigte das Calorimeter 181 Cal., wenn kein Strom kreiste. Bei der Stromführung durch die verschiedenen Drähte wurden 131, 117, 104, 90, 84 Cal. entwickelt. Als aber die Versuche so wiederholt wurden, dass der eingeschaltete Platindraht gleichfalls sich im Calorimeter befand, so erwies sich die gesammte Wärmeentwickelung nahezu constant; sie betrug 181, 182, 182, 180, 181 Cal.

H. Jahn hat in neuerer Zeit mit verfeinerten Messungsmethoden ähnliche Versuche durchgeführt und dieselben Resultate erhalten[1]).

Der Zusammenhang des osmotischen Druckes mit der elektromotorischen Kraft ist am leichtesten ersichtlich bei einem elektrischen Strome, der durch Concentrationsunterschiede verursacht wird. Um nur das Princip dieser Beziehung anzugeben, betrachten wir ein Element mit zwei Kupferplatten in Kupfervitriollösung; neben einer Platte sei die Lösung mehr concentriert, als neben der anderen. Der Versuch zeigt, dass bei leitender Verbindung der Platten ausserhalb der Flüssigkeit ein elektrischer Strom fliesst vom Kupfer im concentrierten Theile zum Kupfer im verdünnten Theile der Lösung. In der verdünnten Lösung bildet sich Kupfersulfat, in der concentrierten wird Kupfer abgeschieden; es besteht also das Bestreben eines Ausgleichs des Concentrationsunterschiedes. Die betreffenden beiden chemischen Processe sind einander entgegengesetzt und bringen daher keine Energieänderung im Elemente hervor. Die bleibende Veränderung besteht darin, dass der verdünnte Theil der Lösung durch Aufnahme von Kupfersulfat mehr concentriert, und der andere Theil durch Fällung von Kupfer verdünnt wird; die Arbeit entspricht der Überführung von Kupfersalz aus der concentrierten Lösung mit höherem osmotischen Drucke in die verdünnte Lösung mit niederem Drucke. Sie ist nach dem Gesetze für den osmotischen Druck gegeben durch die Form $W = \int v \cdot dp = RT \log p_1/p_2$. Die entsprechende elektrische Arbeit, welche durch Überführung von Elektricität an den Molecülen geleistet wird, ist gleich dem Producte aus dem Potentialunterschiede oder der elektromotorischen Kraft in die transportierte Elektricitätsmenge e; daher besteht die Gleichung

$$V \cdot e = R \cdot T \cdot \log p_1 / p_2 ,$$

durch welche die elektromotorische Kraft bestimmt erscheint.

Ähnlich gestaltet sich die Theorie des Daniell'schen Elementes.

1) H. Jahn, Wied. A. 25, S. 49 u. 31, S. 925.

Der Lösungsdruck des Zinkes ist grösser als der des Kupfers. Für jedes in die Lösung eintretende Zinkmolecül wird ein Kupfermolecül ausgeschieden. Die Potentialdifferenz der dabei transportierten Elektricität entspricht dem Logarithmus aus dem Verhältnisse der Drücke der gelösten Salze.

Der Vorgang der Verwandlung chemischer Energie in elektrische ist nicht in allen Elementen so einfach; er wird meist dadurch compliciert, dass ausser einer chemischen Verbindung und Zersetzung derselben Stoffe noch andere Processe stattfinden, dass die Zersetzungsproducte auf die Metalle verschiedenartige elektrische und chemische Wirkungen ausüben, dass sich die Concentration der Flüssigkeit ändert, und dass in dieser Stoffe absorbiert sind, welche auf die Entwickelung und Bewegung der Elektricität Einfluss nehmen[1]). Alle diese Vorgänge sind auch von einer entsprechenden Änderung der Energie begleitet.

Aufg. 1. Zu erklären, warum die elektromotorische Kraft einer Batterie von *n* hintereinander geschalteter Elemente *n*mal so gross ist, als die eines Elementes. — (Anl.: In jedem Elemente erzeugt eine elektromotorische Kraft eine Potentialdifferenz, von der sich das eine Potential nach der einen und das andere Potential nach der anderen Seite des ganzen Leitungssystems ausbreitet.) **2.** Wie viel Daniell-Elemente wären erforderlich, um durch die Luft einen elektrischen Funken von 1 km Länge zu erzeugen? 1 Daniell habe die elektromotorische Kraft von 1·07 Volt, und 10000 Volt ergeben eine Funkenlänge von 1·369 cm. — (683 Mill. Elemente.) **3.** 24 gleiche Elemente sind in vier Reihen zu sechs Elementen parallel geschaltet. Wie verhält sich die elektromotorische Kraft dieser Batterie zu der eines Elementes? — (Die elektromotorische Kraft der Batterie ist 6mal grösser.) [Thompson.]

§ 116. **Elektrolyse. Stromstärke.** a) Im Jahre 1800 machten Carlisle und Nicholson die Entdeckung, dass sich der elektrische Strom durch Wasser leiten lässt, und dass derselbe bei seinem Durchgang einen Theil des Wassers in seine gasförmigen Bestandtheile zerlegt. Der Sauerstoff erschien in Form von Blasen an der Stelle, wo der Strom in die Flüssigkeit eintrat, und Wasserstoffblasen dort, wo der Strom die Flüssigkeit verliess. Es zeigte sich bald, dass eine grosse Zahl anderer Flüssigkeiten, besonders verdünnte Säuren und Lösungen metallischer Salze, auf ähnliche Weise zersetzt werden konnten, wenn man einen Strom durch dieselben sandte. Faraday nannte (1835) einen solchen Zersetzungsprocess durch den elektrischen Strom Elektrolyse und die zu zersetzenden Körper Elektrolyte. Die Enden des Zuleitungsdrahtes im Elektrolyt heissen Elektroden, und zwar die Eintrittstelle des Stromes Anode und die Austrittsstelle Kathode.

1) G. Wiedemann, Lehre v. d. Elektr. II. S. 865.

Die Erfahrung lehrt, dass dem Wasser einige Tropfen Schwefelsäure oder Salzsäure zugeführt werden müssen, um dasselbe zu zersetzen. Dabei verhält sich die Schwefelsäure wie ein Salz: An der Anode scheidet sich SO_4, an der Kathode H_2 aus. SO_4 zerfällt in O, der in Blasenform aufsteigt und in SO_3, welches sich mit H_2O zu SO_4H_2 verbindet. Die Wasserzersetzung erscheint hiernach als eine chemische Wirkung der vom Strom erzeugten Bestandtheile der Schwefelsäure, also als eine secundäre Wirkung des Stromes.

Aus einer Lösung von Kupfervitriol (SO_4Cu) wird SO_4 an der Anode und Cu an der Kathode entwickelt. Das erstere bildet mit einer Kupfer-Anode neues Kupfersulfat.

Die Molecüle oder Atome des Elektrolyten, welche theils zur Anode, theils zur Kathode wandern, nennt Faraday Ionen, und zwar beziehungsweise Anionen und Kathionen.

b) Zur Erklärung der Elektrolyse stellte Grotthuss (1805) folgende Hypothese auf: Die Molecüle des Elektrolyten sind aus entgegengesetzt elektrischen Atomen zusammengesetzt; zwischen den Elektroden ordnen sich dieselben parallel sowie die Elementarmagnete eines magnetischen Eisens, indem die elektronegativen Atome von der Anode und die elektropositiven von der Kathode angezogen werden. Die Atome in jedem Molecüle werden nun getrennt, die ungleichartigen neben einander befindlichen Atome treten wieder zu neuen Molecülen zusammen, die unmittelbar neben den Elektroden befindlichen Ionen aber werden frei oder verbinden sich mit den Elektrodenplatten und besorgen zugleich die dauernde Entladung der den Elektroden zugeführten Elektricitäten.

Clausius brachte (1857) die Theorie in Einklang mit seiner kinetischen Theorie der Flüssigkeiten, indem er annahm, dass die Molecüle nicht bloss um gewisse Gleichgewichtslagen oscillieren, sondern dass sie in veränderte und immer neue Lagen zu einander kommen, und dass sie auch in beständiger Zersetzung und Neubildung begriffen sind. Die Bewegungen gehen nach allen möglichen Richtungen vor sich. Unter dem Einfluss einer elektromotorischen Kraft werden jedoch die Bewegungen der elektrischen Atome gerichtet, nach der Anode, beziehungsweise der Kathode hingekehrt. Ist die elektromotorische Kraft stark genug, um die Wiedervereinigung der Atome zu hindern, so sammeln sich dieselben um die Elektroden an.

Die Theorie von Clausius ist gegenüber jener von Grotthuss mit der Erfahrungsthatsache im Einklange, dass auch der schwächste Strom eine Wanderung der Ionen im Elektrolyte zu erzielen imstande ist. Sie gewährt aber keine Vorstellung dafür, dass an der Anode in der Regel weniger Salzmolecüle als solche verschwinden, dass hier die Lösung concentrierter bleibt, als an der Kathode. Hittorf erklärte (1853—59) diese Concentrationsunterschiede durch die Verschiedenheit

der Wanderungsgeschwindigkeiten beider Ionen; das Geschwindigkeitsverhältnis wird durch das Verhältnis der Abnahme des Salzgehaltes an beiden Elektroden bestimmt. Aus der rascheren Verdünnung der meisten Lösungen an der Kathode wird geschlossen, dass das Anion sich in der Regel schneller bewegt als das Kathion.

Durch die selbständige Bewegung beider Ionen wird auch erklärt, dass der elektrische Strom im ganzen Raume des Elektrolyten zwischen den Elektroden fliesst, eine Thatsache, die durch alle Arten der Strommessung nachgewiesen werden kann.

In Verfolgung der Untersuchungen Hittorfs gelangte Kohlrausch (1879) zu dem Satze der unabhängigen Wanderung der Ionen, und Arrhenius erklärte (1887) die Bildung der elektrischen Ionen aus der Dissociation des im Wasser gelösten Salzes; der Nachweis dafür wurde durch Messung des osmotischen Druckes und Berechnung der Molecülzahl des Salzes in der Lösung mittelst des van't Hoff'schen Gesetzes geliefert; es ergab sich nämlich, dass die elektrolytischen wässerigen Lösungen immer mehr Molecüle enthalten, als dem Moleculargewichte und dem Volumen entspricht, d. h. dass die Molecüle dissociiert sein müssen[1]).

c) Die Gesetze der Elektrolyse hat Faraday (1833) aufgestellt. Werden in einen Stromkreis mehrere Wasserzersetzungsapparate von beliebiger Form eingeschaltet, so entstehen in allen Apparaten die gleichen Mengen Wasserstoff und Sauerstoff; daraus folgt: durch denselben elektrischen Strom oder durch gleiche Elektricitätsmengen werden in derselben Zeit auch gleiche Mengen desselben Elektrolyten zerlegt.

Wird derselbe Stromkreis zu gleichzeitiger Zersetzung von Wasser, Salzsäure und Ammoniak verwendet, so sind die Volumen des entwickelten Wasserstoffes in allen drei Apparaten dieselben und die damit verbundenen anderen Stoffmengen sind nach ihrer chemischen Äquivalenz ausgeschieden. Der Versuch ergibt den Satz: Die Elektrolyse verschiedener Stoffe durch denselben elektrischen Strom geschieht im Verhältnis der chemischen Äquivalente.

Beide Gesetze lassen sich aus der Wanderung der Ionen leicht erklären. Die Bewegung der elektrisch geladenen Ionen bildet selbst den elektrischen Strom. Je mehr Ionen in strömender Bewegung begriffen sind, desto stärker ist der Strom und desto bedeutender ist auch die Ausscheidung der Ionen an den Elektroden.

An die Vorstellung der bewegten elektrischen Atome lässt sich leicht der Begriff des Extensitätsfactors der Stromenergie anknüpfen. In der Elektrostatik erkannten wir die elektrische Ladung eines Conductors als den betreffenden Factor der Energie. Beim elektri-

1) W. Ostwald, Lehrb. d. allg. Chem., II, 1, chem. Energ. S. 655ff.

schen Strome ist er die während der Zeiteinheit durch einen bestimmten Querschnitt hindurchgehende Elektricitätsmenge; dieselbe führt den Namen Stromstärke oder Stromintensität. — Aus der Theorie der Wanderung der Ionen geht nun unmittelbar hervor, dass die Elektricitätsmenge der Anzahl der bewegten Ionen und somit die Stromstärke der chemischen Zerlegung proportional ist. Darauf beruht die Strommessung mittelst des Voltameters. In der Praxis wird die Elektrolyse verwendet zur Galvanoplastik, zur galvanischen Vergoldung, Versilberung, Metallochromie, Galvanographie u. s. w.

Aufg. 1. Wie gross ist die Arbeit, um 1 Coulomb = $3 \cdot 10^9$ e. s. E. von einer Elektrode eines Wasserzersetzungsapparates zur anderen zu führen, wenn die Potentialdifferenz beider Elektroden 1·47 Volt beträgt? 1 Volt = 1/300 elektrostatische Potentialeinheiten. —

$$(3 \cdot 10^9 \cdot 1{\cdot}47/300 = 147 \cdot 10^5 \text{ Erg} = 0{\cdot}149 \text{ kgm} = 0{\cdot}00035 \text{ Cal.})$$

2. Beim Verbrennen von 1 g Wasserstoff werden 34 Cal. Wärme entwickelt; welche Wasserstoffmenge wird durch die Arbeit des elektrischen Stromes nach der vorhergehenden Aufgabe ausgeschieden? — (1 Coulomb scheidet 0·0000103 g H aus. Diese Grösse heisst das elektrochemische Äquivalent.) **3.** 1 Coulomb (1 Ampère) scheidet in der Secunde 0·000010352 g Wasserstoff aus; wie gross ist die ausgeschiedene Sauerstoffmenge, wenn das Atomgewicht des Sauerstoffes 16 und dessen Wertigkeit 2 ist? — (0·000010352 · 16/2 = 0·00008282 g.) **4.** Wie gross ist das Gewicht und das Volumen des in einer Minute nach der vorhergehenden Aufgabe von 1 Ampère entwickelten Knallgases bei 0^0 C und 760 mm Druck? Die Dichten sind für H 0·0692, O 1·1056, spec. Gewicht der Luft 0·001293. — (0·00559 g und 10·44 cm³.) **5.** Welche Intensität hat ein Strom, der bei 15^0 C und 750·65 mm Barometerstand in einer Minute 55·8 cm³ Knallgas liefert? 1 Ampère entwickelt in 1 Min. 10·44 cm³ Knallgas. — ($v_0 = 750{\cdot}65 \cdot 55{\cdot}8 \cdot 273/760 \cdot (273 + 15) = 52{\cdot}29$ cm³. — $I = 5$ Ampère.) **6.** Welchen Raum nimmt das Knallgas, das von 18 Ampère in einer halben Minute entwickelt wird, bei 20^0 C und 775 mm Druck ein? 1 Ampère liefert in 1 Min. 10·44 cm³ Knallgas. — ($v_0 = 10{\cdot}44 \cdot 18/2 = 93{\cdot}96$ cm³ und $v_{20} = 293 \cdot 760 \cdot 93{\cdot}96/273 \cdot 775 \doteq 98{\cdot}9$ cm³.) **7.** Wie stark ist der Strom, der 0·5 g Wasser in 1 Min. zerlegt? Wie viel Coulomb müssen zu diesem Zwecke durch das Wasser geströmt sein? 1 Ampère zerlegt in 1 Min. 5·6 mg Wasser. — (89 Ampère und 89 · 60 = 5340 Coulomb.) **8.** Ein Strom von 5 Daniell-Elementen geht 10 Minuten lang durch eine Silberlösung. Die Stromstärke sei 5 Ampère. Wie gross ist das Gewicht des ausgeschiedenen Silbers? 1 Ampère entwickelt in 1 Sec. 0·000010352 g Wasserstoff und das Atomgewicht des Silbers ist 108. —

$$(0{\cdot}000010352 \cdot 108 \cdot 5 \cdot 60 \cdot 10 = 3{\cdot}354 \text{ g.})$$

9. Welche Stromstärke vermag 10 g Kupfer in einer halben Stunde niederzuschlagen? 1 Ampère liefert in 1 Min. 0·019687 g Cu. — (16·93 Ampère.) **10.** Ein Strom von 0·6 Ampère geht durch ein Silberbad, in welchem ein Gegenstand von 350 cm² Oberfläche versilbert werden soll. a) Wie dick wird die Silberschichte nach 3 Secunden sein? b) Nach welcher Zeit wird

sie 1 mm dick sein? Ein Ampère scheide in 1 Sec. 0·00112 g Ag aus. ($d = 55 \cdot 10^{-8}$ cm, $t = 6^d 8^h 8\frac{1}{3}^{min}$.) **11.** Um eine Gipsfigur zu verkupfern, mussten 128 g Kupfer niedergeschlagen werden. Wie viel Kupfersulfat, Zink und Schwefelsäure wird dazu in einer Daniell'schen Batterie verbraucht? Wie hoch kommt der Niederschlag zu stehen, wenn 1 kg Zn 2·40 K, Kupfersulfat 1·20 K und Schwefelsäure 48 h kostet? Das Atomgewicht $CuSO_4 = 63{\cdot}2 + 32 + 16 \cdot 4 = 159{\cdot}2$, Zn = 64·9 und $H_2SO_4 = 2 + 32 + 64 = 98$. — (Verbrauch von Kupfersulfat im Bade $(159{\cdot}2/63{\cdot}2) \cdot 128 = 322{\cdot}43$ g; eben soviel in der Batterie; somit 644·86 g. — Zn $64{\cdot}9 \cdot 128/63{\cdot}2 = 131{\cdot}44$ g. — SO_4H_2 $98 \cdot 128/63{\cdot}2 = 198{\cdot}48$ g. Die Materialien kosten $78 + 32 + 16 = 126$ h.) **12.** Zur Speisung einer Bogenlampe hat man 25 Bunsenelemente hintereinander geschaltet; der durch die Lampe gehende Strom hatte eine Stärke von 9 A. Wie hoch kommt der stündliche Betrieb dieser Lampe, wenn 1 kg Zink 2·40 K, 1 kg Schwefelsäure 48 h, 1 kg Salpetersäure 1·44 K kostet? Pro Ampère und Stunde werden in einem Elemente consumiert 1·456 g Zn, 1·832 g SO_4H_2 und 2·356 NO_3H. — (327·6 g Zn, 412·2 g SO_4H_2, 530·2 g NO_3H. Die Materialien kosten $78{\cdot}6 + 19{\cdot}8 + 76{\cdot}4 = 174{\cdot}8$ h.) **13.** Faraday stellte einen Zink- und einen Platinstreifen in verdünnte Schwefelsäure. Nach etwa 10 Min. constatierte er einen Verlust an dem Gewichte des Zinks von 0·552 g; zugleich ergab sich ein Wasserstoffvolumen am Platin von 199·2 cm^3. Wie gross ergibt sich hieraus das Atomgewicht des Zinks? Die Dampfdichte des Wasserstoffes ist 0.0692, das spec. Gewicht der Luft = 0·001293. — (199·2 cm^3 H wägen 0·01782 g, und 1 g H entsprechen 32 g Zn. Genauere Methoden liefern 32·5 als Atomgewicht des Zinks.) **14.** Wenn 1 Coulomb 0·000010352 g H zu erzeugen vermag, wie viel Coulomb erfordert 1 g H, und welche Arbeit ist bei einer Potentialdifferenz von 1 Volt zu dieser Bildung nothwendig? 1 Coulomb $= 3 \cdot 10^9$, 1 Volt = 1/300 elektrostat. Einheiten. — (96620 Coulomb, $966 \cdot 10^9$ Erg.) — **15.** Wenn ein H-Ion bei seiner Wanderung eine constante Geschwindigkeit von 0·003 cm besitzt, wie gross ist die auf dasselbe wirkende Kraft mit Bezug auf das Ergebnis der vorhergehenden Aufgabe? — ($F = W/l = 966 \cdot 10^9/0{\cdot}003 = 322 \cdot 10^{12}$ Dyn $= 33 \cdot 10^7$ kg. Die Kraft dient zur Überwindung der Bewegungshindernisse; dieselbe ist auch bei der Diffusion der Salze wirksam.) [Aufgaben 5—7 und 10—13 sind aus der Aufgabensammlung von E. Maiss.]

§ 117. **Polarisation der Elektroden. Secundärelemente. Accumulatoren.** a) Schaltet man in den elektrischen Strom einen Wasserzersetzungsapparat ein, so bemerkt man, dass mit der Anhäufung der Gasblasen an den Platinelektroden die Stromstärke abnimmt. Wenn man die Batterie rasch ausschaltet, so zeigt der stromanzeigende Apparat, ein Galvanometer, einen Strom an, welcher die entgegengesetzte Richtung des früheren Stromes hat. Die ausgeschiedenen Gase entwickeln also eine elektromotorische Kraft. Man nennt den Strom Polarisationsstrom und die Ursache desselben die Polarisation der Elektroden. Es ist durch Versuche dargethan worden, dass die elektromotorische Kraft des Polarisationsstromes mit

der des erregenden Stromes wächst, jedoch nur bis zu einem Maximum, das nicht überschritten wird. Wenn z. B. der erregende Strom die elektromotorische Kraft von 0·2, 1·03, 2·11, 2·54, 4·03 u. s. w. Daniells hatte, so war die des Polarisationsstromes 0·02, 1·03, 2·00, 2·03, 2·03 und blieb von da an constant. Es folgt daraus, dass eine Wasserzersetzung durch 1 oder 2 Daniell-Elemente nicht möglich ist; denn diese vermögen noch nicht die Polarisation zu überwinden. (Bekämpfung der Polarisation bei den constanten Elementen durch chemische Processe.)

b) Da der elektrolytische Apparat nach der Polarisation seiner Flüssigkeit einen Strom zu liefern imstande ist, so kann derselbe als Stromquelle benutzt werden. In dieser Verwendung heisst er Secundärelement, auch Polarisationselement oder Accumulator[1]).

Die ersten Versuche über die Verwendung eines elektrolytischen Apparates als Secundärelement rühren von J. W. Ritter her (1803); er wendete Platinplatten in verdünnter Schwefelsäure an und polarisierte und zersetzte diese durch einen eingeleiteten elektrischen Strom. Infolge des grossen Absorptionsvermögens des Platins für Wasserstoff wurde dieser nach seiner Ausscheidung aus der Flüssigkeit an der Kathode in grossen Mengen zurückgehalten und machte nach Ausschaltung der elektrischen Zelle einen lange anhaltenden, in entgegengesetzter Richtung kreisenden Polarisationsstrom möglich.

Gaston Planté stellte (1860) durch gründliche und umfassende Untersuchungen[2]) fest, dass das Blei der geeignetste Stoff für Secundärelemente sei. Er sandte durch eine Reihe von Bleiplatten in verdünnter Schwefelsäure längere Zeit einen elektrischen Strom und oxydierte so alle jene Platten, die als Anoden verwendet wurden. Die Kathodenplatten blieben unverändertes Blei. Beiderlei Platten entsprechend verbunden und in Schwefelsäure gesetzt gaben sein Secundärelement.

Faure hat (1881) die langsame Bildung der Elemente umgangen und ihre Leistungsfähigkeit dadurch vermehrt, dass er die Bleiplatten mit Mennige (Pb_2O_3) überzog und auf die so präparierten Platten in Schwefelsäure den Strom wirken liess. Dadurch wird das Wasser zersetzt, die Anode oxydiert zu Bleisuperoxyd (PbO_2) und die Kathode reduciert zu Bleioxyd (PbO). Wird dann der Apparat als Element benutzt, so geht der umgekehrte Process vor sich und die vorhin geleistete Arbeit wird durch die Energie der chemischen Rückbildung wieder gewonnen. Es bildet sich nämlich an beiden Platten Bleioxyd, das durch die Schwefelsäure in Bleisulfat umgewandelt wird.

1) Hauck, Galv. Batterien. Urbanitzky, Die elek. Beleucht. S. 97 etc.

2) G. Planté, Untersuchungen über Elektr. Deutsche Übersetzung von J. Wallentin.

Wegen localer Störungen, die bei den Secundärelementen noch häufig vorkommen, ist ihre Verwendung nicht so allgemein, wie es zu vermuthen wäre. So haben z. B. Gladstone und Tribe bei geladenen Elementen schädliche „locale Stromwirkungen“ nachgewiesen. Wenn die Schichte PbO_2 stärker als $\frac{1}{2}$ mm wird, so entstehen in derselben Risse und das metallische Blei tritt direct mit der Schwefelsäure in Berührung; die Platte selbst bildet nun ein Element, wodurch PbO_2 reduciert und Pb oxydiert wird.

In seiner Anordnung und Verwendung als Secundärelement gleicht der elektrolytische Apparat sehr einem Condensator[1]).

Heute werden gewöhnlich gitterförmige Bleielektroden benützt, in die ein Gemisch von Bleiglätte und Mennige fest eingepresst ist.

Nach Messungen von Allard, Joubert, Potier und Tresca lieferten 35 Accumulatoren des Systemes Faure, von denen jeder 43·7 kg wog und die elektromotorische Kraft von 2·1 Volt hatte, 619600 Coulomb; auf 1 kg des Elementes kommen daher 14179 Coulomb. Die verwendbare Energie ist

$$\frac{619600 \cdot 2{\cdot}1}{43{\cdot}7 \cdot 9{\cdot}81} = 3035 \text{ kgm.}$$

Es würden daher 89 kg erforderlich sein, um den Stundeneffect einer Pferdekraft zu erzielen.

§ 118. **Ohm'sches Gesetz** (1827). Dasselbe bringt eine Beziehung der Stromintensität zur elektromotorischen Kraft, also eine Beziehung beider Energiefactoren zum Ausdruck. Ohm stützte seine Ableitung auf eine Ähnlichkeit zwischen der Elektricitäts- und Wärmeleitung. Erfahrungsgemäss ist Wärmeleitung bedingt durch Temperaturdifferenzen in einem Wärmeleiter, und nach Fourier (1822) ist die in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt fliessende Wärme proportional der Temperaturdifferenz zweier benachbarter Querschnitte und der Grösse derselben, ferner umgekehrt proportional dem Abstande der Querschnitte. Die mathematische Form dieses Gesetzes stimmt mit jener für Flüssigkeitsströmungen in engen Röhrchen (§ 40) überein.

Behufs Ableitung des Ohm'schen Gesetzes denken wir uns zwei Querschnitte eines cylindrischen Leiters auf constanten Potentialen gehalten; die Potentialdifferenz sei $\varDelta V$; die Grösse der Querschnitte sei s, ihr Abstand λ. Dann ist die Stromstärke, d. i. die in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt fliessende Elektricitätsmenge

$$i = k \cdot s \cdot \frac{\varDelta V}{\lambda},$$

k ist ein Proportionalitätsfactor, dessen physikalische Bedeutung sich bald ergeben wird. Schreibt man die Gleichung in der Form

$$i \cdot \lambda = k \cdot s \cdot \varDelta V,$$

1) Maxwell, Lehrb. d. El. I. 407. G. Wiedemann, Lehre v. d. El. II. 758.

welche für ein Leiterelement von der Länge λ gilt, und summiert über die ganze Länge l, so erhält man das gesuchte Gesetz

$$i = \frac{V_1 - V_2}{\left(\frac{l}{ks}\right)} = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{E}{R}.$$

Da der Nenner R den Wert der Stromstärke vermindert, so heisst R der Widerstand des Leiters.

Das Ohm'sche Gesetz sagt aus, dass die Stromstärke i der elektromotorischen Kraft $(V_1 - V_2)$ direct und dem Leitungswiderstande R umgekehrt proportional sei.

Für $l = 1$ und $s = 1$ wird $R = 1/k$, d. i. der specifische Leitungswiderstand; k selbst heisst auch specifische Leitungsfähigkeit.

b) Mittelst des Ausdruckes für die Raumenergie, beziehungsweise mittelst der hydrostatischen Grundgleichung lässt sich, entsprechend den Ausführungen in § 100 d, das Gesetz wie folgt gewinnen: Wir nehmen in dem Drahte einen Spannungszustand an, der in einer elektrischen Verschiebung seinen Grund habe. In einem Raumelemente $dv = s \cdot dx$ ist die Raumenergie infolge des Spannungszustandes

$$dW = \frac{1}{2} \varkappa \cdot p \cdot dv = \varkappa \cdot 2\pi\delta^2 \cdot s \cdot dx.$$

Für die elektrostatische Spannung p wurde nach § 98 c der Wert $4\pi\delta^2$ gesetzt, wobei δ die elektrische Dichte in einem Querschnitte angibt. Durch Einführung der elektrischen Ladung eines Querschnittes, nämlich $q = s \cdot \delta$, wird

$$dW = \frac{2\pi\varkappa}{s} \cdot q^2 \cdot dx,$$

und die Arbeit für die Elektricitätseinheit in dem betreffenden Leiterelemente oder das Potential

$$dV = \frac{dW}{dq} = \frac{4\pi\varkappa}{s} \cdot q \cdot dx.$$

Findet die Ladung durch die Stromstärke i in der Zeit τ statt, so ist $q = i \cdot \tau$, und man erhält für

$$dV = \frac{4\pi\varkappa \cdot \tau}{s} \cdot i \cdot dx$$

und für den ganzen Leitungsdraht im stationären Zustande

$$V = \left(\frac{4\pi\varkappa \cdot \tau}{s} \cdot l\right) \cdot i = E.$$

Diese Form stimmt mit der obigen für das Ohm'sche Gesetz vollkommen überein. Wie dieselbe auch aus dem Elasticitätsgesetze gewonnen werden kann, soll bei der Ableitung des Joule'schen Gesetzes gezeigt werden.

c) Dass die Potentialänderung im Leitungsdrahte den betreffenden Strecken des Drahtes proportional ist, kann experimentell auf verschiedene Weisen nachgewiesen werden. — Nach Mascart verbindet man die Belegungen einer elektrisierten Flaschenbatterie durch eine mittelmässig leitende Schnur von 2—3 mm Dicke und 4—5 m Länge mit der Erde und hängt in gleichen Entfernungen Doppelpendel auf; man findet die Divergenz der Pendel um so grösser, je näher dieselben der Belegung der Batterie sind. Verbindet man die bestimmten Theilpunkte nach einander leitend mit einem Elektrometer, so lässt sich die behauptete Potentialänderung genau nachweisen.

Um den gleichmässigen Potentialabfall in einem langen, dünnen Leitungsdrahte, der vom positiven Pole einer galvanischen Batterie zur Erde führt, zu zeigen, kann man nach Latimer Clark die Punkte des Leitungsdrahtes bestimmen, deren Potentialwerte gleich dem von 1, 2, 3 Daniell-Elementen sind. Man verbindet den positiven Pol eines Daniell-Elementes, während der negative auch zur Erde abgeleitet ist, mit einem Punkte des zu untersuchenden Leitungsdrahtes und schaltet ein Galvanometer ein. Herrscht in dem betreffenden Punkte dasselbe Potential wie auf dem Pole des Daniell-Elementes, so fliesst von letzterem kein Strom. Der gesuchte Punkt lässt sich durch Verschiebung des Verbindungsdrahtes leicht finden. Benützt man dann anstatt eines Elementes deren zwei, die hintereinander geschaltet sind, so kann man auf dieselbe Weise auf dem zu untersuchenden Draht jenen Punkt bestimmen, dessen Potential gleich dem des positiven Poles einer Batterie von zwei Daniell-Elementen ist. Man findet diesen doppelt so weit von dem ersten Punkte der Erdleitung mit dem Nullpotentiale entfernt, als den Punkt mit dem Potential Eins[1]), u. s. w.

d) Sind in einem Stromkreise mehrere elektromotorische Kräfte, mehrere Elemente, und verschiedene Leitungswiderstände eingeschaltet, so gilt auch dann noch das Ohm'sche Gesetz. Die Stromstärke ist nämlich im ganzen Stromkreise dieselbe, und man kann für jeden Theil des Stromkreises, für welchen der Potentialfall geradlinig gedacht werden kann, das Ohm'sche Gesetz anwenden und schreiben

$$i \cdot R = E.$$

Da i constant ist, so erhält man durch Summierung über den ganzen Stromkreis

$$i \cdot \Sigma R = \Sigma E,$$

eine Form, welche wieder dem Ohm'schen Gesetz entspricht. Die Dimension der Stromstärke ist $\dim i = \dim Q/T = M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}$. Ferner ist $\dim V = M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}$, und nach Ohms Gesetz $\dim R = L^{-1} T$.

1) J. Wallentin, Moderne El. S. 140.

e) Die praktischen Einheiten bei der Anwendung des Ohmschen Gesetzes sind: Für die Stromstärke 1 Ampère, bei welcher 1 Coulomb $= 3 \cdot 10^9$ elektrostatische Elektricitätseinheiten in einer Secunde durch den Querschnitt fliesst, für die elektromotorische Kraft 1 Volt $= 1/300$ elektrostatische Potentialeinheiten und für den Widerstand 1 Ohm $= 10^9$ absolute Widerstandseinheiten als Widerstand, bei welchem die elektromotorische Kraft von 1 Volt die Stromstärke 1 Ampère liefert.

1 Volt kommt ungefähr der elektromotorischen Kraft eines Daniell-Elementes gleich; genauer ist 1 Daniell = 1·1 Volt. 1 Ohm Widerstand leistet eine Quecksilbersäule von 1 mm^2 Querschnitt und 106 cm Länge bei 0^0 C.

Der Widerstand von 1 cm^3 eines Körpers heisst specifischer Widerstand. In absoluten Einheiten, d. h. in Tausendmilliontel eines Ohm sind solche Widerstände für Silber 1609, Kupfer 1642, weiches Eisen 9827, Quecksilber 96146, Selen $6 \cdot 10^{13}$, Glas bei 200^0 C $2{\cdot}27 \cdot 10^{16}$, reines Wasser bei 22^0 C $7{\cdot}18 \cdot 10^{10}$ und verdünnte Schwefelsäure ($^1/_{12}$ Säure) $0{\cdot}332 \cdot 10^{10}$.

Über die Bestimmung einiger elektromotorischen Kräfte und Widerstände sollen in den folgenden Aufgaben noch einige Angaben gemacht werden. Hier sei nur noch bemerkt, dass je besser ein Körper die Wärme leitet, desto besser er auch die Elektricität leitet. Am besten leiten die Metalle, minder gut Flüssigkeiten; und Gase sind Nichtleiter. In Gasen findet leicht eine Entladung durch Convection statt; die Gastheilchen werden durch Berührung mit dem elektrischen Conductor elektrisiert und dann fortgeschleudert.

Das Ohm'sche Gesetz dient zur Bestimmung der Constanten der Elemente, zur Ermittelung der zweckmässigsten Verbindung der Elemente, zur Bestimmung der Leitungswiderstände, zur Ableitung der Kirchhoff'schen Gesetze der Stromverzweigung u. s. w.[1]).

Aufg. 1. Ein Bunsenelement gibt bei kurzem Stromschluss die Intensität i_1 (3·4 Ampère), bei Einschaltung eines Widerstandes r (0·5 Ohm) die Stromstärke i_2 (1·7 Ampère). Wie gross ist der Widerstand R und die elektromotorische Kraft E des Elementes? — (Aus den Gl. $E = i_1 R$ und $E = i_2(R + r)$ folgt $R = r i_2/(i_1 - i_2) = 0{\cdot}5$ Ohm und $E = 1{\cdot}7$ Volt.) **2.** In einen Stromkreis schaltet man zwei Elemente ein, deren elektromotorischen Kräfte zu vergleichen sind. Die Elemente werden das eine Mal im nämlichen Sinne, das andere Mal im umgekehrten Sinne eingeschaltet. Die Stromstärken seien i_1 und i_2; welches ist das Verhältnis der elektromotorischen Kräfte E_1 und E_2? — (Aus $R i_1 = E_1 + E_2$ und

1) Die Anwendung des Ohm'schen Gesetzes zur Ermittelung des Gesetzes für die Brechung der elektrischen Strom- und Kraftlinien, sowie die Ableitung desselben Gesetzes nach der Theorie der Ätherverschiebung siehe in meiner Schrift über das Energieprincip in der Elektricitätslehre S. 113.

$Ri_2 = E_1 - E_2$ folgt $E_1/E_2 = (i_1 + i_2)/(i_1 - i_2)$.) **3.** In einem Stromkreise war kein Strom, wenn 14 hintereinander geschalteten Daniell-Elementen 11 hintereinander geschaltete Leclanché-Elemente entgegengesetzt waren. Wie müssen sich die elektromotorischen Kräfte beider Elemente verhalten? — (Aus $R \cdot i = 14E_1 - 11E_2 = 0$ folgt $E_1/E_2 = 11/14$.) **4.** Ein Daniell-Element von 15 cm Höhe hat einen inneren Widerstand von 0·61 Ohm; wie gross ist dann der Widerstand eines 3 cm hohen und in seinen Querdimensionen entsprechend kleineren Elementes? Welche Stromstärken geben diese Elemente in einem Stromkreis, dessen äusserer Widerstand zu vernachlässigen ist? Die elektromotorischen Kräfte seien gleich 1 Volt. — ($R_2 = 0{\cdot}61 \cdot 5^2 = 15{\cdot}2$ Ohm; $i_1 = 1{\cdot}64$; $i_2 = 0{\cdot}06$ Ampère.) **5.** Ein Bunsenelement von 20 cm Höhe hat einen inneren Widerstand $R_1 = 0{\cdot}05$ Ohm. Wie gross wird der ungefähre Widerstand eines 13 cm hohen und eines 35 cm hohen Bunsenelementes sein, wenn auch die Breitendimensionen im Verhältnisse der Höhen stehen? — ($R_1 : R_2 : R_3 = 0{\cdot}05 : 0{\cdot}05(20/13)^2 : 0{\cdot}05(20/35)^2 = 0{\cdot}05 : 0{\cdot}12 : 0{\cdot}016$ Ohm.) **6.** In einem Stromkreise ist ein Normal-Daniell (1 Volt), ein Galvanometer und eine Quecksilbersäule von 1 mm^2 Querschnitt und 3 m Länge eingeschaltet; das Galvanometer zeigt einen Strom von 0·27 Ampère an. Wie gross ist der innere Widerstand des Elementes? Der Widerstand von 106 cm Quecksilbersäule = 1 Ohm. — (Aus $1 = 0{\cdot}27(R + 300/106)$ folgt $R = 0{\cdot}873$ Ohm.) **7.** Welchen Widerstand muss eine Edisonlampe haben, wenn sie ihre normale Leuchtkraft mit 0·74 Ampère und 52 Volt hat? — ($R = 70$ Ohm.) **8.** Wie vieler Elemente von 0·95 Volt bedarf es, wenn ein Telegraphierstrom 17 Milliampère stark sein muss, und wenn sowohl Spulen als Leitung 608 Ohm Widerstand haben? — (Aus $0{\cdot}017 \cdot 2 \cdot 608 = x \cdot 0{\cdot}95$ wird $x = 22$ Elemente.) **9.** Zwei Bogenlampen sind hintereinander geschaltet. Die Dynamomaschine hat 2·5 Ohm Widerstand und gibt 15 Ampère bei 330 Volt. Wie gross ist der scheinbare Widerstand einer Bogenlampe, wenn die Leitung 4 Ohm Widerstand hat? — ($330 = 15(2R + 2{\cdot}5 + 4)$ gibt $R = 7{\cdot}75$ Ohm.) **10.** Wenn der Widerstand von 32 km eines 4 mm dicken Telegraphendrahtes 250 Ohm beträgt, welchen Widerstand würde dann ein 2 mm dicker Draht derselben Länge haben? — ($250 : R = 2^2 : 4^2$; $R = 1000$ Ohm.) **11.** Zwei Messingdrähte sollen gleichen Widerstand haben. Der eine ist 0·5 m lang und 0·75 mm dick; der andere ist 18 m lang. Wie dick muss dieser sein? — (Aus $0{\cdot}5/0{\cdot}75^2 = 18/x^2$ wird $x = 4{\cdot}5$ mm.) **12.** Das atlantische Kabel vom Jahre 1866 hat eine Länge von 3000 km und eine Kupferseele von 5 mm Dicke. Wie gross ist dessen Widerstand? Ein Meter Kupferdraht von 1 mm Dicke hat 0·021 Ohm Widerstand. — (2520 Ohm.) **13.** Der auf eine Inductionsspule aufgewickelte dünnere Draht ist 0·2 mm dick und hat 100000 Ohm Widerstand. Wie lang ist dieser Kupferdraht? 1 m langer 1 mm dicker Draht habe 0·021 Ohm Widerstand. — ($l = 190476$ m.) **14.** Man gebe die allgemeine Formel an, durch welche die Stromstärke i als Function der n hintereinander geschalteten Elemente mit innerem Widerstande r, elektromotorischer Kraft e und dem äusseren Widerstande R dargestellt wird. — ($i = ne/(nr + R)$; wann wird i mit n grösser, und wann nicht?) **15.** Welche allgemeine Formel gibt die

Stromstärke i, wenn n gleiche Elemente von e elektromotorischer Kraft, r innerem und R äusserem Widerstande nebeneinander (parallel) geschaltet werden? — ($i = e/(R + r/n) = ne/(nR + r)$.) **16.** Wie lautet die allgemeine Bedingung, nach welcher die Stromstärke unverändert bleibt, ob die Elemente parallel oder hintereinander geschaltet seien? — (Nach Aufg. 14 und 15, wenn $R = r$.) **17.** Wie viele Reihen s von hintereinander geschalteten Elementen muss man aus n gleichen Elementen mit den Constanten e und r machen, um bei einem äusseren Widerstande R die grösste Stromstärke zu erzielen? — (Es ist

$$i = (e \cdot n/s)/[R + (r/s)(n/s)] = n \cdot s \cdot e/(s^2 R + nr).$$

Darnach wird $i_{\max} = (e/2)\sqrt{n/Rr}$, wenn $s = \sqrt{nr/R}$, oder wenn $R = nr/s^2$, d. h. wenn der äussere dem inneren Widerstande gleich ist.) **18.** Man verfügt über 40 Daniell'sche Elemente mit je $0{\cdot}3/3^2 \cdot 10^{11}$ innerem Widerstande; wie muss man dieselben schalten, um bei $3/3^2 \cdot 10^{11}$ elektrostat. Einheiten äusserem Widerstande die grösste Stromstärke zu erzielen? — (Aus $3/3^2 \cdot 10^{11} = (0{\cdot}3/3^2 \cdot 10^{11}) \cdot 40/s^2$ folgt $s = 2$; d. h. es sind 2 Reihen von 20 hintereinander geschalteten Elementen zu bilden.) **19.** Es sind 30 Planté'sche Elemente mit je $0{\cdot}05/3^2 \cdot 10^{11}$ elektrostat. Einheiten innerem Widerstande und je $2{\cdot}02/300$ elektrostat. Einheiten elektromotorischer Kraft hintereinander geschaltet; wie stark ist der Entladungsstrom, wenn der äussere Widerstand $8/3^2 \cdot 10^{11}$ elektrostat. Einh. beträgt? — ($i = 6{\cdot}37 \cdot 3 \cdot 10^9$ elektrostat. Einh.) — **20.** Zwischen zwei Punkten eines Stromkreises finden sich zwei Zweige mit den Widerständen r_1 und r_2; die gesammte durchfliessende Strommenge ist i. Welcher Strom fliesst in jedem der Zweige? — (Es ist $i = i_1 + i_2$ und nach Ohms Gesetz für die beiden Zweige $\Delta V = i_1 r_1 = i_2 r_2$ oder $i_1 r_1 - i_2 r_2 = 0$. Mit diesen von Kirchhoff angegebenen Gesetzen wird $i_1 = ir_2/(r_1 + r_2)$ und $i_2 = i \cdot r_1/(r_1 + r_2)$.) **21.** Eine Leitung verzweigt sich in zwei Zweige, deren Widerstände bezüglich r_1 und r_2 sind. Wie gross muss der Widerstand R sein, der, in die Hauptleitung eingeschaltet, die Widerstände r_1 und r_2 ersetzt? — (Aus $i = i_1 + i_2$ und $i_1 r_1 = i_2 r_2 = iR$ folgt $R = r_1 r_2/(r_1 + r_2)$ oder $1/R = 1/r_1 + 1/r_2$; allgemein gilt $1/R = \Sigma 1/r$ d. h.?) **22.** In einem Stromkreise sind zwei Glühlampen von 120 Ohm und 140 Ohm parallel eingeschaltet. Welchen Widerstand liefern sie im Stromkreise? — (64·6 Ohm.) **23.** Vier Drähte von 5·5, 18·0, 3·7 und 2·9 Ohm Widerstand sind parallel geschaltet; welchen Widerstand stellen sie dar? — (Nach Aufg. 21 ist

$$1/R = 1/5{\cdot}5 + 1/18 + 1/3{\cdot}7 + 1/2{\cdot}9 \text{ und } R = 1{\cdot}17 \text{ Ohm.})$$

24. Zwischen zwei Punkten einer Leitung sind acht Edinson-Lampen parallel eingeschaltet, von denen jede 120 Ohm Widerstand hat. Welcher Widerstand ist hierdurch in die Hauptleitung eingeschaltet? —

$$(R = \frac{120}{8} = 15 \text{ Ohm.})$$

25. Eine Dynamomaschine liefert den Strom zu 60 Edison-Lampen (zu 208 Ohm und 0·5 Ampère); die Lampen sind in 20 Reihen zu 3 ange-

ordnet; die Leitung hat 4·6 Ohm und die Dynamo 2·4 Ohm Widerstand. Wie gross ist die elektromotorische Kraft dieser Dynamo? —

$$(E = i \cdot R = 20 \cdot 0{\cdot}5 \cdot (2{\cdot}4 + 4{\cdot}6 + 3 \cdot 208/20) = 382 \text{ Volt.})$$

[R. Weber.]

§ 119. **Wärmewirkungen. Joule's Gesetz** (1841). a) Im elektrischen Strome verschwinden beständig die in der Batterie erzeugten Elektricitäten und damit auch die betreffenden elektrischen Energien. Wenn sonst im Kraftfelde des Stromes und im Stromkreise keine andere Arbeit geleistet wird, so wird die gesammte elektrische Energie in Wärme verwandelt, die sich im Leitungsdrahte nachweisen lässt. Um die Gesetze dieser Wärmeentwickelung zu finden, schalteten Joule und Lenz dünne, lange Drähte in die Leitung ein und führten dieselben in vielen Windungen durch ein mit Alkohol gefülltes Gefäss. Die in jedem Drahte entwickelte Wärme konnte durch die Temperaturerhöhung des Alkohols leicht bestimmt werden. Joule fand, dass die Zahl der Wärmeeinheiten proportional ist: 1) dem Widerstande des Leiters; 2) dem Quadrate der Stromstärke; 3) der Zeit, während welcher der Strom fliesst. In Form einer Gleichung lautet das Joule'sche Gesetz (in g-cal)

$$W = \frac{1}{4{\cdot}19} \cdot i^2 \cdot R \cdot t.$$

Theoretisch folgt das Gesetz leicht als Ausdruck für die elektrische Energie. Die Arbeit für jede im Strome von einem Pole zum anderen fliessende Elektricitätseinheit ist gegeben durch die Potentialdifferenz oder die elektromotorische Kraft E; die Arbeit für die in einer Secunde fliessende Elektricitätsmenge i ist $E \cdot i$ und mit Rücksicht auf das Ohm'sche Gesetz

$$W = E \cdot i \cdot t = i^2 \cdot R \cdot t.$$

Hierin sind alle Grössen in absoluten Einheiten ausgedrückt; um sie auf Ampère und Ohm zu reducieren, muss man sie mit $10^{-2} \cdot 10^9 = 10^7$ und um den ganzen Energiewert in Wärmeeinheiten auszudrücken mit $1/4{\cdot}19 = 0{\cdot}24$ multiplicieren.

Die zur Berechnung von W benützte Einheit von 1 kgcm im absoluten Masse wurde von Siemens 1 Joule und wird sonst ziemlich allgemein 1 Watt genannt. Gewöhnlich wird 1 g-cal äquivalent 0·425 kgm gesetzt; sie ist alsdann äquivalent mit 4·17 Joule oder Watt. Der Effect einer Batterie wird praktisch in Secunden-Watts gemessen, von welchen 736 eine Pferdekraft ausmachen.

Auf den Wärmewirkungen des elektrischen Stromes beruhen die Glühlichtlampen, die Sprengtechnik, die Galvanokaustik.

b) Auf sehr einfache Weise lässt sich das Joule'sche Gesetz nach der Theorie der elastischen Verschiebung ableiten[1]). Zu

1) Siehe meine Abhdlg. ü. d. Energ.-Prcp. i. d. El. S. 109. Vgl. auch oben § 53c.

dem Zwecke betrachten wir zwei Polplatten A und B, welche durch einen Leiter vom Querschnitte q in Verbindung gesetzt sind. Werden die Oberflächen der Pole durch eine elektromotorische Kraft verschoben, so setzt sich diese Verschiebung im Leiter fort, der den Raum des Leiters erfüllende elastische Äther wird in einen Spannungszustand versetzt und die Leitermolecüle werden durch Influenz elektrisch. Die ungleichartigen Elektricitäten der benachbarten Molecüle gleichen sich durch Leitung aus und die Spannung des Äthers wird sofort entsprechend abnehmen. Die elektromotorische Kraft wird jedoch den Verlust an Energie stets wieder ergänzen und den Zwangszustand herstellen. Dabei wird im Leiter fortgesetzt eine Arbeit geleistet, welche sich als Wärme wiederfindet.

Wir betrachten nun zwei unmittelbar aufeinander folgende Querschnitte des Leiters, deren Entfernung dl sei. Von dieser Schichte wird bei der Verschiebung eine Arbeit geleistet, die wir bestimmen. Ist die Grösse der Verschiebung σ, die geweckte elastische Kraft p und die Dichte des Mediums δ, dann ist die mittlere Kraft, welche während der Verschiebung wirkt,

$$p' = \frac{1}{2} p = \frac{1}{2} k\mu \cdot \sigma = \frac{1}{2} k(\delta \cdot s \cdot dl) \cdot \sigma .$$

Die Arbeit der Schichte ist:

$$w = p' \cdot \sigma = \frac{1}{2} k\delta \cdot s \cdot \sigma^2 \cdot dl .$$

Verbinden wir k mit δ oder setzen die Ätherdichte gleich Eins, dann gibt die Verschiebung eines Querschnittes die Elektricität daselbst an; daher ist

$$s \cdot \sigma = e,$$

und es wird

$$w = \frac{1}{2} \frac{k}{s} \cdot e^2 \cdot dl .$$

Für eine verschwindend kleine Änderung des elektrischen Zustandes ändert sich die Arbeit in der Schichte und die Elektricität nach der Gleichung

$$dw = \frac{k}{s} \cdot e \cdot de \cdot dl ,$$

daraus folgt

$$\left(\frac{dw}{de}\right) = \frac{k}{s} \cdot e \cdot dl .$$

Dies ist die Arbeit für die Elektricitätseinheit während des Durchströmens. Führt man für e die Stromintensität i, d. i. die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt strömende Elektricitätsmenge ein, setzt also $e = i \cdot \tau$, dann erhält man

$$\left(\frac{dw}{de}\right) = \frac{k\tau}{s} i \cdot dl$$

als Arbeitswert der Elektricitätseinheit. Die ganze Arbeit in der Schichte während der Zeiteinheit ist i-mal grösser und die Arbeit im ganzen Stromleiter wird

$$W = \int \frac{k\tau}{s} i^2 \cdot dl = \frac{k\tau}{s} \cdot i^2 \cdot \int dl = i^2 \cdot \frac{k \cdot l\tau}{s} \cdot$$

Setzt man noch für $k\tau \frac{l}{s} = R$ den Leitungswiderstand, dann erhält man für die Arbeit in der Zeiteinheit

$$W = i^2 \cdot R,$$

das Joule'sche Gesetz übereinstimmend mit der obigen Form desselben.

Der vorstehende Ausdruck gibt nur die Arbeit der elektrischen Kräfte im Inneren des Stromleiters an; derselbe setzt also voraus, dass die potentiellen Ladungsenergien der Pole und der elektrisch gewordenen Theilchen des Stromleiters in dem übrigen Raume zu der Stromarbeit nichts beiträgt, sondern constant erhalten bleibt. Diese Annahme wird zutreffen, solange die Strömung stationär ist; nicht aber zu Beginn beim Schliessen und am Ende beim Öffnen des Stromkreises. Beim Schliessen und Öffnen werden vielmehr die totalen Ladungsenergien des ganzen elektrischen Feldes in Betracht kommen; sie sind im ersten Falle durch die Arbeit des Stromes zu erzeugen, und im letzten Falle vermögen sie eine äquivalente Arbeit zu verrichten und die Wärme im Stromkreise zu vermehren. Die betreffenden Erscheinungen beim Schliessen und Öffnen des Stromes sind als Inductionsströme bekannt und heissen gewöhnlich Extraströme. Dieselben sollen in einem späteren Capitel behandelt werden.

c) Als eine allgemeine Anwendung des Joule'schen Gesetzes soll die Arbeitsleistung des elektrischen Stromes bei Parallelschaltung äusserer Widerstände berechnet werden[1]). Die Pole einer elektrischen Batterie seien durch n Leitungen mit den Widerständen $r_1, r_2, r_3, \cdots r_n$ verbunden; die elektromotorische Kraft sei E, der innere Widerstand r_0, die Stromstärke in den einzelnen Leitungen $i_1, i_2, i_3, \cdots i_n$.

Nun ist die gesammte Stromstärke

$$i = \Sigma i_x.$$

Ferner gilt für jede Leitung das Joule'sche Gesetz $E i_x = r_x i_x^2$, daher für alle Leitungen und die Batterie zusammen

$$E \Sigma i_x = \Sigma i_x^2 \cdot r_x + i^2 \cdot r_0.$$

Sind die einzelnen Stromintensitäten in den Zweigleitungen einander gleich, so ist $i = n \cdot i_x$; sind ferner auch die Widerstände gleich, nämlich $= r$, dann nimmt die Gleichung für die Arbeit die Form an

$$E \cdot i = i^2 \cdot \frac{r}{n} + i^2 \cdot r_0.$$

1) W. Müller, Zeitsch. f. phys. u. chem. Unterr. V. S. 81.

Das Glied für die Arbeit in den n Leitungen sagt aus, dass diese Arbeit gleich ist der Arbeit, welche die totale, von der Stromquelle erzeugte Intensität bei Überwindung des nten Theiles des Widerstandes r leistet. Sämmtliche n Leitungen können demnach auch als eine Leitung mit dem nten Theile des Widerstandes r betrachtet werden. Dieses Gesetz ist sofort klar, wenn man sich alle n Leitungsdrähte zu einem einzigen Drahte nebeneinander gelegt denkt; damit wird der Querschnitt des Leitungsdrahtes n mal vergrössert und somit der Widerstand auf den nten Theil vermindert.

Aufg. 1. Der Widerstand einer Drahtspule beträgt 35 Ohm; durch dieselbe fliesst ein Strom von 0·4 Ampère; welche Wärmemenge wird im Drahte in jeder Secunde erzeugt? — (1 Ampère erzeugt bei 1 Ohm in 1 Sec. 0·24 cal, daher $W = 0{\cdot}4^2 \cdot 35 \cdot 0{\cdot}24 = 1{\cdot}344$ cal.) **2.** Durch einen 900 m langen und 3 mm dicken Kupferdraht fliesst 4 Stunden lang der zur Speisung mehrerer Glühlampen erforderliche Strom von 14 Ampère. Welche Wärmemenge wird während dieser Zeit im Drahte erzeugt? Der Widerstand von 1 m Cu und 1 mm² Querschnitt sei 0·020 Ohm und die Wärme für 1 Volt 0·240 cal. —

$$(0{\cdot}24 \cdot 4 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 14^2 \cdot 0{\cdot}02 \cdot 900/\pi(9/4) = 1724900 \text{ cal} = 1724{\cdot}9 \text{ Cal.})$$

3. Eine Glühlampe von 55 Ohm Widerstand wird von einem Strome von 1·09 Ampère gespeist. Wie viel Wärme strahlt dieselbe stündlich aus, wenn 6% der Strahlung als Licht auftreten? — (Bei Vernachlässung der Leitungswärme wird ausgestrahlt $1{\cdot}09^2 \cdot 55 \cdot 60^2 \cdot 0{\cdot}24 = 56458{\cdot}5$ cal; davon erscheint als Licht $564{\cdot}585 \cdot 6 = 3387{\cdot}5$ cal und als Wärme 53071 cal.) **4.** Ein Platindraht von $d = 0{\cdot}01$ cm Dicke und $l = 2$ cm Länge wird durch einen Strom von $i = 0{\cdot}3$ Ampère 2 Sec. lang erwärmt. Welche Temperatur müsste er annehmen, wenn die erzeugte Wärme vollständig zu seiner Temperaturerhöhung verwendet würde, und wenn seine Anfangstemperatur 15° C war? 1 m Pt von 1 mm² Querschnitt bietet 0·156 Ohm Widerstand; seine spec. Wärme ist 0·032 und das spec. Gewicht 21·5. — (Die erzeugte Wärme ist

$$0{\cdot}24 \cdot 0{\cdot}3^2 \cdot 2 \cdot 0{\cdot}02 \cdot 0{\cdot}156/\pi \cdot 0{\cdot}05^2 = 0{\cdot}017161 \text{ cal.}$$

Zur Temperaturerhöhung wird gebraucht

$$\pi \cdot 0{\cdot}000025 \cdot 2 \cdot 21{\cdot}5 \cdot (T - 15) \cdot 0{\cdot}032 = (T - 15)0{\cdot}000108 \text{ cal.}$$

Aus $(T - 15)0{\cdot}000108 = 0{\cdot}017161$ folgt $T = 173{\cdot}9^0$ C.) **5.** Auf welcher Temperatur könnte hingegen durch den Strom der vorhergehenden Aufgabe der Platindraht höchstens erhalten werden, wenn die Wärmemenge, welches jedes cm² seiner Oberfläche bei 1° C Temperaturüberschuss über die Umgebung pro Secunde ausstrahlt, 1/5000 cal. beträgt? — (Die in 1 Sec. erzeugte Wärme $0{\cdot}017161/2$ muss der ausgestrahlten Wärme $(t - 15) \cdot \pi \cdot 0{\cdot}01 \cdot 2/5000$ gleich sein; darnach wird $t - 15 = 683^0$ C.) **6.** Welche Stromstärke ist nöthig, um einen 4 mm dicken Bleidraht bei einer Lufttemperatur von 20° C auf der Schmelztemperatur 334° C zu erhalten? Ausstrahlungscoefficient ist 1/120 cal. 1 m Pb von 1 mm² Querschnitt bietet 0·200 Ohm Widerstand. —

$(i^2 \cdot 0{\cdot}24 \cdot 0{\cdot}2/4\pi = (334 - 20)\pi \cdot 0{\cdot}4 \cdot 100/120.$ Daraus folgt $i = 293$ Ampère.) **7.** Die Bleisicherheitsstücke einer elektrischen Beleuchtungsanlage sind 3·2 cm breit, 0·3 cm dick und 7 cm lang. Bei welcher Stromstärke beginnt das Schmelzen der Stücke? Schmelztemperatur = 334° C, Ausstrahlungswärme pro Flächeneinheit, Temperaturgrad und Secunde ist 1/120. Lufttemperatur sei 20° C. —

$(i^2 \cdot 0{\cdot}24 \cdot 0{\cdot}2/32 \cdot 3 = (334 - 20) \cdot 2(3{\cdot}2 + 0{\cdot}3) \cdot 100/120, \; i = 1914$ A.)

8. Ein Blitz ist erfahrungsgemäss imstande, einen kupfernen Leitungsdraht von 5 mm² Querschnitt abzuschmelzen; seine mittlere Dauer hat sich aus stroboskopischen Versuchen zu 0·015 Sec. ergeben. Wie stark ist hiernach der durch den Draht fliessende Strom, und wie gross ist im Mittel die Ladung einer Gewitterwolke? Der Widerstand von 1 m Cu mit 1 mm² Querschnitt ist 0·020 Ohm. Spec. Gewicht des Kupfers = 8·9, spec. Wärme = 0·095, Schmelzpunkt 1100° C. Die Lufttemperatur sei 15° C. — $(i^2 \cdot 0{\cdot}24 \cdot 0{\cdot}015 \cdot 0{\cdot}02 \cdot l/5 = l \cdot 5 \cdot 8{\cdot}9 \cdot 0{\cdot}095(1100 - 15).$ Daraus ist $i = 17830$ Ampère. Ladung der Gewitterwolke

$$Q = 0{\cdot}015 \cdot 17830 = 267 \text{ Coulomb.)}$$

9. Die elektromotorische Kraft einer Batterie oder einer Dynamomaschine beträgt 140 Volt und der innere Widerstand 2 Ohm; wie viele parallel geschaltete Glühlampen von je 40 Ohm Widerstand und $^3/_4$ Ampère Stromstärke sind damit in Betrieb zu setzen? —

(Aus $140 \cdot x \cdot {}^3/_4 = (x \cdot {}^3/_4)^2 \cdot (40/x) + 2(x \cdot {}^3/_4)^2$ folgt $x = 73$.)

10. 10 Lampen von 20 Normalkerzen Lichtstärke erfordern, parallel geschaltet, bei einem Widerstande von je 70 Ohm einen Strom von je 0·8 Ampère. Wie viele Pferdestärken sind dazu nothwendig, wenn 736 Volt-Ampère = 1 Pferdekraft sind? — (0.61 Pferdekräfte.) **11.** Wie viele hintereinander geschaltete Accumulatoren von 2 Volt elektromotorischer Kraft und von 0·01 Ohm Widerstand sind erforderlich, um 20 parallel geschaltete Lampen von 50 Volt und 0·7 Ampère mit Strom zu versorgen? — (Aus $2 \cdot 20 \cdot 0{\cdot}7x = 50 \cdot 20 \cdot 0{\cdot}7 + 0{\cdot}01 \cdot (20 \cdot 0{\cdot}7)^2 x$ folgt $x = 26{\cdot}9$.) [Aufg. 1—8 sind von E. Maiss, 9—11 von W. Müller.]

§ 120. **Arbeitsmaximum einer Batterie.** Behufs Anwendung des Joule'schen Gesetzes soll noch folgende Aufgabe gelöst werden: Eine elektrische Batterie habe die elektromotorische Kraft E und erzeuge bei dem Vorhandensein eines Widerstandes R die Stromstärke I. Nun schalte man zum Zwecke einer Arbeitsleistung ein Voltameter ein. Die Arbeitsleistung sei W und die nunmehrige Stromstärke i. Unter welcher Bedingung wird die Arbeit den grössten Wert haben?

Die gesammte Arbeit des Stromes ist Ei; dieselbe besteht in der Erwärmung des Leitungsdrahtes $i^2 R$ und der Arbeit W; daher ist

$$Ei = Ri^2 + W$$

und

$$i = \frac{1}{2R}[E \pm \sqrt{E^2 - 4WR}].$$

Darnach wird W ein Maximum, wenn $E^2 = 4WR$ ist, also wenn

$$W = \frac{E^2}{4R} = \frac{RI^2}{4} \quad \text{und} \quad i = \frac{E}{2R} = \frac{1}{2}I,$$

d. h. die Batterie leistet die möglichst grösste Arbeit, wenn die Stromstärke die Hälfte von jener ist, welche die Batterie ohne die Arbeitsleistung im Stromkreis erzeugen würde, oder wenn die Nutzarbeit gleich der Hälfte der gesammten aufgewandten Arbeit ist. Das Güteverhältnis ist in diesem Falle $= 1/2$.

Wird mittelst einer Batterie, bestehend aus n ($= xy$) Elementen, von denen x Gruppen zu y parallel geschalteten Elementen zusammengestellt sind, das Arbeitsmaximum erzielt, so ist dieses für den Fall, als sich der Widerstand auf den inneren Widerstand der Batterie $R = r \cdot x/y$ beschränkt,

$$W = \frac{(xE)^2}{4R} = \frac{nE^2}{4r}.$$

Da für $n = 1$, $W = E^2/4r$ das Arbeitsmaximum ist, so folgt der Satz: Die grösste Arbeitsleistung einer Batterie ist bei jeder Schaltungsweise dem Producte aus dem Arbeitsmaximum eines Elementes und der Anzahl der Elemente gleich.

Die in Betrachtung gezogene Zusammenstellung von Batterie und Voltameter und die obige Energiegleichung lassen sich dazu verwenden, das Princip der elektrischen Kraftübertragung zu erläutern. Die elektrische Batterie vertritt eine elektrische Maschine, welche den Strom erzeugt, und das Voltameter ist an der Stelle einer Maschine, welche in Bewegung zu setzen ist. Das Voltameter erzeugt einen Polarisationsstrom mit der elektromotorischen Kraft E_1, welche jener der Batterie entgegengerichtet ist. Die Arbeit W besteht nun in der Überwindung der elektromotorischen Kraft E_1; es ist also $W = E_1 i$, und damit wird

$$Ei = E_1 i + Ri^2.$$

Das Güteverhältnis oder der ökonomische Coefficient ist

$$\frac{E_1 i}{Ei} = \frac{E_1}{E} = 1 - \frac{Ri}{E}.$$

Dieses Verhältnis wird umso grösser, je kleiner der letzte Bruch ist, also je kleiner Stromstärke und Leitungswiderstand und je grösser die elektromotorische Kraft der Stromquelle sind. Als Stromquelle eignen sich deshalb besonders Batterien mit vielen kleinplattigen Elementen oder eine entsprechende Zusammenstellung von mehreren Dynamos.

§ 121. **Thermoelektrische Ströme.** a) Seebeck machte im Jahre 1822 die Entdeckung, dass man in einem Leiterkreise, der aus zwei verschiedenen, an ihren Enden zusammengelötheten Metallen besteht, einen Strom erzeugen kann, wenn man eine Löthstelle erwärmt.

Wird ein Wismut- und ein Antimonstreifen zu einem solchen Leiterkreise verbunden und eine Löthstelle erwärmt, so kreist ein Strom, der an dieser Stelle die Richtung vom Wismut zum Antimon hat. Bei einer Abkühlung kreist ein Strom in der entgegengesetzten Richtung. Die Zusammenstellung heisst ein thermoelektrisches Element, der Strom ein thermoelektrischer Strom und die ihn erzeugende elektromotorische Kraft thermoelektrische Kraft.

Die Metalle aus der Reihe Bi, Pt, Cu, Hg, Pb, Sn, Au, Ag, Zn, Fe, Sb haben die Eigenschaft, dass, wenn zwei zu einem thermoelektrischen Elemente zusammengestellt werden, der Strom an der Erwärmungsstelle vom vorhergehenden zum nachfolgenden übergeht. Die elektromotorische Kraft ist unter sonst gleichen Umständen umso grösser, je weiter die Metalle in der Reihe von einander abstehen und je grösser die Temperaturdifferenz beider Löthstellen ist.

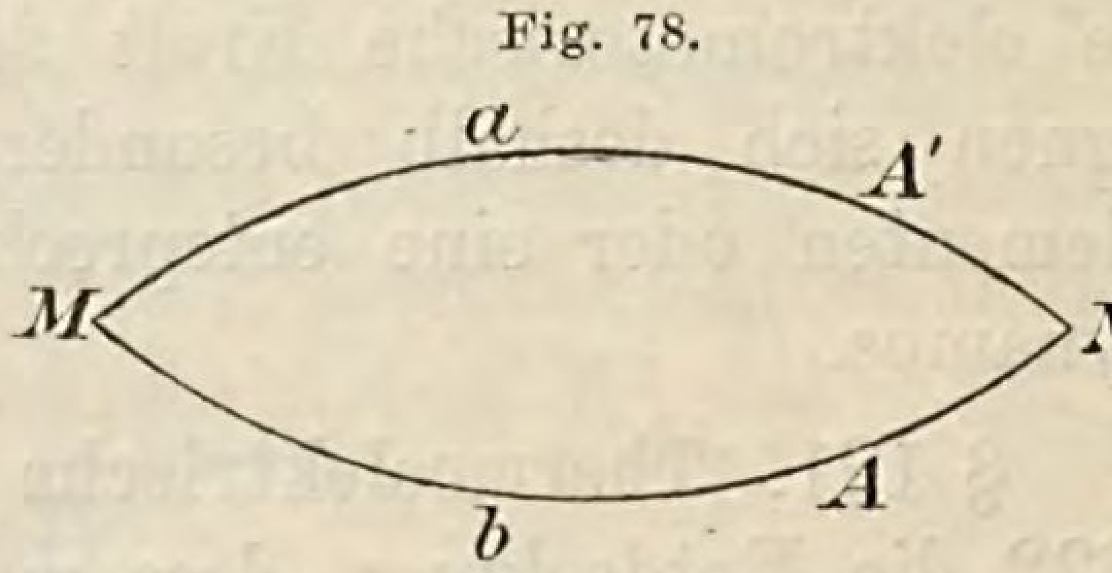
Cumming machte die Entdeckung, dass bei bedeutender Temperaturerhöhung die Stromrichtung im Thermoelemente sich umkehrt; wenn man eine Löthstelle eines aus Kupfer und Eisen bestehenden Elementes erwärmt, so fliesst an der Erwärmungsstelle der Strom vom Kupfer zum Eisen; bei 280° C hört der Strom auf; diese Temperatur bildet einen neutralen Punkt, und über derselben nimmt der Strom die entgegengesetzte Richtung.

b) Die Erklärung der thermoelektrischen Ströme stützt Kohlrausch auf die Beziehung der elektrischen und calorischen Leitungsvermögen. Versuche haben gezeigt, dass beide Leitungsvermögen einander proportional sind. Kohlrausch nimmt deshalb an, dass ein Wärmestrom immer Elektricität mit sich führt, und erklärt aus der Wärmeleitung im Thermoelemente die Entstehung des elektrischen Stromes. Sind die Enden eines Metalldrahtes auf den Temperaturen t und t' gehalten, so ist die in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt hindurch gehende Wärme der Differenz $(t - t')$ proportional; setzt man dieser Differenz auch die Stromstärke oder die Potentialdifferenz E an beiden Enden proportional, so kann man schreiben

$$E = A(t - t').$$

Die Grösse A hängt von der materiellen Beschaffenheit der Substanz ab; sie ist von Metall zu Metall verschieden. Nehmen wir ein Thermoelement mit den beiden Löthstellen M und N an, sei für den Draht b die genannte Constante A, für den Draht a aber A' und machen wir die Annahme, dass $A > A'$ sei. Beim Erhitzen der Löthstelle N wird mit der Wärme in b mehr Elektricität nach M befördert als in a; dies hat zur Folge, dass das elektrische Potential in M auf b grösser sein wird als auf a; es wird demzufolge

Fig. 78.



ein Strom von b über M nach a cursieren, der in N deshalb von a nach b gerichtet ist. Wird nun ein ebenso gerichteter Elektricitätsstrom von M ausgeschickt, so wird längs a weniger Wärme nach N geführt, als längs b von N abströmt, es wird deshalb eine Erkältung der Löthstelle N eintreten und diese Erscheinung entspricht dem Peltier'schen Phänomene[1]).

Die Theorie von Kohlrausch lässt sich leicht im Sinne der Theorie der Ätherverschiebung (§ 100e) deuten.

c) Clausius hat das Thermoelement verglichen mit einer Dampfmaschine, in welcher die erwärmte Contactstelle den Feuerraum und die kältere Stelle den Kühler oder Condensator vorstellt und nach dieser Analogie aus der Wärmelehre das Carnot'sche Theorem angewendet. Darnach müssen die Potentialdifferenzen an den beiden Berührungsstellen den absoluten Temperaturen proportional, also der Überschuss der Potentialdifferenz an einer Stelle gegenüber der anderen, welcher die elektromotorische Kraft des Stromes bestimmt, der Temperaturdifferenz der beiden Contactstellen direct proportional sein. Mit einer Vergrösserung der Temperaturdifferenz muss demnach auch die elektromotorische Kraft im gleichen Verhältnisse wachsen. Dieses Gesetz bestätigt sich auch in den meisten Fällen für Temperaturdifferenzen bis etwa 50° C, ausnahmsweise wohl auch zwischen weiteren Grenzen, aber es gilt nicht ganz allgemein. Nach diesem Gesetze sollte niemals eine Umkehrung des Stromes eintreten, wenn eine Verbindungsstelle fortgesetzt erwärmt wird; dieser Schluss wird durch den Versuch nicht bestätigt. Die Versuche von Hankel, Avenarius, Kohlrausch, Thomson u. A.[1]) zwingen vielmehr anzunehmen, dass die elektromotorische Kraft des Stromes eine compliciertere Function der Temperaturen ist. Man gelangt zu einem entsprechenden Ausdrucke, wenn nach Avenarius die Potentialdifferenz an jeder Contactstelle als Function des zweiten Grades von der Temperatur annimmt, es wird dann für eine Verbindungsstelle

$$\Delta V_t = a + bt + ct^2$$

und für die zweite Stelle

$$\Delta V_T = a + bT + cT^2.$$

Als Überschuss der Potentialdifferenz der wärmeren Stelle wird

$$\Delta V_T - \Delta V_t = (T - t)[b + c(t + T)].$$

Dies ist der Ausdruck für die elektromotorische Kraft, welche sich im Strome geltend macht, und zwar in der Form, wie er von den Versuchen gefordert wird. Derselbe scheint der Folgerung aus

1) J. G. Wallentin, Moderne Elektrl. S. 200.

2) G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektricität. II. 292 etc.

dem Carnot'schen Principe zu widersprechen; doch ist der Widerspruch nur scheinbar. Clausius hält aus den angegebenen theoretischen Gründen die Proportionalität zwischen Temperatur und Potentialdifferenz an den Verbindungsstellen aufrecht und erklärt die in gewissen Fällen vorkommenden Abweichungen wie folgt[1]): „Man ist zu der Annahme genöthigt, dass auch im Inneren der beiden verbundenen Metalle oder eines derselben Potentialdifferenzen entstanden seien, welche als elektromotorische Kräfte zur Hervorbringung des Stromes mitwirken. Es reicht zur Erklärung der Abweichungen hin, wenn man die im Inneren eines Metalles entstehenden Potentialdifferenzen nur als eine secundäre Wirkung der Temperaturverschiedenheit betrachtet, welche dann eintritt, wenn durch die Temperaturänderung des einen Theiles eine Änderung seines molecularen Zustandes veranlasst ist, so dass der veränderte und der unveränderte Theil des Metalles sich wie verschiedene Metalle zu einander verhalten. Dasselbe gilt natürlich auch, wenn beide Theile ihren molecularen Zustand geändert haben, aber die Änderungen nicht gleich sind.“ Thomson ist durch Anwendung des Energieprincipes auf die Arbeitsleistung im Stromkreise zu demselben Schlusse gekommen; dies soll im nächsten Capitel weiter ausgeführt werden. Zur Vorbereitung dazu soll hier noch auf eine Erscheinung besonders hingewiesen werden.

Wenn man die vorstehende Gleichung nach der Temperatur T auflöst und der Kürze halber für die elektromotorische Kraft E setzt, so erhält man

$$T = -\frac{b}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{[b^2 + 4c(ct^2 + bt)] + 4cE}.$$

Für den Fall, dass die Grösse c negativ ist, kann E eine gewisse Grenze nicht übersteigen, da sonst die Wurzel imaginär würde. Für den grössten Wert von E ist der Wurzelausdruck Null und die Temperatur muss sein

$$T_0 = -\frac{b}{2c}.$$

Sobald eine Contactstelle auf dieser Temperatur gehalten wird, so ist die elektromotorische Kraft des Thermostromes ein Maximum. Eine weitere Erhitzung der Stelle wird den elektrischen Effect nicht zu steigern vermögen, sondern es wird sogar allmählich eine Abnahme der elektromotorischen Kraft stattfinden. Diese Temperatur T_0 heisst der neutrale Punkt[2]).

Durch Einführung von T_0 erhält man für die elektromotorische Kraft

$$E = 2c(T - t)\left[- T_0 + \frac{T+t}{2}\right].$$

1) Clausius, Mech. Behandl. d. El. S. 191 und Pogg. Ann. Bd. XC.

2) Vgl. Wiedemann, Lehre v. d. El. II. 295.

Dieselbe wird Null, wenn $T = t$, d. h. wenn beide Verbindungsstellen des Thermoelementes gleiche Temperatur haben, was mit der obigen Folgerung aus dem Energieprincipe übereinstimmt; sie wird auch Null, wenn

$$\frac{T+t}{2} = T_0,$$

d. h. wenn das arithmetische Mittel der Temperaturen an den Verbindungsstellen dem neutralen Punkte gleich ist. Sobald die Temperatur T noch weiter gesteigert wird, dann erhält E das entgegengesetzte Zeichen und es muss demnach eine Umkehrung des Stromes eintreten.

Nach Avenarius ist der neutrale Punkt für Eisen-Silber 223·5° C, Silber-Zink 69·7° C und Kupfer-Eisen 275·8° C.

§ 122. **Peltier'scher und Thomson'scher Effect.** a) Die Zusammenstellung heterogener Metalle zu Thermoelementen beweist, dass an der Contactstelle solcher Metalle eine Potentialdifferenz besteht. Im Thermoelement ist dieselbe das Mass für die elektromotorische Kraft. Diese Differenz muss sich als Potentialsprung geltend machen, wenn man durch die Berührungsstelle zweier verschiedenartiger Metalle einen elektrischen Strom leitet.

Es ist nämlich eine besondere Arbeit des Stromes nöthig, um den Transport der Elektricität über diese Stelle zu besorgen. Die Grösse der Arbeit wird durch die Potentialdifferenz gemessen und ist mit dieser positiv und negativ. Die bezügliche Erscheinung wurde im Jahre 1834 von Peltier entdeckt; er fand, dass ein elektrischer Strom je nach seiner Richtung beim Durchgange an der Verbindungsstelle zweier Metalle Wärme oder Kälte erzeugen könne. Da dieser Effect wesentlich von der Stromrichtung abhängt, so unterscheidet er sich dadurch von der gewöhnlichen Arbeit des Stromes zur Überwindung der Leitungswiderstände und wird Peltier'scher Effect genannt.

Führt man einen Strom z. B. vom Kupfer zum Eisen, so tritt an der Verbindungsstelle eine Abkühlung ein; bei einer Umkehrung der Stromrichtung wird die Stelle erwärmt.

Der Strom bringt an der Berührungsstelle das Gegentheil der Temperaturänderung hervor, durch welche er selbst entstehen kann. Temperaturänderung einer Löthstelle und elektrischer Strom stehen daher in ähnlicher Wechselbeziehung wie Gaserwärmung und Volumänderung und wie elektrischer Strom und Polarisations-Gegenstrom.

b) Thomson hat aus dem Principe der Erhaltung der Energie geschlossen, dass solche Effecte wie an der Berührungsstelle zweier Metalle auch innerhalb eines und desselben Metalles auftreten. Wird nämlich ein Thermoelement, bestehend aus Kupfer und Eisen, an einer Löthstelle auf constanter Temperatur gehalten und an der an-

deren Löthstelle fortgesetzt erwärmt, so steigen die elektromotorische Kraft des Elementes, die Stromintensität und mit dieser auch die Joule'sche Wärme im Stromleiter. Der Peltier'sche Effect, ausgedrückt durch die Potentialdifferenz der kühleren Verbindungsstelle, bleibt unverändert. Ist die Potentialdifferenz oder die elektromotorische Kraft an der erwärmten Verbindungsstelle E, die Potentialdifferenz an der anderen Stelle e, der Leitungswiderstand der Metalle R und die Stromintensität i, dann gilt in einem bestimmten Momente nach dem Joule'schen Gesetze die Gleichung

$$E \cdot i = R \cdot i^2 + e \cdot i.$$

Nach einer weiteren Temperatursteigerung der erwärmten Stelle geht dieselbe über in

$$E' \cdot i' = R \cdot i'^2 + e \cdot i'.$$

Durch Subtraction erhält man

$$E'i' - Ei = R(i'^2 - i^2) + e(i' - i).$$

Bezieht man diese Gleichungen auf zwei unmittelbar aufeinander folgende Zustände, wenn die Temperatur der erwärmten Verbindungsstelle beim neutralen Punkte von 276^0 C angelangt ist, so haben sowohl die elektromotorische Kraft E wie die Stromintensität i das Maximum ihrer Werte erreicht und es werden $E = E'$ und $i = i'$ und damit reducieren sich beide Seiten der letzten Gleichung auf Null, d. h. der elektrische Zustand würde durch die vorgenommene Temperatursteigerung der erwärmten Stelle keine Änderung erfahren. Es würde demnach die im gleichen Verhältnisse wie bei den vorhergehenden Temperaturen mitgetheilte Wärme plötzlich ohne Erfolg sein, denn sie hätte im Leiterkreise keine äquivalente Leistung. Dies widerspräche dem Principe der Erhaltung der Energie.

Um den Widerspruch zu beheben, müssen wir annehmen, dass die vorstehende Gleichung unvollständig ist, dass ausser den darin vorkommenden Effecten noch weitere Effecte im Leiterkreise bestehen. Es muss nämlich die zugeführte Wärme in den Eisen- oder Kupfertheilen verschwinden. Diese thermische Wirkung heisst der Thomson'sche Effect. Thomson ist es auch thatsächlich gelungen, solche umkehrbare Wirkungen beim Durchgange des Stromes durch ein Metall, dessen Theile auf verschiedenen Temperaturen gehalten werden, nachzuweisen; er fand, dass in ungleichmässig erwärmtem Eisen ein Strom von „warm" nach „kalt" das Metall abkühlt, während ein Strom von „kalt" nach „warm" es erwärmt und dass im Kupfer die entgegengesetzte thermische Wirkung eintritt[1]).

1) Maxwell, Lehrb. d. El. I. 389, und: Die El. in elem. Behandlg. S. 142.

IX. Elektromagnetismus.

§ 123. **Magnetisches Feld eines Stromes.** Im Jahre 1820 machte Oersted die Entdeckung, dass ein elektrischer Strom eine Magnetnadel aus dem magnetischen Meridian abzulenken imstande sei. Ampère gab für diese Ablenkung folgende Regel: Denkt man sich eine menschliche Figur in der Richtung des Stromes schwimmend mit dem Gesichte der Nadel zugekehrt, so wird der Nordpol der Nadel zur linken Hand abgelenkt. Anstatt einer Figur kann man die rechte Hand benützen; der Daumen übernimmt dann die Rolle des linken Armes. Wäre die Nadel der Einwirkung der Erde sowie allen anderen magnetischen Einwirkungen entzogen, so müsste sie sich normal zur Richtung des Stromes stellen. Würde die Nadel längs eines Kreises rings um einen geradlinigen, verticalen Strom geführt, so nähme sie in den aufeinander folgenden Stellungen die Richtungen der Tangenten des kreisförmigen Weges an. Lässt man einen Strom durch ein Stück Kartenpapier senkrecht hindurchtreten und bestreut das Papier mit Eisenfeilspänen, so werden diese durch den Strom magnetisiert und lagern sich wie kleine Magnetnadeln in concentrischen Kreisen rings um den Strom. Man erhält auf diese Weise eine experimentelle Darstellung von magnetischen Kraftlinien im Felde des Stromes. Aus den Versuchen müssen wir schliessen, dass ein elektrischer Strom in seiner Umgebung ein magnetisches Feld erzeugt, das in dem Sinne eines gewöhnlichen elektrischen oder magnetischen Feldes aufgefasst und durch Construction der magnetischen Kraftlinien und Niveauflächen untersucht werden kann.

Für einen geradlinigen Strom stellt das Experiment ohne weiteres fest, dass die Kraftlinien concentrische Kreise sind, deren Mittelpunkte in dem Stromleiter liegen. Die Kraft ist demnach in jedem Punkte zu der Ebene normal, die durch den betreffenden Punkt und den Strom geht und sie ist nach der linken Seite des Ampère'schen Beobachters gerichtet. Die Niveauflächen sind stets zu den Kraftlinien normal; daher sind die aufeinander folgenden Niveauflächen um einen geradlinigen Strom Ebenen, die durch den Stromleiter gehen und mit einander gleiche Winkel einschliessen. Sind die Stromleiter anders geformt, dann laufen die Kraftlinien um jeden

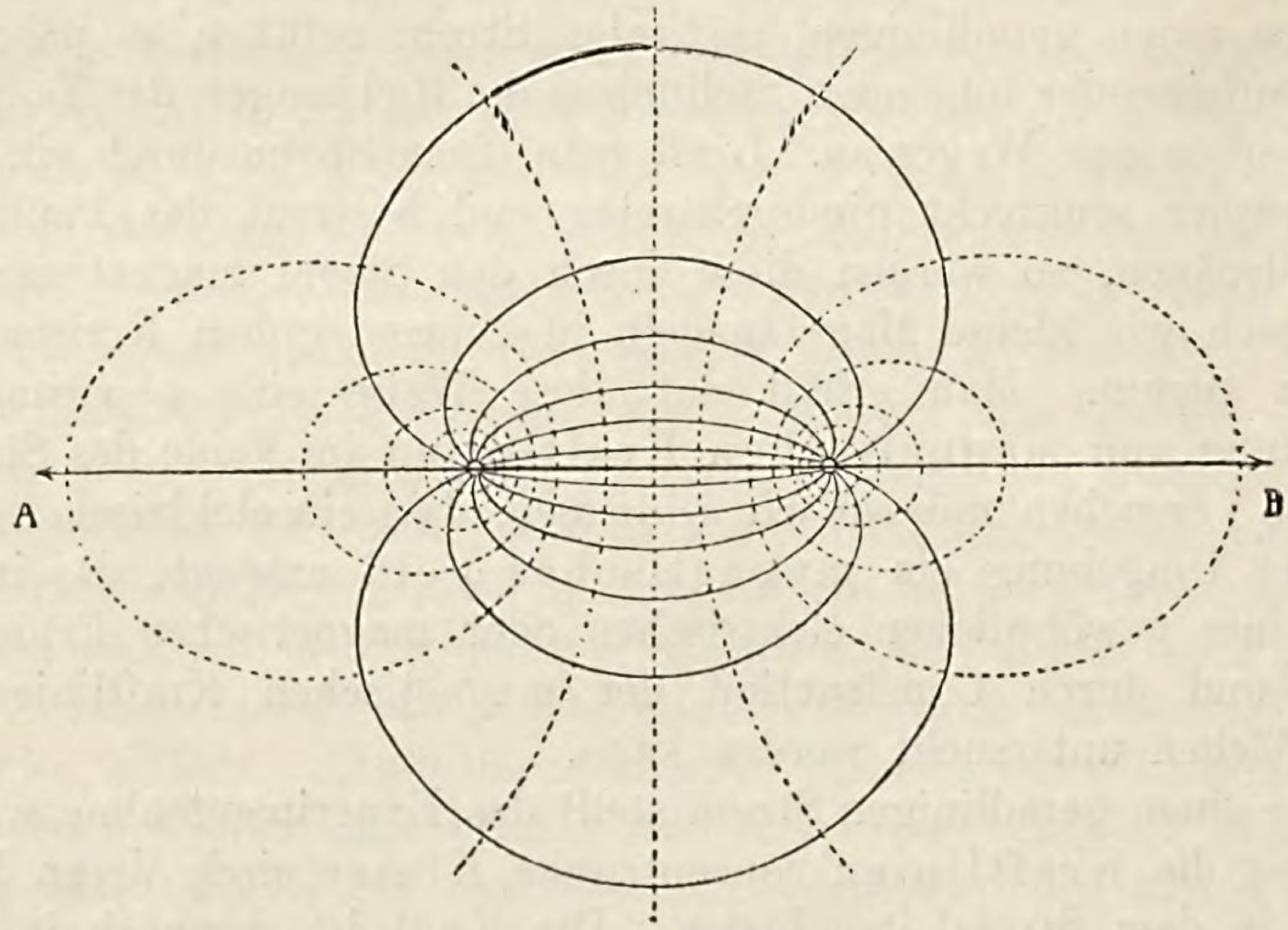
Theil des Stromes als geschlossene Curven und die Niveauflächen sind dazu wieder normal[1]).

Dieselben magnetischen Kraftlinien, die einen geradlinigen Strom umkreisen, erhält man für ein magnetisches Blatt von der Form einer einseitig begrenzten Ebene, deren Grenzlinie mit dem Stromleiter zusammenfällt. Auch bei einem solchen magnetischen Blatte umkreisen die Kraftlinien die Begrenzungsgerade.

Schliesst man den Leitungsdraht, der den elektrischen Strom führt, zu einem Kreise, so wirken die einzelnen Leiterstücke auf jeden Punkt des Feldes und die resultierende Kraft gibt die Richtung der Kraftlinie in dem betreffenden Punkte; und dieselbe Form wie die Kraftlinien im Felde des Stromes zeigen jene eines magnetischen Blattes, dessen Begrenzungslinie mit dem Leiterkreise übereinstimmt. Die nordmagnetische Seite des Blattes entspricht derjenigen, welche vom Strome im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers umkreist wird.

In Fig. 79 sind der Verlauf der Kraftlinien (punktiert) und die Schnitte der Niveauflächen (voll ausgezogen) im Felde eines Kreisstromes dargestellt. Die ganze Raumfigur kann gewonnen werden, wenn man die ebene Figur um die verticale Kraftlinie als Symmetrieachse rotiert denkt[2]).

Fig. 79.

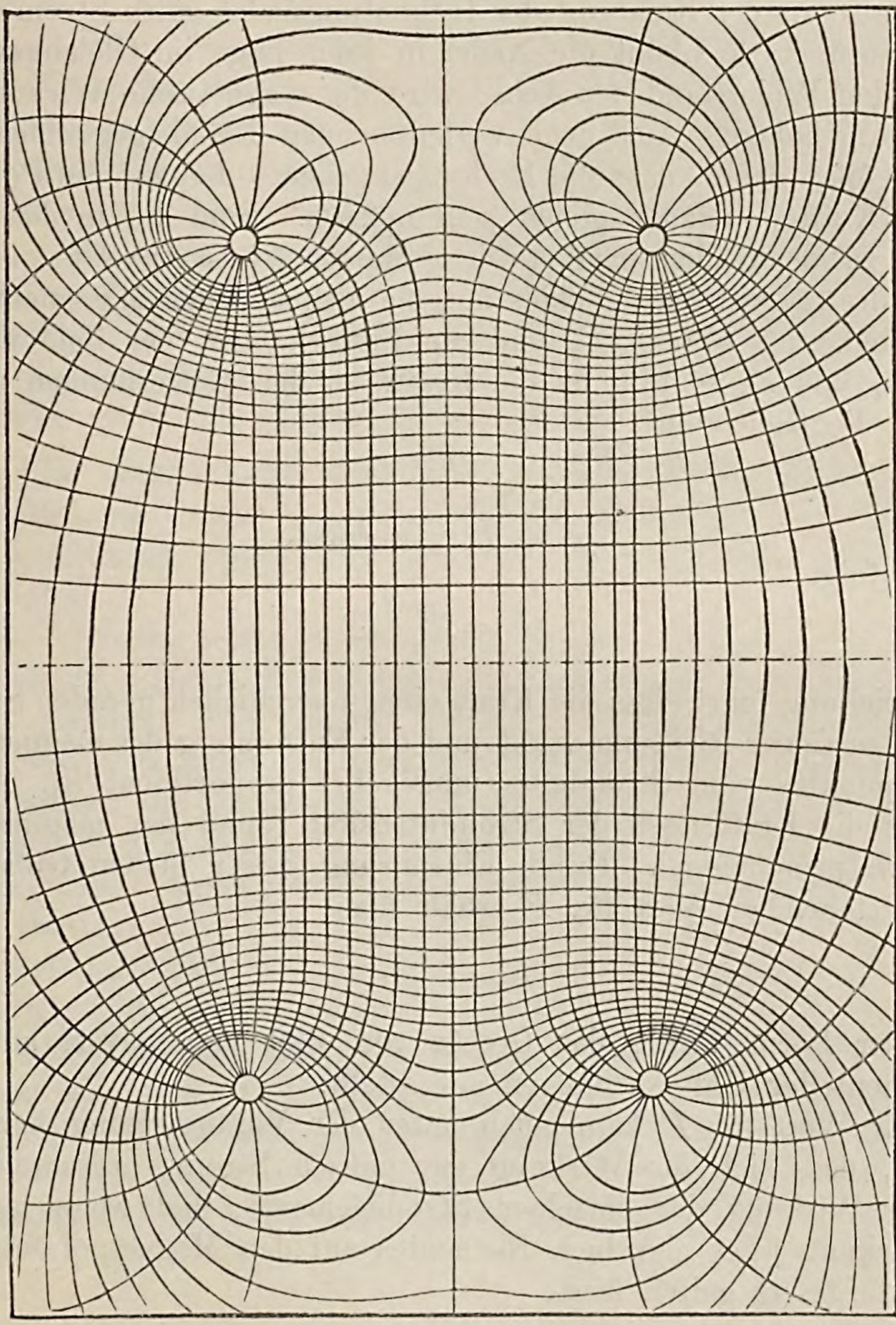


Der Übereinstimmung des Kraftlinienverlaufes im Felde entspricht auch die Gleichheit der Wirkungen eines Kreisstromes und eines kreisförmig begrenzten magnetischen Blattes. Der Nachweis lässt sich leicht mittelst der schwimmenden Batterie von de la Rive liefern.

1) Siehe Maxwell, Lehrb. d. El. II. Tafel XIX u. a. Werke.
2) Aus Wallentins „Moderner Elektricitätslehre“ S. 305.

Eine Zinkplatte und eine Kupferplatte werden parallel zu einander in einem grossen Korke befestigt, und ihre oberen Enden mit einem ringförmig gewickelten Kupferdrahte verbunden. Beide Platten tauchen in verdünnte Schwefelsäure, auf welcher die ganze Zusammenstellung schwimmt. Wird dem Drahtringe ein Pol eines Stabmagnetes genähert, so wird jener angezogen oder abgestossen, je nachdem es ein

Fig. 80.



Nord- oder ein Südpol ist. Der schwimmende Schliessungsbogen verhält sich wie ein Magnet, dessen Nordseite von der Stromrichtung im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers umflossen wird. —

Der Verlauf der Kraftlinien und Niveauflächen im elektromagne-

tischen Felde wird complicierter, wenn dieses von mehr als einem Strome hervorgerufen wird. Fig. 80 gibt ein Bild für den Fall, wenn zwei zu einander parallele Kreisströme vorhanden sind[1]).

§ 124. **Biot-Savarts Gesetz** (1820). a) Die Wirkung eines geradlinigen, unendlichen Stromes auf einen Magnetpol ergibt sich aus einem sehr einfachen Versuche: Bringt man eine Magnetnadel in eine zur Inclinationsnadel normale Ebene und führt in der Richtung ihrer Achse, also in der Richtung der Inclinationsnadel einen Strom an der Nadel vorüber, so bleibt die Nadel in jeder Lage im Gleichgewichte. Durch den Widerstand der Achse wird die magnetische Wirkung der Erde aufgehoben. Aus dem Verhalten der Nadel gegenüber dem Strome folgt daher, dass die Drehungsmomente der auf die Pole wirkenden Kräfte einander gleich sein müssen. Sind die in den Polen vereint zu denkenden magnetischen Massen $(+m)$ und $(-m)$, die Kräfte des magnetischen Feldes auf die magnetischen Masseneinheiten beziehungsweise F_1 und F_2 und die Entfernungen der Pole von der Achse r_1 und r_2, so gilt, da die Kräfte zu den Entfernungen normal wirken, die Gleichung

$$F_1 m r_1 - F_2 m r_2 = 0$$

oder

$$F_1 r_1 = F_2 r_2 = \text{const.}$$

Daraus folgt

$$F = \frac{\text{const.}}{r}.$$

Die Gleichung lehrt, dass die Kraft eines unendlichen geraden Stromes normal zu seiner Richtung wirkt und der Entfernung des magnetischen Massenpunktes vom Stromleiter umgekehrt proportional ist. Ausserdem ist die Kraft noch der Stromintensität i und der magnetischen Masse m proportional. Durch Einführung dieser beiden Grössen in den vorstehenden Wert für F erhält man

$$F = \frac{kmi}{r}.$$

In dieser Form wurde das Gesetz von Biot und Savart aufgrund experimenteller Untersuchungen aufgestellt.

Der Wert für F kann auch unter der Voraussetzung berechnet werden, dass sich die Wirkung des ganzen Stromes zusammensetzt aus der Wirkung der einzelnen Stromelemente, und wenn man für die Wirkung jedes einzelnen Elementes auf den Magnetpol folgendes Elementargesetz gelten lässt:

$$f = \frac{k' m \cdot i \cdot dl \cdot \sin\alpha}{r^2},$$

wobei α den Winkel angibt, den die Entfernung r zwischen Pol und

1) Aus Wallentins „Moderner Elektricitätslehre" S. 306.

Stromelement mit der Stromrichtung einschliesst und dl die Länge des Stromelementes bezeichnet. Die Richtung der Kraft wird durch die Ampère'sche Schwimmerregel oder die Rechtehandregel bestimmt.

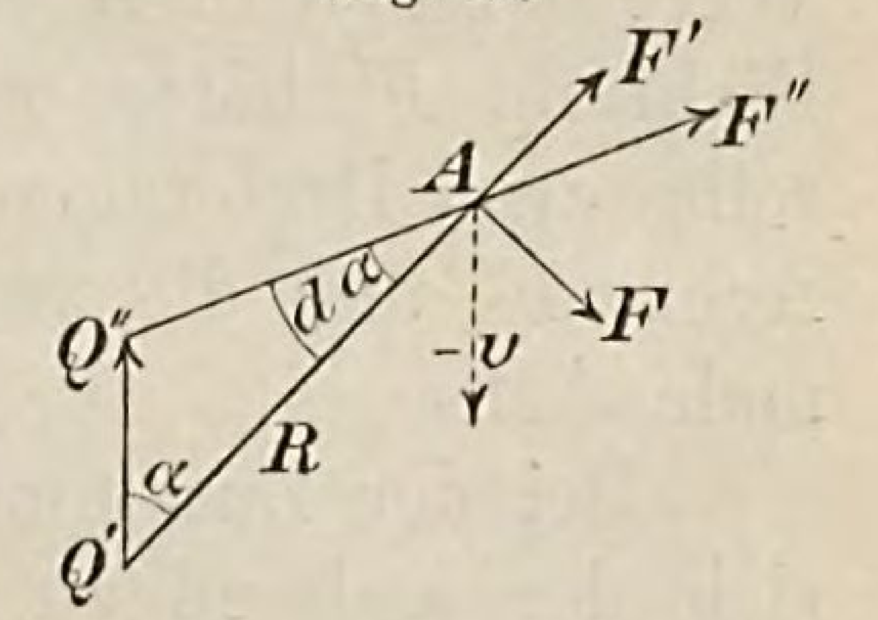
Die Ableitung von F aus f mag als Aufgabe behandelt werden. Man findet dabei $k = 2k'$.

Aus dem Elementargesetz für f kann man schliessen, dass ein Stromelement dl in zwei Componenten, nämlich in $dl' = dl \cdot \sin\alpha$ normal zu r, und in $dl'' = dl \cdot \cos\alpha$ längs r zerlegt werden kann, und dass beide Componenten zusammen dieselbe Wirkung ausüben, als das Stromelement dl allein; denn die Wirkung von dl' ist nach dem Elementargesetze selbst jener von dl gleich, und die Wirkung des in der Verbindungsgeraden r liegenden Elementes dl ist gleich Null. Die Richtigkeit dieser Schlussfolgerung lässt sich durch folgenden Versuch nachweisen: Man führt einen Strom geradlinig nach aufwärts und unmittelbar daneben denselben Strom in vielen kleinen Krümmungen nach abwärts; wirken beide Stromtheile auf eine Magnetnadel, so wird diese nicht abgelenkt. Die beiden Wirkungen sind also gleich gross und entgegengesetzt gerichtet.

§ 125. **Mechanische Deutung der elektromagnetischen Kräfte.** Wir wollen das Gesetz von Biot-Savart aus der Drehung der Faraday-schen Kraftlinien, welche mit der elektrischen Strömung verbunden ist, ableiten[1]).

Die Wirkung eines elektrischen Stromes lässt sich auch durch entsprechend schnelle Bewegung eines elektrostatisch geladenen Conductors erzielen. Wir nehmen deshalb einen kleinen, mit der Elektricitätsmenge Q geladenen Kugelconductor an und ermitteln die Änderung in einem Raumelemente des Kraftfeldes, wenn Q mit der Geschwindigkeit v längs der kleinen Wegstrecke $v\,dt$ fortbewegt wird (Fig. 81). Ist die Ladung Q im Anfangspunkte der Bewegung, so wirkt die elektrische Kraft F' im Punkte A des Feldes in der Richtung $Q'A$. Ist Q in Q'' angelangt, so wirkt die Kraft F'' in der Richtung $Q''A$.

Fig. 81.



Während der Bewegung von Q hat also die Kraftrichtung eine Drehung erfahren, und zwar mit einer zu F' normalen Componente F; diese Kraftcomponente auf die elektrische Masseneinheit in A ist

$$F = F'' \cdot \sin d\alpha = \frac{Q}{R^2} \cdot d\alpha.$$

Um das Drehungsmoment zu ermitteln, benutzen wir die Arbeit der Drehung. In Bezug auf die Masseneinheit in A ist die überhaupt

1) Siehe meinen Vortrag über Raumenergie, Abhdlg. d. Naturf.-Gesellsch. 1894. S. 307.

geleistete Arbeit dieselbe, wie wenn A mit der Geschwindigkeit $(-v)$ um die Strecke $(-v \cdot dt)$ bewegt würde und Q in Ruhe bliebe; denn die Lagenbeziehungen zwischen A und Q sind jedesmal dieselben. Bei dieser Bewegung von A leistet die mittlere Drehkraft $\frac{1}{2} F$ die Arbeit

$$dW = \frac{1}{2} F \cdot \sin\alpha \cdot v dt = \frac{Q}{2R^2} \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha \cdot v dt.$$

Daraus wird das Drehungsmoment

$$\frac{dW}{d\alpha} = \frac{Q}{2R^2} \cdot \sin\alpha \cdot v \cdot dt.$$

Dasselbe Resultat liefert die Betrachtung der auch auf Q' und Q'' wirkenden Kräfte F' und F''. Die in A und Q'' nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte F geben ein Drehpaar mit demselben Drehungsmoment.

Setzt man für $Q \cdot v dt = k \cdot i \cdot dl$, wobei i die Stromstärke und dl ein Längenelement des Leitungsdrahtes des elektrischen Stromes sind, so erhält man die Form

$$f = k \frac{i \cdot dl}{R^2} \cdot \sin\alpha,$$

welche auch das Biot-Savart'sche Gesetz darstellt. Dieses Gesetz bestimmt eine zur Ebene (Av) normale, nach der Ampère'schen Schwimmerregel wirkende magnetische Kraft. Eine solche zur Zeichnungsfläche normale Kraft folgt aber aus den in der Figur angegebenen Kräften keineswegs. Wir können uns aber einen mechanischen Vorgang in A versinnlichen, der eine solche Kraft zu entwickeln vermöchte. Wäre nämlich in A ein rotierender Kreisel, dessen Achse erst die Richtung F' hätte und dann nach F'' gedreht würde, so hätte derselbe zwei Drehungen gleichzeitig zu vollführen, nämlich eine um die Achse F' und die zweite um die in A auf der Zeichnungsfläche normale Achse.

Bei der Zusammensetzung beider Drehungen sucht die Achse F' sich der anderen zu nähern und strebt somit, aus der Zeichnungsebene herauszutreten. Der Kreisel würde also einen Druck in der Richtung der magnetischen Kraft erzeugen. Einen ebensolchen Druck müssten auch die Äthertheilchen im Kraftfelde ausüben, wenn sie eine rotierende Bewegung um die elektrischen Kraftlinien vollführten. Die Annahme solcher cyklischen Bewegungen entspricht der Hypothese der molecularen Wirbel nach § 72b und steht demnach auch mit den betreffenden Sätzen der Wärmetheorie (§ 82b und § 83d) im Einklange.

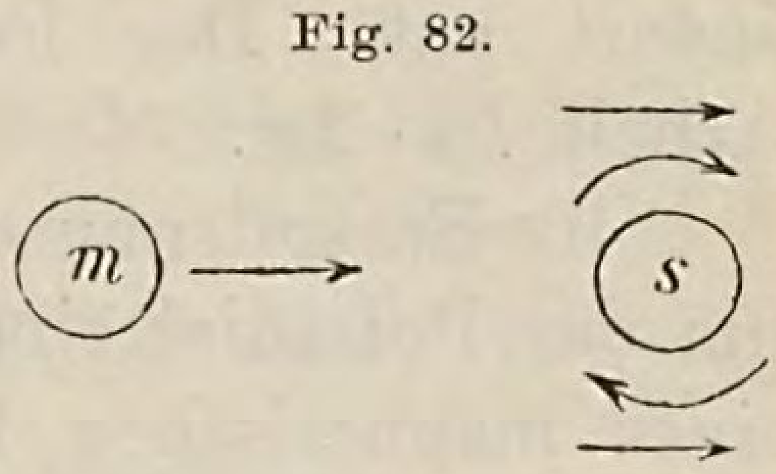
Verschwindet der elektrische Zustand im Felde und bleibt nur der magnetische bestehen, so könnte aus Gründen der Symmetrie angenommen werden, dass die cyklische Ätherbewegung weiterhin nur

um die magnetischen Kraftlinien stattfinde. Damit wären wir auf die Anschauungsweise geführt, die in neuester Zeit sehr wirksam von H. Ebert u. a. vertreten wird1).

Aus dem Zwangszustande im elektromagnetischen Felde, insbesondere aus dem Drucke normal zu den magnetischen Kraftlinien, der durch die Fliehkraft einer Rotationsbewegung leicht erklärt wird, ergibt sich auch die Wirkungsweise eines Magnetpoles auf ein Stromelement2).

Ist m (Fig. 82) eine positive oder nordmagnetische Masse und im Felde derselben s ein Stromelement, in welchem ein Strom normal zur Zeichnungsebene von oben nach unten fliesst, dann verlaufen die Kraftlinien von m in radialer Richtung und zwar in der Gegend von s von links nach rechts, und die des Stromelementes in der Richtung der Bewegung des Uhrzeigers. Aus der Figur ergibt sich unmittelbar, dass auf der oberen Seite von s eine Verstärkung und auf der unteren Seite eine Schwächung der magnetischen Kraft des Feldes und somit auch des von oben nach unten und umgekehrt wirkenden Druckes im Medium eintritt; es muss demnach das Bestreben zur Geltung kommen, dass sich s von oben nach unten zu bewegen sucht. Ist m beweglich, so wird es sich in der Richtung der Kraftlinien des Stromelementes zunächst von unten nach oben entfernen. Diese Bewegungsrichtungen stimmen mit der Ampère'schen Schwimmerregel vollkommen überein.

Fig. 82.



Dieselbe wird in einfacher Weise auch durch die Fleming'sche Dreifinger- oder Linkehandregel angegeben: Halten wir den Zeigefinger der linken Hand in der Richtung der Kraftlinien des Magnetfeldes, den Mittelfinger in der Stromrichtung, so wird der Stromleiter in der Richtung des normal zu beiden Fingern gehaltenen Daumens derselben Hand quer zur Kraftlinienrichtung vorwärts bewegt.

§ 126. **Potential eines elektrischen Stromes.** a) Das Potential eines unbegrenzten geradlinigen Stromes kann man leicht aus der magnetischen Kraft des Stromes bestimmen. Es ergibt sich aus der Arbeit, welche geleistet wird, wenn die magnetische Masseneinheit um eine sehr kleine Wegstrecke in der Richtung einer Kraftlinie bewegt wird.

Ist ein geradliniger Strom mit der Stärke i gegeben, und befindet sich in einer normalen Entfernung r die magnetische Masseneinheit, so ist die Kraft

$$F = \frac{k \cdot i}{r}.$$

1) H. Ebert, Magnetische Kraftfelder. Barth 1896.

2) Siehe meine Schrift über d. Energieprincip i. d. El. 1887.

Bewegt sich die magnetische Masse im Sinne der Ampère'schen Schwimmerregel durch Drehung um den Winkel $d\alpha$ längs des sehr kleinen Weges $r \cdot d\alpha$, so ist die Arbeit

$$dV = \frac{k \cdot i}{r} \cdot r \cdot d\alpha = k \cdot i \cdot d\alpha$$

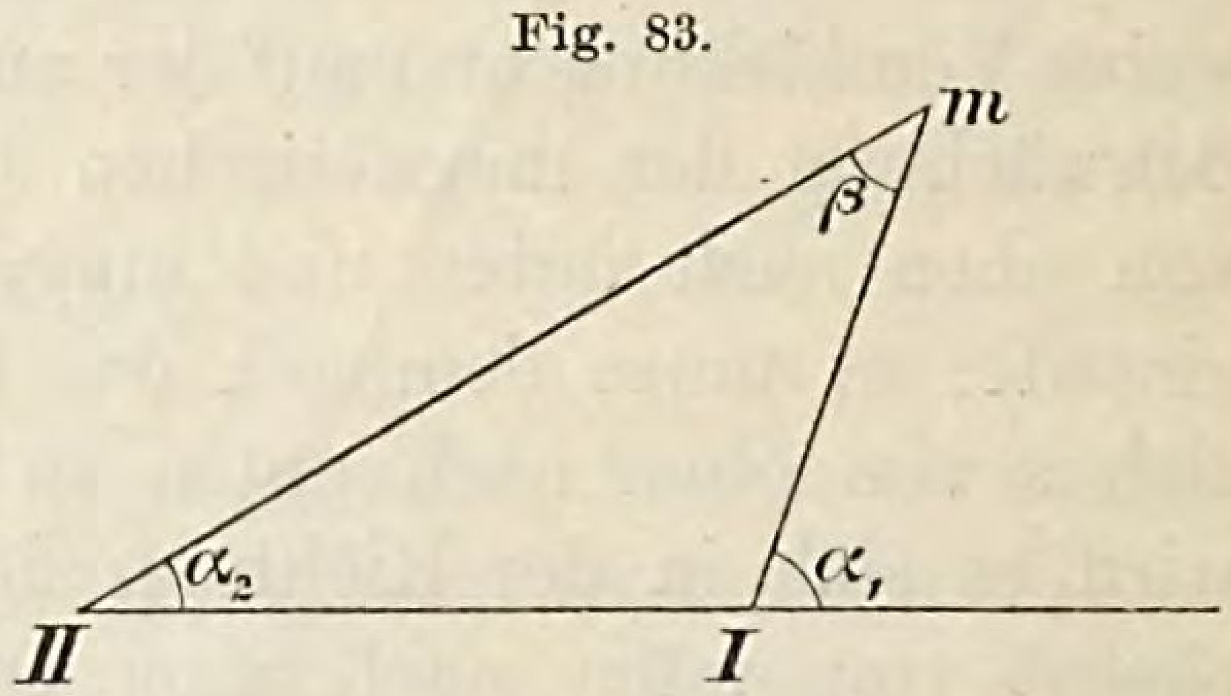
und das Potential

$$V = k \cdot i\alpha + V_0.$$

Durch α und V_0 ist der Potentialwert eindeutig bestimmt; die Lage des magnetischen Poles kann ihn aber allein nicht bestimmen, weil dieselbe Lage stets wieder erreicht wird, wenn der Pol eine Umdrehung um den Stromleiter gemacht, wenn sich also α um 2π geändert hat. Das Potential wächst bei jeder Umdrehung um die Arbeit $ki \cdot 2\pi$.

b) Es soll nun der gewonnene Potentialwert dazu benützt werden, um das Potential eines beliebig gestalteten Stromes mit dem Potential eines magnetischen Blattes zu vergleichen. Wir betrachten zunächst zwei unbegrenzte, zur Zeichnungsfläche normale Stromgeraden *I* und *II* von gleich grosser aber entgegengesetzt gerichteter Stromstärke i und die magnetische Masse in m (Fig. 83).

Fig. 83.



Wird das Nullpotential in der Verbindungslinie *II I* angenommen, so ist das Potential beider Ströme in m

$$V = (ki\alpha_1 + V_0) - (ki\alpha_2 + V_0) = ki(\alpha_1 - \alpha_2)$$

oder

$$V = k \cdot i \cdot \beta.$$

Wenn wir den Winkel β durch den körperlichen Winkel ω ausdrücken, unter welchem die Fläche *I II* von m aus erscheint, so müssen wir die Fläche des sphärischen Zweieckes berechnen, das aus einer Kugel um m mit dem Halbmesser Eins von den Ebenen (mI) und (mII) ausgeschnitten wird; hiezu hat man

$$\beta : 2\pi = \omega : 4\pi;$$

damit wird

$$\beta = \frac{\omega}{2} \quad \text{und} \quad V = \frac{1}{2} k \cdot i \cdot \omega.$$

Das Potential ist also dem körperlichen Winkel ω, unter welchem die Fläche *I II* zwischen den Stromgeraden von m aus erscheint, proportional. Demselben Winkel ist auch das Potential eines magnetischen Blattes, das von den Geraden *I II* begrenzt wird, proportional; das Potential eines solchen Blattes ist nämlich (nach § 111)

$$V = \Phi \cdot \omega,$$

wenn Φ die Magnetisierungsstärke des Blattes angibt. Beide Potentialwerte sind einander gleich, wenn

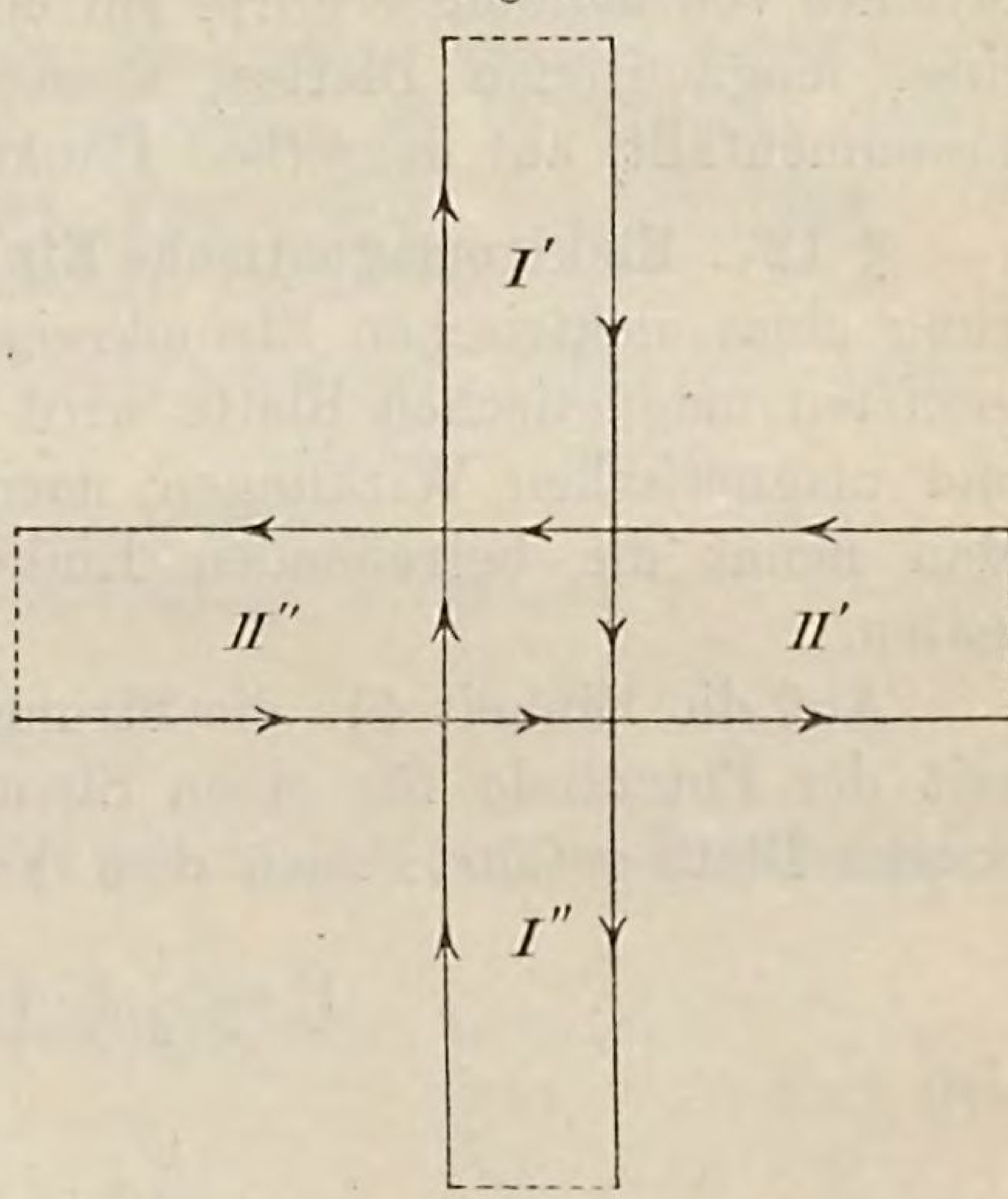
$$\Phi = \frac{1}{2} k \cdot i,$$

also wenn die Blattstärke der Stromstärke proportional ist. Der Nordseite entspricht die Stromrichtung im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers.

Wenn die Stromleiter *I* und *II* sehr lang sind, so können wir, ohne ihre Wirkung zu stören, ihre Enden mit einander verbinden und den elektrischen Strom das entstandene Rechteck umfliessen lassen. Die Wirkung dieses Stromrechteckes wird der Wirkung eines gleichgeformten magnetischen Blattes gleich sein.

c) Nun nehmen wir zwei lang gestreckte Rechtecke an, die einander durchkreuzen (Fig. 84). Die Fläche *I* werde von einem elektrischen Strome im Sinne der Uhrzeigerbewegung umflossen, die Fläche *II* von einem gleich starken Strom im entgegengesetzten Sinne. Beide Rechtecke können nun durch gleich grosse magnetische Blätter ersetzt werden, von denen *I* die südmagnetische und *II* die nordmagnetische Seite nach aufwärts kehrt. Sowohl die Stromwirkungen, als auch die Wirkungen der Blattmagnete lassen sich nun auch dadurch hervorbringen, dass man den gemeinschaftlichen Theil der grossen Rechtecke, in welchem sich die magnetischen Wirkungen aufheben, hinweg nimmt und lediglich die frei liegenden Theile, nämlich die kleinen Rechtecke *I'*, *I''*, *II'*, *II''* wirken lässt. Jedes dieser Rechtecke wird von einem Strome umflossen, und jedem Strome entspricht ein von ihm begrenztes magnetisches Blatt.

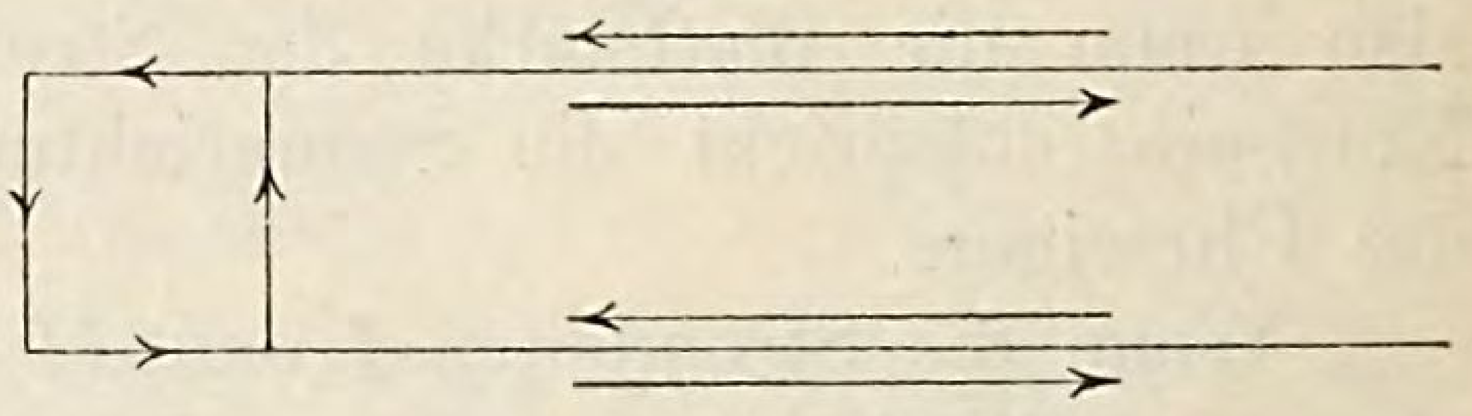
Fig. 84.



Die Äquivalenz eines elektrischen Stromes und eines magnetischen Blattes gilt demnach auch für langgestreckte Rechtecke, die ein Ende in unmittelbarer Nähe haben. Mit Hilfe derselben kann man leicht auf ein engbegrenztes Rechteck, auf ein Elementarrechteck, übergehen, wenn man ein unendliches, einseitig begrenztes Rechteck (Fig. 85) zum Theile von zwei gleich starken und entgegengesetzt gerichteten Strömen durchflossen denkt. Da, wo beide Ströme fliessen, heben sie sich auf, und es bleibt nur die Wirkung des linken Theiles, des allseitig begrenzten Rechteckes übrig. — Bei der Ausführung des

betreffenden Versuches müssen zwei Stromleiter einander sehr nahe in die entsprechenden Lagen gebracht werden. — Den elektrischen Strömen entsprechen genau von ihnen eingeschlossene, übereinander liegende Blattmagnete, deren Wirkungen sich ebenfalls so aufheben, dass nur die Wirkung des übergreifenden Theiles von dem grösseren Blatte übrig bleibt. Das bezeichnete kleine, vom Strom umkreiste Rechteck äussert daher dieselbe Wirkung, ob es von einem elektrischen Strome umflossen wird, oder ob es ein magnetisches Blatt von entsprechender Stärke ist.

Fig. 85.



Durch Übergang vom Rechteck auf ein Dreieck und von diesem auf beliebige andere geradlinige oder krummlinige Figuren, die in Elementarrechtecke oder -Dreiecke zerlegt werden können, kann man ganz allgemein den Satz nachweisen: Das Potential eines geschlossenen Stromes von beliebiger Form auf einen Punkt ist gleich dem Potential eines magnetischen Blattes, dessen Grenzlinie mit dem Stromleiter zusammenfällt, auf denselben Punkt.

§ 127. **Elektromagnetische Einheiten.** Die übereinstimmende Wirkung eines elektrischen Stromkreises mit einem vom Stromleiter begrenzten magnetischen Blatte wird dazu benützt, um die elektrischen und magnetischen Wirkungen nach einheitlichem Masse zu messen. Man nennt die betreffenden Einheiten elektromagnetische Einheiten.

Auf die Einheit für die Stromstärke wird man durch die Gleichheit der Potentiale für einen Strom und ein entsprechendes magnetisches Blatt geführt; nach dem Vorhergehenden ist

$$V = \frac{1}{2} k \cdot i \cdot \omega = \Phi \omega,$$

also

$$\frac{1}{2} k \cdot i = \Phi.$$

Setzt man hierin die Constante $k = 2$, so wird

$$i = \Phi;$$

Stromintensität und Magnetisierungsstärke werden durch dieselbe Zahl ausgedrückt. Der Messung liegt als elektromagnetische Stromeinheit diejenige zugrunde, welche der Magnetisierungsstärke 1 gleichkommt. Mit Bezug auf das Potential $V = \Phi\omega = i \cdot \omega$, in welchem man jeden Factor $= 1$ annehmen kann, erhält man die Definition: Ein Strom besitzt im elektromagnetischen Masse die Stärke Eins, wenn er auf einer Kugel vom Halbmesser Eins die Fläche Eins umfliesst und dieselbe Wirkung äussert, wie eine von ihm umschlossene

magnetische Schale mit der Magnetisierungsstärke Eins, oder wie ein durch die Stromschleife hindurchgesteckter Magnet vom Momente Eins. — Aus der Kraft eines unbegrenzt geradlinigen Stromes

$$F = \frac{kmi}{r},$$

für welche $m = 1$, $r = 1$, $k = 2$, erhält man $i = 1$, wenn $F = 2$, d. h. ein Strom hat im elektromagnetischen Masse die Stärke Eins, wenn er einen geraden, sehr langen Leiter durchfliessend, in der Entfernung Eins die magnetische Kraft 2 zu äussern imstande ist. — Eine dem Galvanometer angepasste Definition wird nachstehend angegeben werden.

Einheit der Elektricitätsmenge ist diejenige Menge, welche in einem Einheitsstrome in einer Secunde fortbewegt wird. Einheit der elektromotorischen Kraft oder des Potentials ist die Arbeitseinheit, welche verbraucht wird, um eine Einheit positiver Elektricität der elektrischen Kraft entgegen fortzubewegen. Die Einheit des Widerstandes ist, dem Ohm'schen Gesetze gemäss, derjenige Widerstand, der erforderlich ist, damit die Einheit der elektromotorischen Kraft die Einheit der Stromstärke hervorbringe. Die Dimensionen der elektromagnetischen Einheiten sind:

Dim. i = Feldintensität (Kraft dividiert durch Polstärke) · Länge $= M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}$,

Dim. Q = Stromintensität · Zeit $= M^{1/2} L^{1/2}$,

Dim. E = V = Arbeit : Elektricitätsmenge $= M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}$,

Dim. R = Dim. $E/i = L \cdot T^{-1}$,

Dim. C = Dim. $Q/V = L^{-1} \cdot T^{2}$.

Die Dimensionen stimmen nicht mit jenen nach dem elektrostatischen Masse überein; es ist z. B.

elektrostatische Dim. E = elektromagnetische Dim. $E/L \cdot T^{-1}$,
„ Dim. i = „ Dim. $i \cdot L \cdot T^{-1}$,
„ Dim. R = „ Dim. $R/L^2 \cdot T^{-2}$.

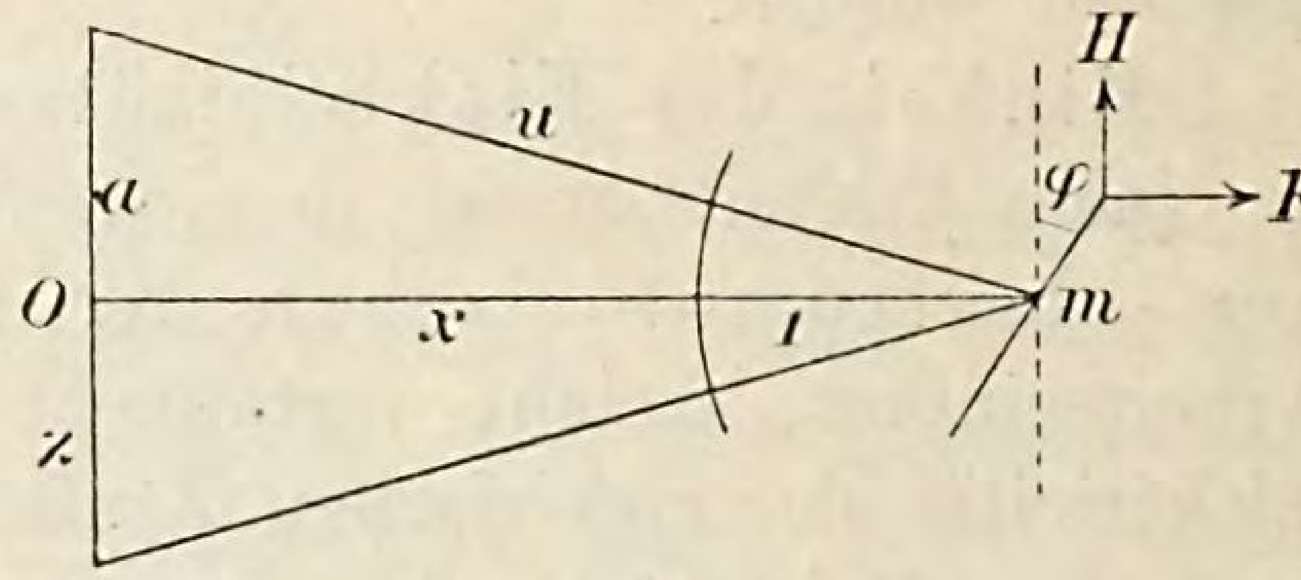
Die Dimensionen unterscheiden sich durch die Dimension einer Geschwindigkeit $v = L \cdot T^{-1}$; die Grösse derselben wurde zu $3 \cdot 10^{10}$ bestimmt. Die angegebenen „absoluten" Einheiten würden bei praktischer Anwendung theils zu grosse, theils zu kleine Zahlen ergeben, deshalb hat man sie durch folgende praktische Einheiten ersetzt:

1 Volt = 10^8 absolute Einheiten der elektromotorischen Kraft,
1 Ohm = 10^9 absolute Einheiten des Widerstandes,
1 Ampère = 10^{-1} absolute Einheiten der Stromstärke,
1 Coulomb = 10^{-1} absolute Einheiten der Elektricitätsmenge,
1 Farad = 10^{-9} absolute Einheiten der Capacität.

Man kann das praktische System als ein System von Einheiten betrachten, welche nicht aus den Grundeinheiten cm, g, sec abgeleitet sind, sondern den Erdmeridianquadranten $= 10^9$ cm, 10^{-11} g und 1 sec als Grundmasse enthalten.

§ 128. **Tangenten- und Sinusbussole** (Pouillet 1837). a) Die Tangentenbussole hat den Zweck, Stromintensitäten zu messen. Sie besteht aus einem oder mehreren Kreisströmen, die im magnetischen Meridiane aufgestellt sind, und aus einer kleinen Magnetnadel, deren Mittelpunkt in der Achse des Stromkreises gelegen ist. Sei (Fig. 86) $\varkappa$ ein Stromkreis und in der Entfernung x von demselben in m die kleine Magnetnadel, deren magnetische Massen $\pm m$ in den Polen vereint gedacht werden sollen. H gibt die Richtung der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus und F die Richtung der Kraft, mit welcher der Strom auf einen magnetischen Pol wirkt.

Fig. 86.



Die Nadel wird aus dem magnetischen Meridiane um den $\sphericalangle\,\varphi$ abgelenkt, bis die Drehungsmomente der wirkenden Kräfte einander gleich sind. Aus der Bedingung des Gleichgewichtszustandes lässt sich die Stromintensität i berechnen.

Die betreffende Bedingungsgleichung ergibt sich ganz allgemein aus der Summe der Wirkungen der einzelnen Stromelemente von $\varkappa$ auf die magnetischen Massen der Pole nach dem in § 124 und § 125 angegebenen Gesetze. Zur Vereinfachung nehmen wir die magnetischen Massen m in der Centrallinie im Abstande x von $\varkappa$ an. Die Wirkung des Stromkreises $\varkappa$ auf m ist der Einwirkung eines magnetischen Blattes von der Grösse $\varkappa$ und der Stärke i gleichwertig. Das Potential des Blattes im Polpunkte m, von wo aus der Kreis $\varkappa$ unter dem körperlichen Gesichtswinkel ω erscheint, ist

$$V = i \cdot \omega .$$

Die Grösse ω lässt sich als Calotte einer um m geschlagenen Kugel vom Halbmesser Eins bestimmen. Die zugehörige Pfeilhöhe ist aus zwei ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken leicht auffindbar; sie ist $\left(1 - \frac{x}{u}\right)$, wobei $u = \sqrt{a^2 + x^2}$. Daher wird

$$\omega = 2\pi\left(1 - \frac{x}{u}\right) \quad \text{und} \quad V = 2\pi \cdot i\left(1 - \frac{x}{u}\right).$$

Die auf die magnetische Masseneinheit in m wirkende Kraft F ergibt sich aus der Arbeit dV bei der Bewegung der magnetischen Masse um die verschwindend kleine Strecke dx.

Es ist

$$\frac{dV}{dx} = 2\pi \cdot i\left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}\right] = 2\pi \cdot i\frac{a^2}{u^3}.$$

Mit dieser Kraft wirkt ein Kreisstrom auf die magnetische Masseneinheit in m; sind n Kreiswindungen vorhanden, deren Länge $L = 2a\pi \cdot n$ ist, so wird der Ausdruck für die Kraft

$$F = n \cdot \frac{a^2}{u^3} \cdot 2\pi \cdot i = \frac{4\pi^2 \cdot n^2}{L} \cdot \left(\frac{a}{u}\right)^3 \cdot i.$$

Derselbe Wert folgt auch direct aus Biot-Savarts Gesetz.

Wenn die Nadel nur eine kleine Dimension hat, so kann man näherungsweise annehmen, dass sich dieselbe in einem homogenen Felde befindet und dass auf jede magnetische Masseneinheit eine Kraft von derselben Stärke wirkt. Die Richtung der Kräfte ist bei den beiden Polen entgegengesetzt. Auf der positiven Seite des Stromes, um welche der Strom im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers kreist, wird der Nordpol der Magnetnadel abgestossen, der Südpol dagegen angezogen und die Nadel erhält einen Ausschlag aus dem magnetischen Meridian um den Winkel φ. Im Gleichgewichtszustande müssen die Drehungsmomente der Kräfte H und F einander gleich sein; daher gilt die Gleichung

$$mF \cdot l \cdot \cos\varphi = m \cdot H \cdot l \cdot \sin\varphi,$$

woraus nach Substitution für F folgt

$$i = \frac{H \cdot L}{4\pi^2 \cdot n^2} \cdot \left(\frac{u}{a}\right)^3 \cdot \operatorname{tg}\varphi.$$

Die Stromstärke i ist der trigonometrischen Tangente des Ausschlagswinkels der Nadel proportional und daher hat der Apparat auch seinen Namen.

Befindet sich die Nadel in der Mitte des Kreises $\varkappa$, dann wird noch $u = a$ und der Ausdruck für i vereinfacht sich.

Man erhält in diesem Falle für die Kraft

$$F = \frac{n \cdot 2\pi \cdot i}{a} = \frac{L}{a^2} \cdot i.$$

Die Stromstärke i erscheint hier im elektromagnetischen Masse ausgedrückt; sie wird gleich F, wenn $L = 1$ und $a = 1$, d. h. die absolute Einheit der Stromstärke im elektromagnetischen Masse besitzt jener Strom, der beim Durchfliessen eines Drahtes von 1 cm Länge, der einen Bogen eines Kreises von 1 cm Radius bildet, auf einen Magnetpol von der Stärke Eins im Mittelpunkte des Kreises die Kraft Eins ausübt.

Die Stromstärke ist

$$i = \frac{H \cdot L}{4\pi^2 n^2} \cdot \operatorname{tg}\varphi.$$

Um dieselbe in absoluten Einheiten des elektromagnetischen Masssystemes zu erhalten, muss auch die Horizontalcomponente H des Erdmagnetismus und der „Reductionsfactor“ der Bussole in absoluten Einheiten (cm, g, sec) gemessen werden.

Die Ableitung des Wertes für die Stromstärke setzt ein homogenes magnetisches Feld in der Gegend der Magnetnadel voraus; diese Bedingung wird noch genauer erfüllt, wenn zwei Rahmen zu beiden Seiten der Nadel angewendet werden, welche zu einander parallel sind und in einem Abstande sich befinden, der dem gemeinschaftlichen Halbmesser gleichkommt. Für eine solche Bussole, die von Helmholtz construiert wurde, ist die angegebene Proportionalität zwischen i und $\operatorname{tg}\varphi$ strenge richtig. Gaugain hat (1853) einen solchen Rahmen zu gleichem Zwecke verwendet.

b) Ein Nachtheil der Tangentenbussole ist ihre geringe Empfindlichkeit. Derselbe wird beseitigt, wenn man die Bussole als Sinusbussole einrichtet. Bei dieser wird erst der Rahmen, um welchen die Drahtwindungen gewickelt sind, im magnetischen Meridian aufgestellt, alsdann aber, wenn der Strom kreist, der Nadel nachgedreht, bis er wieder mit derselben parallel steht. In diesem Falle ist die Stromstärke dem Sinus des Drehungswinkel der Nadel proportional.

Aufg. 1. Ein Strom fliesst durch die 72 Drahtwindungen einer Tangentenbussole, deren mittlerer Durchmesser 20 cm beträgt, und bewirkt an der kleinen Magnetnadel im Mittelpunkte eine Ablenkung von 35^0; die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus beträgt 0·23 Einheiten. Wie viel Ampère beträgt die Stromstärke? 1 Ampère = 0·1 absolute Einheit. — (0·0356.) **2.** Eine Batterie mit der elektromotorischen Kraft von 3 Volt gibt bei einem Gesammtwiderstande von 15 Ohm eine Ablenkung von 11^0 am Galvanometer. Welcher Widerstand ist hinzuzufügen, damit die Ablenkung nur 6^0 betrage? — (Aus $3/15 = c \cdot \operatorname{tg} 11^0$ und $3/(15 + r) = c \cdot \operatorname{tg} 6^0$ wird $r = 12{\cdot}7$.) **3.** Man hat eine Tangentenbussole und ein Voltameter zugleich in den Strom einer Batterie gebracht und beobachtet, dass die Magnetnadel um $\alpha = 20^0$ abgelenkt wurde und zugleich im Voltameter $i = 30$ cm³ Knallgas von 0^0 und 760 mm Druck in einer Minute entwickelt wurden. Wie viel cm³ Knallgas wird ein Strom, der die Nadel um 45^0 ablenkt, unter sonst gleichen Bedingungen entwickeln? — ($i_1 = 30 \operatorname{tg} 45/\operatorname{tg} 20 = 30 \operatorname{cotg} 20^0 = 82{\cdot}423$ cm³.) **4.** Von drei gleich dicken Eisendrähten ist der erste l m lang, der zweite um $a = 10$ m und der dritte um $b = 30$ m länger als der erste. Schliesst man mit dem ersten Drahte den Strom einer constanten galvanischen Kette und schaltet eine Tangentenbussole ein, so beobachtet man einen Ablenkungswinkel $\alpha_1 = 35^0$; für den zweiten Draht beträgt derselbe $\alpha_2 = 30^0$. Wie gross müsste derselbe für den dritten Draht sein? — (Ist der innere Widerstand der Kette r, so ist aus

$$(r + l + 10)/(r + l) = \operatorname{tg} \alpha_1/\operatorname{tg} \alpha_2$$

der Wert $r + l = 46{\cdot}992$ und dann folgt aus

$$\operatorname{tg} \alpha_3 / \operatorname{tg} \alpha_1 = (r + l)/(r + l + 30)$$

das gesuchte $\alpha_3 = 23^0\ 8'\ 27''$.) **5.** Um welchen Winkel lenkt ein Strom von 0·598 Ampère die Nadel einer Tangentenbussole ab, die 5 Drahtwindungen von 18 cm Radius besitzt? 1 Ampère $= 10^{-1}$ absol. Einh. und die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus $H = 0{\cdot}209$. — (Aus $0{\cdot}598/10 = 18 \cdot 0{\cdot}209 \cdot \operatorname{tg} \varphi / 2\pi \cdot 5$ folgt $\varphi = 26^0\ 32'$). **6.** Welches ist die Constante einer Tangentenbussole, die aus 32 kreisförmigen Drahtwindungen von 12 cm Halbmesser besteht, und wenn $H = 0{\cdot}209$ absol. Einheiten? — (Constante $C = 0{\cdot}209 \cdot 12/2\pi \cdot 32 = 0{\cdot}0125$ oder für Ampère-Messung 0·125.) [Nach Budde und Maiss.]

§ 129. **Energie und Arbeit eines Stromes im magnetischen Felde. Elektromagnetische Rotation.** a) Die Energie eines geschlossenen Stromes im magnetischen Felde wird durch denselben Ausdruck dargestellt, wie die Energie eines magnetischen Blattes im magnetischen Felde (§ 111c). Sie ist somit gegeben durch das Product aus der elektromagnetischen Intensität in die Kraft des Feldes auf die vom Strome begrenzte Fläche. Im einfachsten Falle ist die vom Strome umflossene Fläche S eben und normal zur Feldintensität $\mathfrak{H}$; ist diese constant, so ist die Energie

$$W = i \cdot S \cdot \mathfrak{H} = i \cdot \Phi .$$

Bei jeder anderen Richtung der Fläche S hat man für $S\mathfrak{H}$ die Zahl der die Fläche treffenden Kraftröhren oder die Kraftströmung Φ zu setzen.

Der Intensitätsfactor der Energie ist die Kraftröhrenzahl Φ, und der Extensitätsfactor ist wie bei jedem Strome die Stromstärke, als die Grösse, welche von einem Systeme zum anderen übergehen und die Energieverwandlung vermitteln kann. Bei der Bewegung des Stromes im Felde gibt die Änderung der potentiellen Energie die geleistete Arbeit an, nämlich

$$\Delta W = i \cdot \Delta \Phi .$$

Die Arbeit ist somit der Änderung der Kraftströmung oder der Änderung der Kraftlinienzahl proportional; sie wächst mit der Zahl der Kraftlinien.

Die potentielle Energie strebt stets einem Minimum zu, um einen Gleichgewichtszustand zu erreichen; ein elektrischer Strom wird daher durch Arbeitsleistung möglichst viele Kraftlinien, also das Maximum der Kraftströmung zu erreichen suchen. Dieser Satz gilt, sowohl wenn sich der ganze Stromleiter bewegt, als auch wenn ein Theil desselben beweglich ist. Der erste Fall tritt ein, wenn ein frei beweglicher Stromkreis, z. B. De la Rives schwimmende Batterie (§ 123) sich im erdmagnetischen Felde oder im Felde eines anderen Magnetes befindet. (Verhalten?) Der letztere Fall findet z. B. beim Barlowschen Rade statt. Hier ändert sich nicht die Lage der Stromebene,

sondern es bewegt sich ein Stromtheil. In dem Ausdrucke für die Arbeit ΔW bleiben i und $\mathfrak{H}$ constant, es ändert sich nur die Fläche um ΔS; damit wird

$$\Delta W = i \cdot \mathfrak{H} \cdot \Delta S.$$

Die Arbeit ist der Änderung der Fläche proportional.

Beim Barlow'schen Rade ist in dem Felde zwischen den Polen eines hufeisenförmigen Magnetes um eine horizontale Achse ein Zahnrad drehbar, dessen Zähne in ihren unteren Lagen nach einander in Quecksilber tauchen; ein elektrischer Strom geht von einer Elektricitätsquelle zum Quecksilber und von da von dem eintauchenden Zahn zur Achse des Rades und zur Stromquelle zurück. Das Rad wird durch den elektrischen Strom in Rotation versetzt. Die Arbeitsleistung hierbei wird durch die vorstehende Gleichung bestimmt, wenn wir annehmen, dass das magnetische Feld zwischen den beiden Polen gleichförmig ist und dass ein Zahn in dem Momente das Quecksilber berührt, in dem der vorhergehende dasselbe verlässt. ΔS ist dann die Fläche des Rades zwischen zwei Zähnen, für welche man näherungsweise setzen kann $\frac{1}{2} r^2 \cdot \varphi$. Die Arbeit für eine ganze Umdrehung ist

$$W' = i \cdot \mathfrak{H} \sum \Delta S = i \cdot \mathfrak{H} \cdot \frac{1}{2} r^2 \cdot \sum \varphi = i \cdot \mathfrak{H} \cdot r^2 \cdot \pi,$$

d. h. die Arbeit einer Rotation ist gegeben durch das Product aus der elektromagnetischen Intensität des Stromes, der Intensität des Feldes und dem Inhalte der Fläche des Rades.

Von dem Barlow'schen Rade wird als Faraday'sche Scheibe, beziehungsweise als Motor Anwendung gemacht.

b) Rotation eines Magnetes. Da ein geschlossener Strom ein magnetisches Feld erzeugt, in welchem die Kraftlinien um jeden Stromtheil in geschlossenen Curven laufen, so wird eine magnetische Masse in der Nähe eines solchen Stromes das Bestreben haben, längs der betreffenden Kraftlinien um die Strombahn zu rotieren. Bei jeder Umdrehung würde auf eine magnetische Masse m die Arbeit angewendet

$$W = 4m \cdot J \cdot \pi.$$

Die bezügliche Erscheinung kann in der Weise erhalten werden, dass man einen Magnet mit einem Pole so um einen geradlinigen Strom als Achse drehen lässt, wie etwa eine Leitstange bei der Dampfmaschine sich mit einem Ende um die Achse des Schwungrades dreht. Während der eine Pol sich im Kreise um den Strom bewegt, müsste der andere geradlinig längs einer Schiene hin und her geführt werden. Der Stromleiter, der als Rotationsachse durch den Mittelpunkt des Kreises geht, müsste natürlich durch einen beweglichen Contact dem Magnete bei jedem Umlaufe den Durchgang gestatten. In dem

vorstehenden Werte für die Arbeit einer Umdrehung wäre m die in dem rotierenden Pole vereint zu denkende magnetische Masse.

Ein langer, fadenförmiger und zugleich biegsamer Magnet würde seine Enden in entgegengesetzter Richtung um den nächsten Stromtheil herumwinden und darnach die Form einer Spirale bilden.

Ein gewöhnlicher starrer Magnet kann als Ganzes um einen starren Stromleiter nicht in Rotation versetzt werden. Es müssten nämlich alle magnetischen Massentheilchen des Magnetes eine gleiche Anzahl von Umdrehungen um den Strom ausführen; da jedes Massentheilchen die Arbeit $4\pi \cdot J \cdot m$ beansprucht, so wäre die Arbeit der Umdrehung des ganzen Magnetes

$$W = 4\pi J \Sigma m = 0.$$

Denn jeder Magnet enthält gleich viel nord- und südmagnetische Massentheilchen, die als positive und negative magnetische Massen zusammen genommen die algebraische Summe Null geben. Es tritt demnach in diesem Falle keinerlei Arbeitsleistung ein.

Eine Anordnung, bei welcher Magnete um Ströme rotieren, ist in dem bekannten elektromagnetischen Rotationsapparat von Faraday gegeben. Die Möglichkeit einer Rotation eines starren, verticalen Magnetes um einen nahen verticalen Strom wird hierbei dadurch erreicht, dass ein Stromtheil (nämlich der im Bügel vom geraden Leiter zur Quecksilberrinne) mit dem Magnete bewegt wird und dass ein Magnetpol ausserhalb des Feldes des geradlinigen Stromes zu liegen kommt. Die Rotation und die damit verbundene Arbeit erfolgt unter Einwirkung des geradlinigen Stromes und der Zweigströme in der Quecksilberrinne[1]), welche einen Theil einer Fläche begrenzen, die als magnetisches Blatt gedacht werden kann.

§ 130. **Magnetische Kraft der Spulen. Elektromagnete.** (Arago und Seebeck 1820.) a) Wenn man einen Draht in Form einer Spirale auf einen Cylindermantel aufwickelt, ihn dann parallel zur Richtung der Achse zurückführt und einen elektrischen Strom hindurchsendet, so hat man ein Solenoid zusammengestellt. Dieses elektrische System besitzt eine magnetische Wirkung, die sich nach aussenhin nur auf die Wirkung jener Theile des elektrischen Stromes reduciert, welche die beiden Drahtwindungen um die Cylinderbasen durchfliessen. Denn jede Drahtwindung kann durch einen der Basis parallelen Kreis ersetzt werden, und jeder Kreisstrom ist gleichwertig mit einem von ihm umflossenen magnetischen Blatte. Die beiden aneinanderliegenden, ungleichartig magnetischen Seiten je zweier benachbarten Blätter heben sich in ihren Wirkungen nach aussen auf, und es bleiben nur

1) G. Wiedemann, Die Lehre v. d. El. III. 175. — Maxwell, Lehrb. II. 175. — Wüllner, Experimentalphysik IV. — Müller etc.

die Aussenflächen des ersten und letzten magnetischen Blattes wirksam. Die Wirkung des Solenoides ist dieselbe, wie die eines gleichmässig magnetisierten Cylinders von gleicher Länge und entsprechendem magnetischen Momente.

Aus der magnetischen Wirkung der Kreisströme lässt sich die magnetische Dichte bestimmen, die den Basen des gleichartigen Magnetes zukommt, ebenso die Stärke des magnetischen Feldes oder die Zahl der Kraftröhren. Die dem Strome i entsprechende Magnetisierungsstärke der Basen ist im elektromagnetischen Masse

$$\Phi = \delta \cdot \sigma = i,$$

wenn δ die magnetische Dichte und σ die Dicke des Blattes, beziehungsweise die Entfernung je zweier Drahtwindungen angeben. Ist die Anzahl der Drahtwindungen auf der Längeneinheit n, so ist $\sigma = 1/n$, ferner

$$\delta = n \cdot i$$

und die magnetischen Mengen auf den Endflächen S gleich

$$\pm n \cdot i \cdot S.$$

Um die magnetische Kraftströmung im Inneren zu ermitteln, benützen wir die Arbeit, welche geleistet wird, wenn ein magnetischer Einheitspol die Ebene eines Kreisstromes durchsetzt. Dieselbe ergibt sich aus der Potentialdifferenz des Kreisstromes an seiner vorderen und hinteren Fläche; sie ist $2\pi i - (-2\pi i) = 4\pi i$. Bei einer Bewegung um die Strecke l von einer Cylinderbasis aus werden $n \cdot l$ Stromkreise durchsetzt, und die geleistete Arbeit ist $nl \cdot 4\pi i$. Ist die Feldstärke im Inneren des Solenoides $\mathfrak{H}$, so ist dieselbe Arbeit auch gegeben durch $\mathfrak{H} \cdot l$, und aus der Gleichheit beider Arbeitswerte folgt die Kraftströmung

$$\mathfrak{H} = 4\pi \cdot n \cdot i.$$

Damit wird die Anzahl der Kraftröhren durch einen Querschnitt S der Spule

$$F = 4\pi \cdot n \cdot i \cdot S.$$

Ist die Spule so lang, dass die Wirkung der Basen auf den betrachteten inneren Punkt keinen merklichen Einfluss übt, so beschränkt sich die magnetische Wirkung des Solenoides auf den Ausdruck F, und mit dieser Kraft wirkt die Spule auch auf ein Stück eingeführtes Eisen inducierend.

Hat das Solenoid die Ringform, so fallen die beiden Endflächen zusammen, die innere Wirkung ist durch den Wert F gegeben, und die gesammte Wirkung nach aussen ist gleich Null.

b) Magnetisierende Wirkung des Stromes. Befindet sich in der betrachteten Stromspule ein cylindrischer Eisenkern, so wird dieser durch Induction magnetisch; der Magnet heisst nach Sturgeon ein

Elektromagnet. Der Nordpol desselben wird vom Strome im entgegengesetzten Sinne der Uhrzeigerbewegung umflossen. Ist k der Coefficient der Magnetisierung (§ 112), so ist die Magnetisierungsstärke $k \cdot 4\pi n i$ und die magnetische Induction für den Querschnitt S

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} S = 4\pi n i (1 + 4\pi k) S,$$

oder wenn man von der praktischen Einheit Ampère durch Division der Stromstärke J durch 10 auf das absolute elektromagnetische System übergeht,

$$\mathfrak{B} = \frac{4}{10} \pi n J (1 + 4\pi k) S.$$

Die Induction ist demnach der Stärke des magnetisierenden Stromes und der Anzahl der Drahtwindungen auf der Längeneinheit proportional; sie ist unabhängig von der Dicke und dem Stoffe der Leitungsdrähte. Das Gesetz ist jedoch nur giltig, solange der Magnet von seinem Sättigungspunkte, dem Maximum seiner Intensität, noch weit entfernt ist. Bei der Annäherung an den Sättigungspunkt werden die Magnetisierungsstärke und die Induction allmählig constant.

Elektromagnete werden verwendet, weil der Eisenkern die magnetischen Kraftlinien zu sammeln vermag. Wäre das Eisen nicht vorhanden, so würden viele Kraftlinien rings um die einzelnen Theile des Leitungsdrahtes verlaufen und neben einander bestehen; da jedoch das Eisen einen grossen magnetischen Inductionscoefficienten besitzt, so nehmen die Kraftlinien in der Nähe des Eisens eine andere Gestalt an, sie bilden zusammenhängende Linien, welche durch den Eisenkern von einem Pole zum anderen führen und ausserhalb der Spule wieder von dem letzteren zum ersteren zurück.

Aufg. 1. Durch die Spule eines Elektromagnetes wurde einmal ein Strom von 2·5 Ampère, das anderemal einer von 10 Ampère gesendet. Wie vielmal war das magnetische Feld im zweiten Falle stärker als im ersten? — ($\mathfrak{H}_2 / \mathfrak{H}_1 = 10/2{\cdot}5 = 4$.) **2.** Ein Eisenkern wurde mit zwei Schichten Draht à 60 Windungen umgeben und durch letztere ein Strom von 1·5 Ampère geleitet. Dann wurde derselbe Kern mit 5 Schichten à 50 Windungen umgeben und nur 1 Ampère durchgeleitet. In welchem Verhältnisse hat sich sein magnetisches Moment geändert? —

$$(M_2 / M_1 = 5 \cdot 50 \cdot 1 / 2 \cdot 60 \cdot 1{\cdot}5 = 1{\cdot}39.)$$

3. Man berechne die Polstärke eines Elektromagnetes, dessen Kern 5 cm lang ist, der einen Querschnitt von 1 cm² und einen Coefficienten der magnetischen Induction $\mu = 200$ hat, und dessen Spulen 50 Windungen tragen, wenn er durch einen Strom von 2 Ampère ($= 2 \cdot 10^{-1}$ absoluten Einheiten) erregt wird. — (Für die Polstärke m gilt

$$4\pi m = \mu \mathfrak{H} S = \mu \cdot 4\pi \cdot n \cdot i \cdot 10^{-1} \cdot S = 200 \cdot 4\pi \cdot \frac{50}{5} \cdot \frac{2}{10};$$

daraus wird $m = 400$ absol. magn. Einh.)

§ 131. **Elektrodynamik. Potential zweier Ströme.** a) Alsbald nach Oersteds Entdeckung (1821) fand Ampère die Einwirkung zweier Ströme aufeinander. Mittelst Stromkreisen, die an einem Rahmen beweglich aufgehängt waren, wies er folgende Gesetze nach: 1) Zwei parallele nach derselben Richtung fliessende Stromtheile ziehen einander an; 2) zwei parallele nach entgegengesetzter Richtung fliessende Stromtheile stossen einander ab; 3) zwei Stromleiter, welche sich unter einem Winkel kreuzen, suchen sich parallel zu stellen: sie ziehen einander an, wenn beide Ströme entweder nach dem Kreuzungspunkte oder beide von ihm fortfliessen, und stossen einander ab, wenn einer nach jenem Punkte und der andere von ihm fortfliesst; 4) die Kraft der Wechselwirkung zweier Stromelemente ist dem Producte der Stromstärken, der Länge der Stromelemente direct und dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional. Ampère gab auch die Abhängigkeit der Kraft von den Lagenverhältnissen der Stromelemente genau an.

Diese Gesetze lassen sich begründen, indem man die betreffenden Ströme durch magnetische Blätter ersetzt denkt und deren Wechselwirkung betrachtet; z. B. zwei rechteckige, einander unmittelbar gegenüber befindliche Stromleiter mit gleichgerichteten Strömen werden ersetzt durch zwei in derselben Lagenbeziehung befindliche Blätter, die ihre ungleichartig magnetisierten Flächen einander zukehren. Beide Blätter ziehen einander an, daher ziehen auch parallele und gleich gerichtete Ströme einander an. In jedem Falle suchen sich die Stromkreise oder Leitertheile so zu stellen, dass jeder möglichst viele magnetische Kraftlinien des anderen umschliesst.

b) Der mathematische Ausdruck für das Potential zweier Ströme aufeinander hat dieselbe Form, wie das Potential zweier magnetischer Blätter, nämlich

$$W = -i_1 i_2 \cdot L.$$

L ist ein von Form und Lage der Stromkreise abhängiger Coefficient; er bedeutet das Potential beider Ströme aufeinander, wenn deren Stromstärken gleich Eins sind; er wird aus später zu ersehenden Gründen auch Inductionscoefficient genannt.

W heisst das elektrodynamische Potential der Ströme aufeinander; es bestimmt die Arbeit, um die beiden Ströme aus wirkungsloser Ferne in ihre gegenwärtige Lage zu bringen. $i_1 L$ ist die Zahl der Kraftröhren des Stromes i_1, welche auf die positive oder Nordseite des anderen Stromes eindringen und von diesem umfasst werden; ebenso ist $i_2 L$ die Zahl der Kraftröhren, welche der Strom i_1 einschliesst. Die betreffenden Kraftströmungen sind bei gleich gerichteten i_1 und i_2 negativ, und daher ist auch W negativ.

Die Änderung von W gibt die Arbeit an, welche bei einer Lagenänderung der Ströme geleistet wird. Andern sich die Kraftströmungen

durch die Leiterflächen beziehungsweise um $i_1 \cdot dL$ und $i_2 \cdot dL$, so ist die Arbeitsleistung $dW = - i_1 i_2 \cdot dL$.

Mittelst des Arbeitswertes kann man die Stärke F der Einwirkung beider Ströme aufeinander ermitteln. Wird ein kleines Wegelement dx in der Kraftrichtung zurückgelegt, so ist die geleistete Arbeit

$$dW = F \cdot dx = - i_1 i_2 \cdot dL$$

und die Kraft

$$F = - i_1 i_2 \cdot \frac{dL}{dx}.$$

Bei Berücksichtigung der Vorzeichen von i_1 und i_2 ergeben sich daraus die oben angeführten Wechselwirkungen der Ströme.

Die Bestimmung des Inductionscoefficienten L kann in einem einfachen Falle in folgender Weise geschehen[1]): Wir nehmen zwei Stromkreise an und denken uns dieselben ersetzt durch entsprechende magnetische Blätter. Das eine Blatt möge ein homogenes magnetisches Feld erzeugen, in welches das andere gebracht wird. Die Arbeit der Einführung des zweiten Blattes in dieses Feld kann auch durch die Magnetisierung desselben im Felde selbst geleistet werden. Bei der Magnetisierung des zweiten Blattes denken wir uns auf jeder Flächeneinheit die magnetische Dichte δ um die Strecke σ verschoben. Ist die Intensität des Feldes $\mathfrak{H}$ und ihr Neigungswinkel zur Normalen des zweiten Blattes α, so wird die Arbeit $\delta \cdot \sigma \cdot \mathfrak{H} \cdot \cos\alpha$ für jede Flächeneinheit geleistet. $\delta\sigma = \Phi$ ist die Stärke des Blattes; ist ferner die Blattfläche S, so ist die Arbeit $\Phi \cdot \mathfrak{H} . S \cdot \cos\alpha$. Setzt man hierin $\Phi = i_2$, so wird

$$W = - i_2 \cdot \mathfrak{H} \cdot S \cdot \cos\alpha.$$

Für einen Kreisstrom ist in der Nähe des Mittelpunktes $\mathfrak{H} = 2\pi i_1 / r_1$. Befindet sich daselbst ein zweiter, kleiner Kreis vom Halbmesser r_2, der vom Strome i_2 umflossen wird, so ist $S = r_2{}^2 \pi$ und

$$W = - i_1 i_2 \cdot \left(\frac{2\pi^2 \cdot r_2{}^2}{r_1} \cos\alpha \right).$$

Winkel α ist zugleich der Neigungswinkel beider Kreisebenen; daher lässt sich der Inductionscoefficient leicht aus folgender Form bestimmen:

$$L = \frac{2\pi^2 \cdot r_2{}^2}{r_1} \cos\alpha.$$

Die Übereinstimmung zwischen Kreisströmen und magnetischen Blättern ist keine vollständige. Als Unterschied muss geltend gemacht werden, dass bei den Strömen die Zahl der Kraftröhren geändert werden kann, ohne die Leiter zu bewegen, indem man die Stromintensität ändert; der Fall tritt beim Öffnen und Schliessen der

1) E. Mach, Grundriss der Naturlehre. S. 235.

Ströme ein. Eine ähnliche Erscheinung fehlt bei den magnetischen Blättern.

c) Potential eines Stromes auf sich selbst. Man kann annehmen, dass bei der Annäherung eines Stromes an einen anderen Kräfte des einen auf die einzelnen Elemente des anderen wirken und Arbeit leisten. Das Potential beider Ströme stellt dann die Summe aller diesbezüglichen Arbeiten dar. Es wirkt nun auch ein Stromkreis auf die Elemente seines eigenen Leiters, und alle die betreffenden Kräfte haben ein Potential; sämmtliche Potentiale setzen das Potential des Stromes auf sich selbst zusammen. Der Ausdruck dafür ist ähnlich dem des obigen Potentiales zweier Ströme, nämlich

$$W = -\frac{1}{2} i^2 \cdot L .$$

Der Factor $\frac{1}{2}$ ist erforderlich, weil bei der Summierung der Potentiale je zweier Stromelemente jedes Elementenpaar zweimal gezählt wird.

Bei einer Deformation des Stromleiters durch Bewegung seiner Theile wird eine Arbeit $dW = -\frac{1}{2} i^2 \cdot dL$ geleistet.

d) Das gesammte Potential zweier Ströme besteht, analog wie das gesammte Potential zweier elektrischer Conductoren, aus dem Potentiale jedes Stromes auf sich selbst und aus dem elektrodynamischen Potentiale W_{12}; es ist daher die absolute Grösse

$$W = W_1 + W_2 + W_{12} = \frac{1}{2} i_1^2 L_1 + \frac{1}{2} i_2^2 L_2 + i_1 i_2 L_{12} .$$

Als Energiewert lässt sich der Ausdruck in die beiden auf die einzelnen Stromkreise entfallenden Theile zerlegen (vgl. § 99), nämlich in

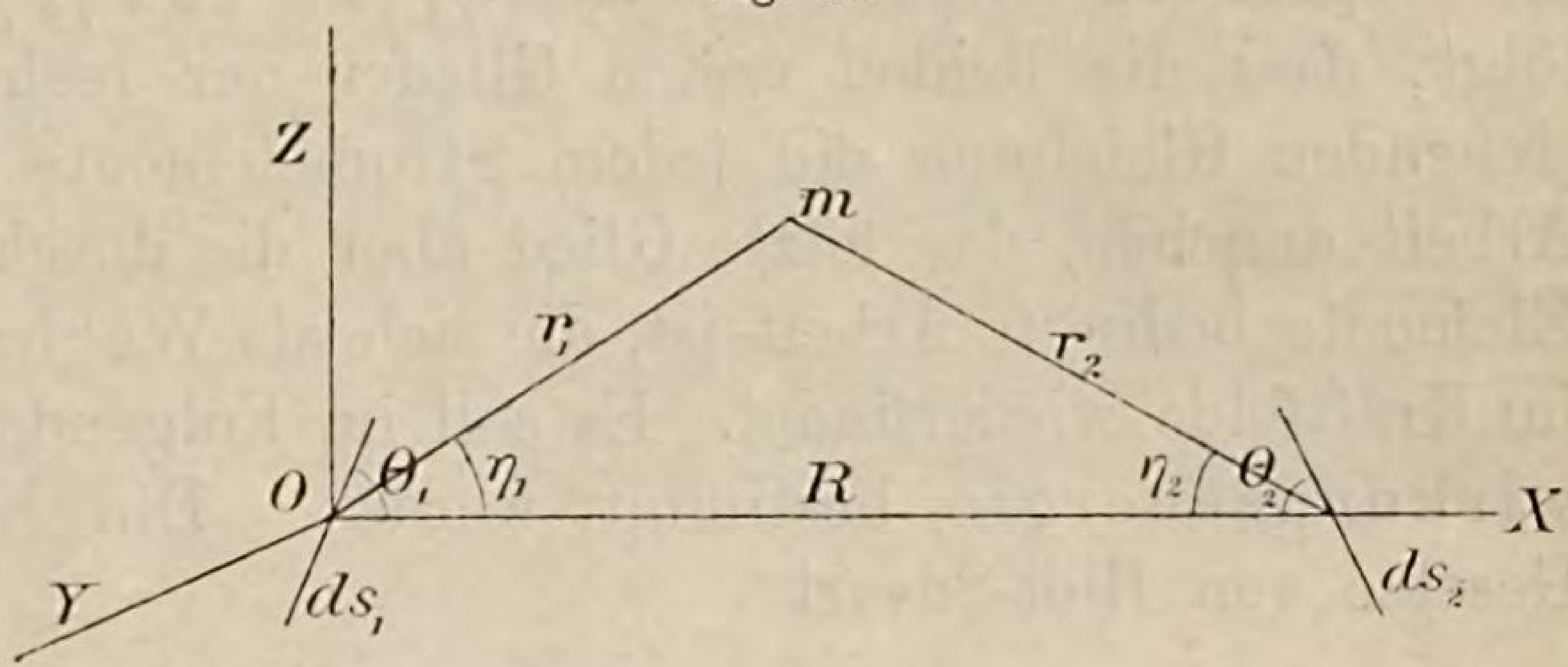
$$W' = i_1 \cdot \frac{1}{2} (i_1 L_1 + i_2 L_{12}) \quad \text{und} \quad W'' = i_2 \cdot \frac{1}{2} (i_2 L_2 + i_1 L_{12}) .$$

Hierin sind die Klammergrössen, das sind die Zahlen der von den Strömen umflossenen Kraftlinien, die Intensitätsfactoren und die Stromstärken die Extensitätsfactoren der Energie.

e) Ampères Theorie des Magnetismus. Auf die übereinstimmende Wirkung eines Solenoides mit der eines Magnetes gestützt, erklärte Ampère alle Magnete als Vereinigung von elektrischen Strömen und stellte die Hypothese auf, dass um jedes einzelne Molecül eines Magnetes beständig ein elektrischer Strom kreist. Die Dauer des magnetischen Zustandes fordert die Annahme, dass die Ströme ohne Widerstand circulieren. Die Ampère'sche Hypothese führt daher zu der Anschauung, dass die Molecüle — sie zeigen alle magnetisches Verhalten — aus rotierender elektrischer Materie bestehen. Damit steht die im § 72b vertretene Wirbeltheorie im Einklange. (Vgl. auch § 125.)

§ 132. Energie im Felde zweier Ströme. Elektrodynamisches Grundgesetz. a) Jeder elektrische Strom erzeugt ein magnetisches Feld um sich; die dazu erforderliche Arbeit kann man in der Weise verrichtet denken, dass die auf jedes Raumelement des Feldes nach dem Biot-Savart'schen Gesetz wirkende Kraft eine magnetische Verschiebung hervorbringt. Die betreffende Arbeitsleistung findet sich als potentielle Energie im Stromfelde vor, solange der constante Strom kreist. Behufs Ermittelung des Ampère'schen elektrodynamischen Grundgesetzes sollen zwei Stromelemente betrachtet und die durch dieselbe geleistete Arbeit der magnetischen Verschiebung im Felde berechnet werden[1]). Die Elemente, deren Stromstärken i_1 und i_2 sind, haben die Längen ds_1 und ds_2 (Fig. 87). Die Entfernung ihrer Mittelpunkte sei R. Um die Lage der Elemente anzugeben, wählen wir ein Coordinatensystem so, dass die Ebene $(R ds_1)$ die XZ-Ebene wird. Ferner sei

Fig. 87.



$$\sphericalangle (R ds_1) = \Theta_1, \quad \sphericalangle (R ds_2) = \Theta_2, \quad \sphericalangle (R r_1) = \eta_1, \quad \sphericalangle (R r_2) = \eta_2 .$$

Dem Biot-Savart'schen Gesetze gemäss kann die Wirkung des Stromelementes ds_1 ersetzt werden durch die Wirkung von zwei Componenten, welche in die Achsenrichtungen fallen, deren Längen beziehungsweise sind: $ds_1 \cos \Theta_1$ und $ds_1 \sin \Theta_1$. Die Wirkung von ds_2 kann ersetzt werden durch die drei Componenten längs der Achsen; deren Längen sind $ds_2 \cos \Theta_2$, $ds_2 \sin \Theta_2 \cos \omega$ und $ds_2 \sin \Theta_2 \sin \omega$, wenn $\sphericalangle\, \omega = \sphericalangle\, [(X ds_2), (XZ)]$ ist.

Jedes Stromelement wirkt nun auf ein Raumelement m, ruft eine magnetische Verschiebung σ hervor und wirkt mit einer Kraft f, die Kraft ist der Verschiebung proportional; daher kann für die geleistete Arbeit pro Raumeinheit gesetzt werden

$$w = \frac{1}{2} f \sigma = \frac{1}{2} k \sigma^2 = \frac{1}{2k} f^2.$$

Der Ausdruck kann im rein magnetischen Sinne, aber auch im Sinne der Volumenergie oder der Elasticitätstheorie gedeutet werden. (Vgl. § 53, § 100d und § 113.) Die Kraft f wird durch das Biot-Savart'sche Gesetz bestimmt.

Wir fassen nun zuerst die beiden längs der Verbindungslinie R liegenden Stromcomponenten in $ds_1 \cos \Theta_1$ und $ds_2 \cos \Theta_2$ ins Auge.

1) J. Stefan, Wiener Ber. Bd. 70. Heft 4 und 5.

Jede der beiden hat in m eine zu (XZ) normale Verschiebung zur Folge; beide Verschiebungen wirken in gleichem Sinne, wenn die Elemente in gleicher Richtung durchströmt werden. Sind die beiden Kräfte f_1 und f_2, dann ist die Resultierende

$$f = f_1 + f_2$$

und die Arbeit ist

$$\frac{1}{2k} f^2 = \frac{1}{2k}(f_1^2 + f_2^2 + 2 f_1 f_2).$$

Wäre jedes Stromelement nur für sich allein vorhanden, dann wären die respectiven Arbeitsleistungen $f_1^2/2k$ und $f_2^2/2k$; mit Bezug darauf folgt, dass die beiden ersten Glieder der rechten Seite in der vorstehenden Gleichung die jedem Stromelemente für sich zukommende Arbeit angeben, das letzte Glied aber die durch die Coëxistenz beider Elemente bedingte Arbeit ist, die sich als Wechselwirkungsenergie im Kraftfelde wiederfindet. Es soll im Folgenden nur diese Wechselwirkungsenergie bestimmt werden. Die Kräfte sind nach dem Gesetze von Biot-Savart

$$f_1 = \frac{i_1 \cdot ds_1 \cdot \cos \Theta_1}{r_1^2} \sin \eta_1$$

und

$$f_2 = \frac{i_2 \cdot ds_2 \cdot \cos \Theta_2}{r_2^2} \sin \eta_2 .$$

Dieselben Kräfte bestehen in allen Punkten eines Kreises, der von m bei einer Rotation um R beschrieben wird; man darf daher die Kraft auf ein Raumelement beziehen, das auf einer unendlich schmalen Zone der Kugel mit dem Mittelpunkte in ds_1 und dem Radius r_1 gelegen ist. Das Raumelement hat die Grösse $2 r_1^2 \pi \sin \eta_1 \cdot d\eta_1 \cdot dr_1$. Auf dasselbe entfällt die Wechselwirkungsenergie

$$w_1 = \frac{1}{k} f_1 f_2 \cdot dv$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2 \cos \Theta_1 \cos \Theta_2}{r_1^2 r_2^2} \sin \eta_1 \sin \eta_2 \cdot 2 r_1^2 \pi \sin \eta_1 \cdot d\eta_1 dr_1 .$$

Behufs Vereinfachung dieses Wertes lassen wir im $\triangle (r_1 r_2 R)$ die Seite r_2 an r_1 um die Strecke dr_1 fortbewegen; alsdann vergrössert sich die Fläche des Dreieckes um

$$d\left(\frac{1}{2} r_1 R \sin \eta_1\right) = \frac{1}{2} R \sin \eta_1 dr_1 .$$

Der Zuwachs der Fläche ist aber auch $\frac{1}{2} r_2^2 d\eta_2$; daher ist

$$R \sin \eta_1 \,.\, dr_1 = r_2^2 \cdot d\eta_2$$

und damit wird

$$w_1 = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2 \cos \Theta_1 \cos \Theta_2}{R} \sin \eta_1 \sin \eta_2 \cdot d\eta_1 d\eta_2 .$$

Die Summierung dieser Elementararbeit ist auszuführen nach η_1 von 0 bis π und nach r_1 von 0 bis ∞; darnach bestimmt sich die Grenze von η_2: für $r_1 = 0$ wird $\eta_2 = 0$ und für $r_1 = \infty$ wird bei bestimmtem η_1 Winkel $\eta_2 = \eta_1$. Nun erhält man

$$w_1 = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2 \cos\Theta_1 \cos\Theta_2}{R} \int\limits_0^\pi \sin\eta_1 \, d\eta_1 \int\limits_0^{\eta_1} \sin\eta_2 \, d\eta_2$$

$$= \frac{4\pi}{k} \cdot \frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2 \cos\Theta_1 \cos\Theta_2}{R}.$$

Dies ist der Wert der Energie, welche durch die Coëxistenz der zu X parallelen Stromelemente bedingt ist.

Wir bestimmen nun die Energie des Feldes infolge der Stromelemente, welche zur Z-Achse parallel sind. Die Längen derselben sind: $ds_1 \sin\Theta_1$ und $ds_2 \sin\Theta_2 \cos\omega$. Die magnetischen Kräfte im Raumelemente m sind nach dem elektromagnetischen Grundgesetz, und zwar die des ersteren Stromelementes

$$f_1' = \frac{i_1 ds_1 \sin\Theta_1}{r_1^2} \sin\eta_1', \quad \sphericalangle\, \eta_1' = \sphericalangle\, (Zr_1).$$

Die Kraft wirkt normal zur Ebene (mZ) im Sinne einer Rotation um Z. — Die Kraft des zweiten parallelen Elementes ist

$$f_2' = \frac{i_2 ds_2 \sin\Theta_2 \cos\omega}{r_2^2} \sin\eta_2', \quad \sphericalangle\, \eta_2' = \sphericalangle\, (r_2 Z).$$

Die Kraft wirkt im Sinne einer Rotation um die zu Z parallele Stromcomponente von ds_2.

Die Kräfte f_1' und f_2' wirken in einer zu Z normalen Ebene. Der Neigungswinkel ihrer Richtungen ist gegeben durch die zu ihnen normalen, vertical projicierenden Ebenen, welche beziehungsweise durch den Punkt m und die beiden verticalen Stromelemente hindurchgehen; schliessen diese Ebenen mit der Ebene (XZ) beziehungsweise die Winkel α_1 und α_2 ein, so ist

$$\sphericalangle\, (f_1' f_2') = \alpha_1 + \alpha_2,$$

und die Resultierende von f_1' und f_2' ist

$$f_1'^2 + f_2'^2 + 2 f_1' f_2' \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Analog wie oben sind auch hier dem Quadrate der Kräfte die Arbeiten derselben proportional. Die beiden ersten Glieder bestimmen die Arbeitswerte der betrachteten, zu Z parallelen Stromelemente, wenn jedes Element für sich allein im Felde vorhanden wäre; das letzte Glied gibt den Arbeitswert infolge der Coëxistenz beider Elemente, dessen äquivalente Energie die Wechselwirkungsenergie bestimmt. Für diese besteht daher pro Volumseinheit der Ausdruck

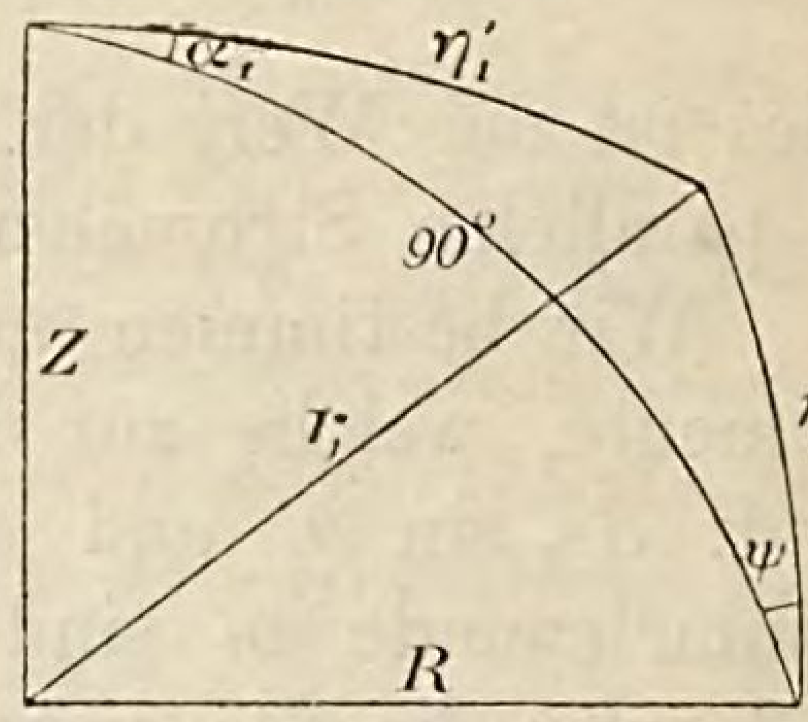
$$\frac{1}{k} \cdot f_1' f_2' \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \frac{i_1 i_2 \, ds_1 \, ds_2 \sin\Theta_1 \sin\Theta_2 \cos\omega}{r_1^2 r_2^2} \sin\eta_1' \sin\eta_2' \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Zum Ersatz der Winkel η_1', η_2', α_1 und α_2 durch $\sphericalangle (R r_1) = \eta_1$, $\sphericalangle (R r_2) = \eta_2$ und $\sphericalangle \psi$, welchen die Ebene des Dreieckes $(r_1 r_2 R)$ mit (XZ) bildet, suchen wir Beziehungsgleichungen aus dem sphärischen Dreiecke (R, r_1, Z) (Fig. 88). Wir erhalten

$$\cos\eta_1 = \cos\eta_1' \cos 90 + \sin\eta_1' \sin 90 \cos\alpha_1$$
$$= \sin\eta_1' \cos\alpha_1 .$$

Fig. 88.



Analog ist

$$\cos\eta_2 = \sin\eta_2' \cos\alpha_2 .$$

Ferner ist

$$\sin\eta_1 : \sin\eta_1' = \sin\alpha_1 : \sin\psi,$$

also

$$\sin\alpha_1 \cdot \sin\eta_1' = \sin\eta_1 \cdot \sin\psi$$

und analog

$$\sin\alpha_2 \cdot \sin\eta_2' = \sin\eta_2 \cdot \sin\psi .$$

Daraus erhält man

$$\sin\eta_1' \sin\eta_2' \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos\eta_1 \cos\eta_2 - \sin\eta_1 \sin\eta_2 \sin^2\psi .$$

Als Raumelement setzen wir ein Prisma, dessen Seiten sind

$$r_1 \sin\eta_1 d\psi, \quad r_1 d\eta_1 \quad \text{und} \quad dr_1 .$$

Für ein solches ist die Energie

$$w_2 = \frac{1}{k} \cdot \frac{i_1 i_2 \sin\Theta_1 \sin\Theta_2 \cos\omega}{r_1^2 r_2^2} \cdot ds_1 \cdot ds_2$$
$$\cdot (\cos\eta_1 \cos\eta_2 - \sin\eta_1 \sin\eta_2 \sin^2\psi) \cdot r_1^2 \sin\eta_1 d\eta_1 \, d\psi \, dr_1 .$$

Wie oben ergibt sich auch hier für eine kleine Drehung der Dreiecksseite r_2 die Beziehung

$$R \sin\eta_1 dr_1 = r_2^2 d\eta_2$$

und damit wird

$$w_2 = \frac{1}{k} \cdot \frac{i_1 i_2 \sin\Theta_1 \sin\Theta_2 \cos\omega}{R} \cdot ds_1 \cdot ds_2$$
$$\cdot \left\{ \int_0^\pi \cos\eta_1 d\eta_1 \int_0^{\eta_1} \cos\eta_2 d\eta_2 - \int_0^{2\pi} \sin^2\psi \, d\psi \int_0^\pi \sin\eta_1 d\eta_1 \int_0^{\eta_1} \sin\eta_2 d\eta_2 \right\}$$
$$= \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{i_1 i_2 \sin\Theta_1 \sin\Theta_2 \cos\omega}{R} \cdot ds_1 \cdot ds_2 .$$

In ähnlicher Weise kann man die Wechselwirkungsenergie der übrigen Paare von Stromelementen berechnen; bei jedem derselben ist eines normal zum anderen. Für solche Stromelemente ergibt nun die Rechnung, übereinstimmend mit dem Versuche, dass die Wechselwirkungsenergie gleich Null ist.

Die gesammte Wechselwirkungsenergie der gegebenen Stromelemente reduciert sich daher auf die abgeleiteten Energiewerte w_1 und w_2; ihre Summe gibt das Resultat:

$$w = \frac{4\pi}{k} \cdot \frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2}{R} \left(\cos \Theta_1 \cos \Theta_2 + \frac{1}{2} \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \cos \omega\right).$$

Führt man anstatt ω den Winkel ε ein, welchen die Richtungen der beiden Stromelemente mit einander einschliessen, und welcher durch die Gleichung

$$\cos \varepsilon = \cos \Theta_1 \cos \Theta_2 + \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \cos \omega$$

bestimmt ist, so kann man w auch wie folgt ausdrücken:

$$w = \frac{4\pi}{k} \cdot \frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2}{2R} (\cos \varepsilon + \cos \Theta_1 \cos \Theta_2).$$

Um die Energie zweier geschlossener Stromleiter zu erhalten, hat man den Ausdruck längs der Stromleiter s_1 und s_2 zu summieren. Für geschlossene Stromleiter haben die Integrale

$$\frac{\cos \varepsilon \cdot ds_1 ds_2}{R} \quad \text{und} \quad \frac{\cos \Theta_1 \cos \Theta_2 \cdot ds_1 ds_2}{R}$$

gleiche Werte, daher kann man für den Fall geschlossener Leiter schreiben

$$w = \frac{4\pi}{k} \cdot \frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2 \cos \varepsilon}{R}.$$

Dies ist der von F. Neumann angegebene Potentialausdruck für zwei Elemente zweier geschlossener linearen Ströme, wenn man $4\pi/k = 1$ setzt; diese Specialisierung stimmt mit den Lehren des Magnetismus § 113 und ebenso auch mit der Theorie der Ätherverschiebung (§ 53) überein.

Für vollständig geschlossene Ströme erhält man das Potential

$$W = i_1 i_2 \int\int \frac{\cos \varepsilon \, ds_1 ds_2}{R}.$$

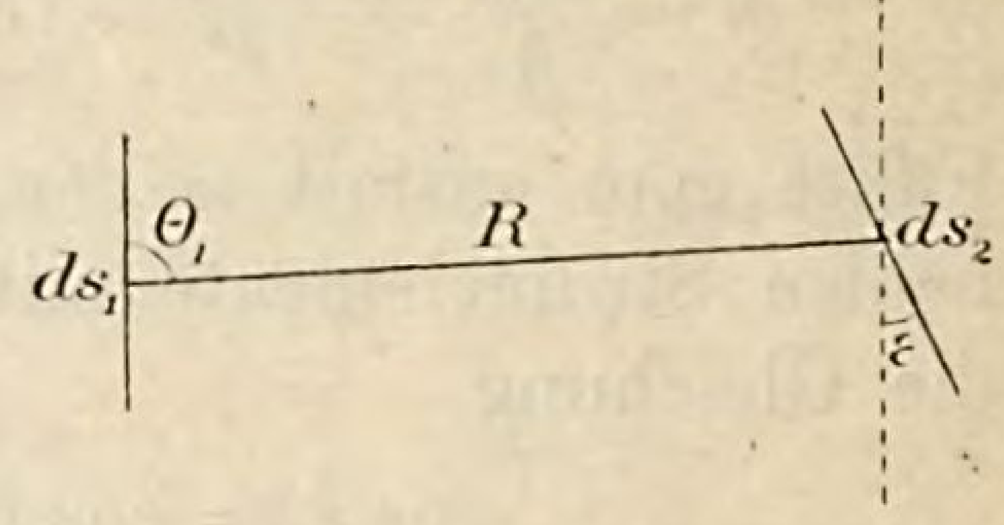
Vergleicht man diesen Wert mit dem für dieselbe Grösse in § 131 b, so folgt für den Coefficienten der gegenseitigen Induction

$$L = \int\int \frac{\cos \varepsilon}{R} ds_1 ds_2.$$

b) Das Neumann'sche Potential kann leicht gewonnen werden, wenn man annimmt, dass in der Stromrichtung eine zur Stromstärke proportionale elektrische Verschiebung oder Elektrisierung stattfindet. In Fig. 89 seien ds_1 und ds_2 zwei Stromelemente in der Entfernung R. Denken wir uns den Strom i_1 als Convectionsstrom, hervorgebracht durch Bewegung eines kleinen elektrischen Conductors längs ds_1, so ist ersichtlich, dass die Beziehungen zwischen den beiden Stromelementen dieselben bleiben, wenn der Conductor in ds_1 festgehalten

und ein Conductor längs ds_2 in entgegengesetzter Richtung von i_1 bewegt wird; wir wollen deshalb die Einwirkung des ersten auf das zweite Stromelement durch Bewegung von ds_2 parallel zu ds_1 in entgegengesetzter Richtung von i_1 ersetzt denken. Die elektrische Verschiebung des zweiten Elementes in dieser Richtung ist $i_2 ds_2 \cos \varepsilon$, und für jede Elektricitätseinheit ist die Kraft des Conductors ds_1 in dieser Richtung

Fig. 89.



$$i_1 ds_1 \cos \Theta_1 / R^2;$$

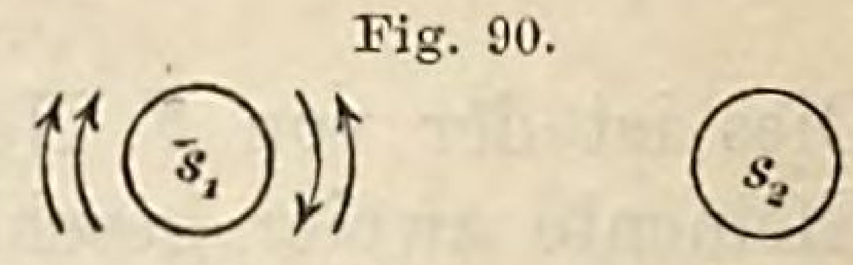
die gesammte Kraft ist daher $i_1 i_2 ds_1 ds_2 \cos \varepsilon \cos \Theta_1 / R^2$.

Wirkt nun in der Richtung R die Kraft f, so ist die Componente in der gedachten Verschiebungsrichtung $f \cos \Theta_1$, und diese ist der berechneten Kraft gleich; daher erhält man die der gesuchten Form entsprechende Kraft

$$f = \frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2}{R^2} \cos \varepsilon .$$

c) Aus den Kräften im Felde erklärt sich die Wirkungsweise zweier Ströme aufeinander analog wie die Einwirkung eines Magnetpoles auf ein Stromelement oder umgekehrt (§ 125)[1]). Fliessen die Ströme in den Elementen s_1 und s_2 (Fig. 90) in gleicher Richtung normal zur Zeichnungsebene von oben nach unten, dann verlaufen die Kraftlinien um jedes Element im Sinne des Uhrzeigers und man sieht bald, dass die Kraftwirkungen der beiden Elememente auf ihren inneren Seiten sich gegenseitig abschwächen, auf ihren äusseren Seiten dagegen verstärken. Die Überdrucke der äusseren Kräfte treiben die Stromelemente zu einander, die Ströme scheinen einander anzuziehen. — Für Ströme in entgegengesetzter Richtung ergibt sich in ähnlicher Weise die Tendenz der Abstossung.

Fig. 90.



§ 133. **W. Webers Elektrodynamometer** (1846). Um das Princip dieses Apparates zu erklären, nehmen wir einen festen elektrischen Kreisstrom an, in dessen Mitte ein zweiter, bedeutend kleinerer Kreisstrom sich befindet. Der letztere Stromkreis ist an einem Coconfaden beweglich aufgehängt. Wir bestimmen die Arbeit, welche bei der Drehung des zweiten Kreises geleistet wird. In der Mitte des ersten Kreises ist die Intensität des magnetischen Feldes, wenn die Stromstärke i_1 und der Kreishalbmesser r_1 sind (nach § 128),

$$\Phi = \frac{2 \pi i_1}{r_1} .$$

Das Potential beider Kreisströme ist (§ 129 und § 131)

1) Siehe meine Schrift über das Energieprincip in d. El. S. 154. (1887.)

$$W = -\frac{2\pi^2 r_2^2 \cdot i_1 i_2}{r_1}.$$

Nach einer Drehung des kleinen Kreises um den Winkel φ ist das Potential

$$W' = -\frac{2\pi^2 r_2^2 \cdot i_1 i_2}{r_1} \cos\varphi.$$

Die auf die Winkeleinheit entfallende Arbeitsleistung gibt das Drehungsmoment D; dasselbe ist somit

$$D = \frac{dW'}{d\varphi} = \frac{2\pi^2 r_2^2}{r_1} i_1 i_2 \sin\varphi.$$

Sind anstatt der Stromkreise Spulen, die beziehungsweise mit n_1 und n_2 Drahtwindungen umwickelt sind, in Verwendung, so wird

$$D = \frac{2\pi^2 r_2^2}{r_1} \cdot n_1 n_2 \cdot i_1 i_2 \cdot \sin\varphi.$$

Webers Elektrodynamometer besteht nun aus zwei Spulen von der angegebenen Art, von denen die kleinere die Rolle einer Galvanometernadel übernimmt. Zu Anfang des Versuches werden die Achsen beider Spulen normal zu einander eingestellt, sodann wird derselbe Strom durch die Drahtwindungen beider Spulen gesendet. Die zweite Spule wird sich der ersten parallel zu stellen suchen und eine Drehung um $\sphericalangle\, \delta = 90^0 - \varphi$ erfahren. Der Stromwirkung wird durch die Torsionselasticität $C \cdot \delta$ des Aufhängefadens und die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus $\mathfrak{H}$, welche in der ursprünglichen Achsenrichtung der Spule wirkt, das Gleichgewicht gehalten. Daher besteht die Gleichung

$$\frac{2\pi^2 r_2^2}{r_1} \cdot n_1 n_2 i^2 \cdot \cos\delta = C\delta + r_2^2 \pi i \mathfrak{H} \sin\delta.$$

Daraus kann die Stromstärke i bestimmt werden.

Um die Drehung der beweglichen Spule leicht ablesen zu können, wird dieselbe mit einem Spiegel verbunden, der die Bewegung eines Lichtbildes erzeugt.

Nach dem Principe des Elektrodynamometers werden auch elektrodynamische Wagen construiert: Eine Spule ist an dem Wagebalken einer Wage aufgehängt; die andere bleibt fest. Werden die Drahtwindungen beider Spulen von demselben Strome durchflossen, so ist die Kraft der Wechselwirkung, welche durch ein Gewicht am Ende des anderen Wagebalkenarmes bestimmt wird, dem Quadrate der Stromstärke proportional.

X. Volta- und Magneto-Induction.

§ 134. **Grundversuche.** Faraday machte (1831) die Entdeckung, dass in einem geschlossenen Leiter Ströme erregt werden, wenn man in seiner Nähe Magnete bewegt, oder wenn man Stromleiter einem Magnete nähert oder von ihm entfernt. Faraday verfolgte diese Entdeckung weiter und stellte bald auch fest, dass sich durch elektrische Ströme secundäre Ströme inducieren lassen. Die betreffenden Versuche lassen sich deutlich und bequem mit einer Spule, die mit einem isolierten Draht umwickelt ist, ausführen. Der Draht ist mit einem Galvanometer verbunden. In die Spule kann eine andere, kleinere Spule, durch deren Drahtwindungen der Hauptstrom geleitet wird, oder ein Magnet oder ein Stück weiches Eisen eingeführt werden. Mit Hilfe dieser einfachen Mittel lassen sich nun folgende Erregungsweisen der Inductionsströme demonstrieren: 1) Beim Annähern des die kleinere Spule umfliessenden Hauptstromes entsteht im Drahte der äusseren Spule ein Inductionsstrom in der entgegengesetzten Richtung des Hauptstromes; 2) beim Entfernen des Hauptstromes kreist ein Inductionsstrom mit dem ersteren in gleicher Richtung; 3) beim Schliessen des Hauptstromes entsteht ein Inductionsstrom in der entgegengesetzten Richtung des Hauptstromes; 4) beim Öffnen des Hauptstromes kreist ein Inductionsstrom mit jenem in gleicher Richtung; 5) beim Annähern eines Magnetes, 6) beim Entfernen eines Magnetes, 7) beim Erregen von Magnetismus und 8) beim Verschwinden von Magnetismus entsteht jedesmal ein Inductionsstrom von kurzer Dauer. Die Richtung der Inductionsströme in den letzten vier Fällen lässt sich nach den ersten vier Fällen bestimmen, wenn man den Magnet durch ein Solenoid ersetzt denkt.

Die Induction durch elektrische Ströme heisst Galvanische oder Volta-Induction und die durch Magnete Magneto-Induction. Inductionsströme im Leiter des eigenen Stromes werden Extraströme genannt.

Zieht man die Wechselwirkung der Inductionsströme mit den Hauptströmen, beziehungsweise mit den inducierenden Magneten in Betracht, so wird man leicht auf die Geltung des Energieprincipes geführt. Mit Rücksicht auf diese Wechselwirkung hat Lenz (1834)

folgendes allgemeine Gesetz aufgestellt: In allen Fällen der Induction haben die inducierten Ströme eine solche Richtung, dass ihre Gegenwirkung die sie erzeugende Bewegung zu hemmen strebt. Es muss also bei der Erregung jedes Inductionsstromes eine Arbeit geleistet werden und die elektrische Energie des Inductionsstromes erscheint als das Äquivalent der geleisteten Arbeit.

Setzt man das Energieprincip als giltig voraus, so kann daraus die Richtung der Inductionsströme gefolgert werden. Es kann dann ohneweiters geschlossen werden, dass bei Annäherung eines Leiters an einen Hauptstrom ein Strom in entgegengesetzter Richtung induciert werden muss, weil nur bei parallelen und entgegengesetzt gerichteten Strömen eine Abstossung besteht, die bei der Annäherung durch eine Arbeit zu überwinden ist. Beim Entfernen des Leiters vom Hauptstrome muss ein gleich gerichteter Strom induciert werden, weil dieser angezogen wird und eine anziehende Kraft durch die Arbeit des Entfernens der Ströme von einander überwunden werden muss.

Die Richtung des Inductionsstromes kann auch aus der Richtung der magnetischen Kraftlinien im Felde und aus der Bewegungsrichtung des secundären Leiters ermittelt werden. J. Stefan hat hierfür eine der Ampère'schen Schwimmerregel ähnliche Regel angegeben, die eine menschliche Figur zuhilfe nimmt. Auch die Fleming'sche Dreifinger-Regel kann benützt werden, nur muss man die rechte Hand anwenden, um dem Lenz'schen Gesetze zu entsprechen; die Regel lautet alsdann: Weist der Zeigefinger der rechten Hand in der Richtung der magnetischen Kraftlinien, der Daumen in der Bewegungsrichtung des Stromleiters, so gibt der normal zu beiden Fingern gerichtete Mittelfinger die Richtung des Inductionsstromes an.

§ 135. **Inductionsgesetze.** a) Sowohl bei der Volta-, als auch bei der Magneto-Induction besteht ein magnetisches Feld, und in demselben befindet sich ein Stromleiter, in welchem der Inductionsstrom entwickelt werden soll. Wir nehmen an, der Leiterkreis werde in einem bestimmten Augenblicke bereits von einem Strome i durchflossen und werde im magnetischen Felde bewegt, oder es werde das magnetische Feld in seiner Stärke verändert.

Ist die Intensität des magnetischen Feldes $\mathfrak{H}$ und die Zahl der vom Leiter umschlossenen Kraftlinien $N = \mathfrak{H} S$, so ist die Energie des Stromes

$$W = i \cdot \mathfrak{H} \cdot S = i \cdot N.$$

Ändert sich nun die Kraftlinienzahl N, so wird im Leiter ein Strom induciert, der den ursprünglichen verstärkt oder schwächt. Ist die elektromotorische Kraft des Inductionsstromes E und die infolge dieser circulierende Elektricitätsmenge dQ, so ist die zum Vorschein kommende elektrische Energie $E \cdot dQ$; dieselbe ist ein Äquivalent der

Änderung der potentiellen Energie im Felde, beziehungsweise der geleisteten Arbeit; daher besteht die Gleichung[1])

$$dW = E \cdot dQ = i \cdot dN.$$

Setzt man für $dQ = i \cdot dt$, so folgt das Inductionsgesetz:

$$E = \frac{dN}{dt}.$$

Die elektromotorische Kraft der Induction ist gleich der Änderung der Zahl der umschlossenen Kraftlinien (des Inductionsflusses oder des elektrokinetischen Momentes) in der Zeiteinheit; oder — wenn die Zahl der Kraftlinien dadurch geändert wird, dass die Kraftlinien vom Stromträger geschnitten werden — die elektromotorische Kraft ist gleich der Zahl der in der Zeiteinheit geschnittenen Kraftlinien.

Das Gesetz ist von Wichtigkeit für magneto- und dynamoelektrische Maschinen, die dazu dienen, Inductionsströme zu erzeugen. Im Folgenden sollen noch die Gesetze für einige specielle Fälle unmittelbar und mit Rücksicht auf die Wärmeentwickelung und die Selbstinduction abgeleitet werden.

b) Helmholtz hat (1847) folgenden Fall näher betrachtet: Ein Strom und ein Magnet befinden sich gegenseitig innerhalb ihrer magnetischen Felder, und der Magnet folge während einer sehr kleinen Zeit dt der Einwirkung des Stromes. Die Arbeit, die dabei geleistet werden muss, ist gegeben durch das Product aus der Stromstärke in die Änderung der Zahl der vom Stromleiter umschlossenen Kraftlinien. Die Energie der Stromquelle hat die Erwärmung des Leiters und die angegebene Arbeit zu leisten; sie ist daher

$$e \cdot i \cdot dt = i^2 \cdot R\,dt + i \cdot dN.$$

Daraus folgt

$$e - \frac{dN}{dt} = i \cdot R.$$

Die elektromotorische Kraft e des Stromes wird demnach um die auf die Zeiteinheit entfallende Änderung der Kraftlinienzahl, nämlich um dN/dt vermindert; die letztere Grösse entspricht der elektromotorischen Kraft des Inductionsstromes. Der Inductionsstrom fliesst demnach dem Hauptstrome entgegen.

Wird der Magnet durch eine äussere Kraft der Kraft des Stromes entgegen bewegt, so ist ein Arbeitsaufwand nöthig, welcher der Grösse $- i \cdot dN$ gleich ist. Man hat in diesem Falle die Gleichung

$$e \cdot i \cdot dt + i \cdot dN = i^2 \cdot R \cdot dt$$

und darnach

$$e + \frac{dN}{dt} = iR.$$

1) H. Ebert, Ableitung der Inductionsgesetze auf energetischem Wege. Ostwalds Zeitsch. für phys. Chem. 18. S. 327.

Die elektromotorische Kraft e des Hauptstromes wird um die elektromotorische Kraft dN/dt des Inductionsstromes vermehrt; der Inductionsstrom ist mit dem Hauptstrome gleich gerichtet.

Aus den Gleichungen folgt auch, dass die Stromintensität verkleinert oder vergrössert wird, je nachdem das magnetische System den Wirkungen des Stromes folgt oder denselben Widerstand leistet, dass also die inducierende Kraft stets die Eigenschaft besitzt, der Bewegung Widerstand zu leisten; diese Thatsache drückt das Lenzsche Gesetz aus, nach welchem der Inductionsstrom stets die entgegengesetzte Richtung von dem Strome hat, der die Bewegung des Systemes zu erzeugen vermöchte.

Ist in dem Leiterkreise keine Stromquelle eingeschaltet, dann ist $e = 0$ und die vorstehenden Gleichungen ergeben übereinstimmend mit obigem (a)

$$E = i \cdot R = \pm \frac{dN}{dt}.$$

Bei dieser Darstellung wird auf die Selbstinduction des Stromes keine Rücksicht genommen. Eine allgemein giltige Darstellung des Problems der Magneto-Induction nach dem Principe der Erhaltung der Energie hat J. Stefan gegeben[1]).

c) Inductionsströme entstehen auch in einem stromlosen Leiterkreise, wenn in dessen Nähe ein elektrischer Strom geschlossen oder geöffnet wird. Der Inductionsstrom, der als secundärer Strom oder Nebenstrom beim Schliessen eines Hauptstromes (primären Stromes) entsteht, lässt sich in folgender Weise bestimmen[2]). Für den primären Strom gilt, wenn dessen Leiter von fester Form und in Folge dessen die Potentiale U_1 und V, die für die Inductionscoefficienten $\frac{1}{2} L_1$ und $\frac{1}{2} L_{12}$ gesetzt werden mögen, constant sind, die Gleichung der potentiellen Energie (§ 131 d)

$$(e_1 - R_1 i_1)\, dt = 2U_1 \cdot di_1 + V \cdot di_2 .$$

Für den secundären Strom ist die elektromotorische Kraft $e_2 = 0$ und daher ist

$$- R_2 \cdot i_2 \cdot dt = 2U_2 \cdot di_2 + V \cdot di_1 .$$

Die Intensität i_2 des Inductionsstromes im secundären Leiterkreise hat nur einen endlichen Wert, solange di_1 einen gewissen Wert hat, d. h. solange unmittelbar nach Schliessen des Hauptstromes dessen Intensität wächst. Sobald i_1 constant geworden ist, wird $di_1 = 0$ und damit auch $i_2 = 0$. Die Gleichung $e_1 = R_1 \cdot i_1$ bestimmt dann den grössten Wert, bis zu welchem die Stromstärke i_1 wächst.

1) J. Stefan, Wiener Acad.-Ber. Bd. 64. S. 210. Siehe auch meine Schrift über das Energieprincip in d. El. S. 169.

2) J. Stefan, Wiener Acad.-Ber. Bd. 64. Heft 1 und 2. S. 207.

Aus der Gleichung für die Intensität i_2 folgt zugleich, dass das Vorzeichen von i_2 stets negativ ist, wenn di_1 positiv ist, d. h. während des Anwachsens des Hauptstromes ist der Inductionsstrom dem Hauptstrome entgegengesetzt gerichtet.

Die Elektricitätsmengen, welche im Haupt- und Nebenstrome während des Schliessens des ersteren durch je einen Querschnitt fliessen, sind gegeben durch die respectiven Summen $\int i \cdot dt = Q$. Aus den vorstehenden Gleichungen erhält man dafür

$$R_1 \cdot \int i_1 dt = R_1 \cdot Q_1 = e_1 t + 2U_1(i_1{}^0 - i_1) + V(i_2{}^0 - i_2).$$

Hierin sind die Anfangswerte $i_1{}^0 = i_2{}^0 = 0$.

Für den secundären Strom ist

$$R_2 \cdot \int i_2 \cdot dt = R_2 \cdot Q_2 = -(2U_2 \cdot i_2 + V \cdot i_1).$$

Die Verwendung der von der Stromquelle gelieferten Energie ergibt sich aus den obigen allgemeinen Gleichungen, indem man die für den primären Strom mit i_1 und die für den secundären Strom mit i_2 multipliciert. Man erhält für den primären Strom

$$\int e_1 \cdot i_1 \cdot dt = \int R_1 \cdot i_1{}^2 \cdot dt + 2U_1 \cdot \int i_1 \cdot di_1 + V \cdot \int i_1 \cdot di_2.$$

Demnach wird

$$\int e_1 \cdot i_1 \cdot dt = R_1 . \int i_1{}^2 \cdot dt + U_1 \cdot i_1{}^2 + V \cdot \int i_1 \cdot di_2.$$

Für den secundären Stromkreis wird analog

$$0 = R_2 \cdot \int i_2{}^2 \cdot dt + U_2 \cdot i_2{}^2 + V \cdot \int i_2 \cdot di_1.$$

Wenn man die Summierung auf die Zeit ausdehnt, bis i_1 wieder constant und $i_2 = 0$ wird, so ist für diese Zeit $U_2 \cdot i_2{}^2 = 0$ und $V \cdot i_1 \cdot i_2 = 0$; durch Addieren der Gleichungen für beide Stromleiter erhält man

$$\int e_1 \cdot i_1 \cdot dt = R_1 \cdot \int i_1{}^2 \cdot dt + R_2 \cdot \int i_2{}^2 \cdot dt + U \cdot i_1{}^2,$$

d. h. aus der Energie der Stromquelle des primären Stromes ist sowohl die Wärme des Hauptdrahtes als auch die des Nebendrahtes und ausserdem noch das Potential der ersteren Leitung auf sich selbst erzeugt worden.

d) Beim Schliessen und Öffnen eines Stromes werden auch im eigenen Stromleiter Ströme induciert, welche Extraströme genannt werden. Die nähere Bestimmung derselben ergibt sich wieder aus den allgemeinen Gleichungen. Da wir hier nur einen Stromkreis betrachten, so gilt für denselben

$$(e - Ri)dt = 2U \cdot di$$

und darnach

$$R \int i \cdot dt = R \cdot Q = \int e \cdot dt - 2U \int di,$$

also die Elektricität

$$Q = \frac{e}{R} \cdot t + 2U \frac{i_0 - i_n}{R}.$$

Beim Schliessen des Stromes ist zu Anfang $i_0 = 0$ und $i_n = i$; nach einer kurzen Dauer t der Strömung wird $i = \frac{e}{R}$. Die Elektricitätsmenge Q, welche während des Schliessens durch einen Querschnitt geflossen, ist

$$Q = i\left(t - \frac{2U}{R}\right) = \frac{e}{R}\left(t - \frac{2U}{R}\right).$$

Der Subtrahend in der Klammer entsteht aus dem Gliede mit der Änderung di der Stromintensität und entspricht demnach dem Einflusse des Extrastromes; beim Schliessen der Leitung vermindert also der Extrastrom die durch einen Querschnitt strömende Elektricität, der Extrastrom kreist dem Hauptstrome entgegen. Durch welche Arbeitsleistung der Extrastrom veranlasst wird, ersieht man, wenn man die allgemeine Gleichung mit i multipliciert. Man erhält

$$R \cdot \int i^2 \cdot dt = \int e \cdot i \cdot dt - 2U \cdot \int i \cdot di = \int e \cdot i \cdot dt - U(i_n^2 - i_0^2).$$

Für den Schliessungsstrom ist $i_0 = 0$ und die Gleichung lehrt, dass die Wärmeentwickelung im Stromleiter gleich ist der Differenz der von der Stromquelle gelieferten Energie und dem Potentiale des Stromes auf sich selbst. Dieser Energieverlust im Leiterkreise, der durch das Potential des Stromes bestimmt wird, entspricht dem gegen den Hauptstrom gerichteten Extrastrome. Das Potential gewinnt hiernach augenscheinlich die Bedeutung einer Energie. Nach der Theorie der Verschiebung ist es die potentielle Energie des elastischen Raummediums, mit welcher das Stromfeld auf andere Ströme oder Magnete einzuwirken vermag. Die bezügliche Energie ist von der Stromquelle zu liefern und wird die Arbeitsleistung des Stromes im Leiter um diesen Betrag vermindert. Bis das Potential vollständig erzeugt, das Feld magnetisiert ist, hat der Extrastrom beim Schliessen sein Ende erreicht und die Strömung entspricht dem Ohm'schen und Joule'schen Gesetze.

Der Extrastrom beim Öffnen eines Stromkreises bestimmt sich durch Einführung der entsprechenden Grenzen (nämlich $i_0 = i$ und $i_n = 0$) in die vorstehenden Summenformeln für die Elektricitätsmenge und die Arbeit im Stromkreise. Man erhält

$$Q = i\left(t + \frac{2U}{R}\right) = \frac{e}{R}\left(t + \frac{2U}{R}\right)$$

und

$$R \cdot \int i^2 \cdot dt = \int e \cdot i \cdot dt + U \cdot i^2.$$

Beim Öffnen des Stromkreises hat demnach der Extrastrom eine Vermehrung der in einer bestimmten Zeit durch einen Querschnitt strömenden Elektricität zur Folge; man schliesst daraus, dass der Extrastrom mit dem Hauptstrome in gleicher Richtung fliesst. Der Extrastrom beim Öffnen des Stromes hat auch eine Vermehrung der Wärmeentwickelung im Leiter zur Folge, deren Arbeitswert durch das Potential des Stromes auf sich selbst gemessen wird. Die potentielle Energie des magnetischen Feldes wird beim Aufhören des Stromes wieder gewonnen, indem sie im Leiter in Wärme verwandelt wird.

Aufg. 1. Auf einer Ruhmkorff'schen Inductionsspule sind 100 km dünner Draht aufgewickelt; derselbe gibt 15 cm lange Funken (40000 Volt); der Durchmesser der äussersten Schichte beträgt 14 cm. Wie gross ist die Potentialdifferenz, welche zwischen zwei möglichst nahegelegenen Punkten zweier aufeinander folgenden Windungen herrscht? — (Die Potentialdifferenz auf die ganze Drahtlänge von 10^7 cm ist 40000 Volt; auf eine Drahtwindung von 14π cm entfällt $14\pi \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 0{\cdot}176$ Volt.) **2.** Ein kreisförmiger Rahmen von 30 cm Halbmesser mit 9 Drahtwindungen wird um einen verticalen Durchmesser 16 mal in der Secunde gedreht. Die entstehenden Wechselströme werden durch einen Stromwechsler gleich gerichtet. Die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus ist 0·208 Dyn. Wie gross sind die elektromotorische Kraft und die Stärke des Inductionsstromes? Der Widerstand des Drahtes = 0·06 Ohm. —

($E = 16 \cdot 2 \cdot 30^2 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 0{\cdot}208 = 169371$ absol. Einh. = 0·0016937 Volt.
$i = E/R = 0{\cdot}02823$ Ampère.)

3. Auf einen ringförmigen Rahmen ist ein Draht in 18 Windungen aufgewickelt; derselbe hat 15 cm Halbmesser und kann um eine verticale Achse gedreht werden. Der Widerstand des Drahtes beträgt 0·04 Ohm. Welche elektromotorische Kraft und welche Stromstärke kann in ihm durch Rotation im erdmagnetischen Felde erzeugt werden, wenn die Horizontalcomponente = 0·2 Dyn ist und der Rahmen mit der Geschwindigkeit $\omega = 8$ (Zahl der Umdrehungen) rotiert? —
($E = 2 \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 0{\cdot}2 \cdot 18 \cdot 8 = 40714$ elektromagn. Einh. = 0·0004072 Volt und $i = 0{\cdot}01018$ Ampère.) **4.** Ein kreisförmiger Rahmen von 14 cm Halbmesser und 8 Windungen macht 100 Umdrehungen in der Secunde; das homogene magnetische Feld hat eine Stärke von 0·2 Dyn und der inducierte Strom soll eine Intensität von 0·001 elektromagn. Einheiten = 0·01 Ampère besitzen; welchen Widerstand muss der aufgewundene Draht haben? — ($1{\cdot}238 \cdot 10^9$ elektromagn. Einh. = 1·238 Ohm.) **5.** Ein Metallstab von 3 m Länge fällt gleichförmig mit 200 cm Geschwindigkeit an einem Orte, wo die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus 0·2 Dyn

beträgt; der Stab behält immer seine horizontale Richtung bei. Welche elektromotorische Kraft wird im Stabe erzeugt? —

($E = 0{\cdot}2 \cdot 200 \cdot 300 = 12000$ elektromagn. Einh. $= 0{\cdot}00012$ Volt.)

[R. Weber.] **6.** Ein Transformator überführt die elektrische Energie eines Hauptstromes fast vollständig auf den inducierten Nebenstrom; in welcher Beziehung stehen die elektromotorischen Kräfte und Widerstände beider Ströme? — (Aus $E_1 i_1 = E_2 i_2$ folgt $E_1^2 : E_2^2 = R_1 : R_2$.)

§ 136. **Magnetelektrische und dynamoelektrische Maschinen.** (Pixii 1831, Gramme 1871, Hefner-Alteneck 1871.) Die magnetoelektrische und elektrodynamische Induction wird benutzt, um mittelst Maschinen elektrische Ströme zu erzeugen. Je nachdem man es dabei mit der einen oder der anderen Art Induction zu thun hat, heissen die Maschinen magnetelektrische oder dynamoelektrische Maschinen. Beide beruhen auf demselben Principe, nämlich durch Bewegung eines geschlossenen Stromleiters im magnetischen Felde Inductionsströme zu erzeugen. Bei den magnetelektrischen Maschinen wird das Feld von permanenten Magneten, bei den Dynamomaschinen von Elektromagneten erzeugt. Bei den letzteren wird der Strom der Maschine selbst dazu benutzt, um durch die Umwickelung des Elektromagnetes geführt zu werden. Nach dem Energieprincipe folgt sofort, dass die Leistungsfähigkeit des erzeugten Stromes ihr Äquivalent in der Arbeit hat, welche zur Bewegung des Leitersystems im magnetischen Felde verbraucht wird. Die bezüglichen Entwickelungen sollen an dem einfachsten Repräsentanten einer magnetelektrischen Maschine, nämlich an der Faraday'schen Scheibe durchgeführt werden.

Dieser Elektromotor ist nach demselben Principe wie das Barlow'sche Rad construiert und wird in der umgekehrten Weise wie dieses benutzt. Wir denken uns eine Metallscheibe im gleichförmigen Felde um eine Axe rotieren, welche mit der Richtung des Feldes parallel ist. An den Umfang der Scheibe sei an einen Punkt eine federnde Platte leicht angelegt und ein Leitungssystem verbinde die Platte mit der Rotationsaxe der Scheibe. Durch die Rotation der Scheibe im magnetischen Felde wird ein Inductionsstrom erzeugt, dessen elektromotorische Kraft E und dessen Intensität i sei. Die Arbeit der Drehung der Scheibe im Felde findet ihr Äquivalent in der Energie $E \cdot i$ der durch Induction getrennten Elektricitäten, welche im Strome sich wieder vereinigen. Der Strom wird stationär, wenn die Energie $E \cdot i$ der im Leiter entwickelten Wärme gleich geworden ist, bis man also hat

$$E \cdot i = i^2 \cdot R \quad \text{oder} \quad E = i \cdot R.$$

Wie beim Barlow'schen Rade ist die Arbeit für die Drehung des Radius, durch welchen eben der Strom fliesst, um den kleinen Winkel $d\varphi$ respective die Sectorfläche dS (§ 129)

$$dW = i \cdot F \cdot dS = i \cdot F \frac{r^2 \cdot d\varphi}{2}.$$

Daraus wird die Arbeit in einer Secunde erhalten, wenn man dW durch die Zeit dt der betreffenden kleinen Drehung dividiert; die Arbeitsleistung ist dann der Energie des Stromes äquivalent. Daher ist

$$E \cdot i = \frac{dW}{dt} = i \cdot F \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{r^2}{2}.$$

Setzt man für die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, so erhält man für die elektromotorische Kraft der Maschine

$$E = \frac{1}{2} \cdot F \cdot r^2 \cdot \omega.$$

Dieselbe ist also gegeben durch das halbe Product aus der Stärke des Feldes, dem Quadrate des Radius und der Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Scheibe. Das Quadrat des Radius ist der Fläche und die Winkelgeschwindigkeit der Zahl der Umdrehungen der Scheibe in der Secunde proportional.

Dasselbe Resultat gilt auch, wenn man die Scheibe zwischen den Polen eines Hufeisenmagnetes oder zwischen den Armaturen zweier Elektromagnete rotieren lässt. Mit dieser letzteren Anordnung hat Le Roux so kräftige Ströme erhalten, dass starke Funken zwischen Scheibe und Feder übersprangen.

Wie bei der Faraday'schen Scheibe ist auch bei anderen magnetelektrischen Maschinen die elektromotorische Kraft E der Tourenzahl n der Maschine proportional und kann durch $E = nE_1$ wiedergegeben werden. Bei constanter Geschwindigkeit verhalten sich solche Maschinen genau so wie eine gewöhnliche Volta'sche Batterie; sie sind stets imstande, in einem metallischen Kreise einen constanten Strom zu erzeugen.

Dies ist aber nicht immer der Fall bei den Dynamomaschinen. Bei diesen hängt die Intensität der Magnete respective die des magnetischen Feldes von der Stromstärke selbst ab und E lässt sich ausdrücken in der Form $E = A \cdot n \cdot i$, wenn A eine von der Form der Maschine abhängige Constante bedeutet.

Für den constanten Strom gilt dann nach dem Joule'schen Gesetze

$$E \cdot i = n \cdot A \cdot i^2 = i^2 \cdot R.$$

Bevor die Intensität den constanten Wert i erreicht, muss die Energie der Stromquelle respective die Arbeit der Maschine grösser sein, als die Wärmeentwickelung im Stromleiter; daher muss während des Anlassens der Maschine

$$n \cdot A \cdot i^2 > R \cdot i^2$$

oder

$$n \cdot A > R.$$

Nur wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann die Maschine einen Strom

erzeugen und unterhalten. Für jeden Wert von $n > \frac{R}{A}$ wird die Stromintensität schnell wachsen, bis der Widerstand des Kreises infolge der entwickelten Wärme den Wert nA erreicht hat.

Die magnetelektrischen Maschinen und Dynamomaschinen werden in der Praxis allgemein zur Stromerzeugung verwendet; so zum elektrischen Licht, zur Galvanoplastik, bei der Telephonie, zur Kraftübertragung etc.[1]).

§ 137. **Elektrische Schwingungen.** Das Vorhandensein elektrischer Schwingungen wurde durch Versuche zuerst von Feddersen (1859) nachgewiesen; derselbe beobachtete die Funkenentladung einer Leydener Flasche in einem rotierenden Spiegel und fand, dass das Bild bei grossem Luftwiderstande aus Lichtlinien bestand, — jede Partialentladung lieferte eine solche Linie von entsprechender Stärke —, bei geringem Widerstande aber aus Lichtperlen, die gleich weit von einander entfernt waren und elektrischen Schwingungen entsprachen. Das Gesetz dieser Erscheinung kann mittelst des Energieprincipes gewonnen werden.

Wird ein Condensator, von dem eine Belegung das Potential V und die andere Belegung das Potential Null besitzt, durch einen Leitungsdraht entladen, so wird die elektrische Energie des Condensators $V \cdot i \cdot dt$ dazu verwendet, in dem Drahte die Wärme $i^2 \cdot R \cdot dt$ und die potentielle Energie des Entladungsstromes zu entwickeln; daher ist

$$V \cdot i \cdot dt = i^2 \cdot R \cdot dt + i \cdot L di$$

und

$$V = i \cdot R + L \cdot \left(\frac{di}{dt}\right).$$

Die Stromstärke i ergibt sich aus dem Potentiale V und der Capacität C des Condensators; ist nämlich die elektrische Ladung CV, so ändert sich dieselbe in der Zeit dt um

$$C \cdot dV = - i \cdot dt.$$

Daraus ist

$$i = - C \cdot \frac{dV}{dt}.$$

Setzt man hierin für V den vorhergehenden Wert ein, so erhält man die Gleichung

$$L \cdot C \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + C \cdot R \cdot \frac{di}{dt} + i = 0.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$i = e^{-Rt/2L} \cdot \left[A \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} + B \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}\right].$$

1) Eine eingehende Theorie der elektrischen Maschinen siehe in Wallentins moderner El. S. 426 ff.

Die Stromstärke ändert sich also mit den periodischen Functionen sin und cos von $t/\sqrt{LC}$, und wird, da der Exponent von e negativ ist, mit wachsender Zeit t immer kleiner. Die Schwingungsamplitude ist proportional $e^{-Rt/2L}$. Die Schwingungsdauer folgt aus der Gleichung $T/\sqrt{LC} = 2\pi$; sie ist also

$$T = 2\pi\sqrt{LC};$$

die Schwingungszeit wächst demnach proportional der Quadratwurzel aus dem Selbstinductionscoefficienten und der Capacität des Condensators.

H. Hertz benützte (1888) zur Erzielung sehr schneller elektrischer Schwingungen einen Funkeninductor, von welchem die Enden des dünnen Nebendrahtes zu zwei Conductoren führen, deren jeder aus einer Kupferstange mit einer grossen Kugel am äusseren Ende und einer kleinen Entladungskugel in der Mitte des Apparates besteht. Für den elektrischen Strom längs der Conductoren von einer grossen Kugel zur anderen gilt vorstehende für den Entladungsdraht eines Condensators aufgestellte Gleichung. Durch Einführung der Capacität der grossen Kugeln und des Selbstinductionscoefficienten des Leiters erhielt Hertz die Schwingungsdauer und die entsprechende Wellenlänge in der Luft. Die Schwingungsdauer ist um so kleiner, je kleiner die Dimensionen der Metalltheile sind. Die Versuchsanordnung wurde von Lecher verbessert.

Die rasch aufeinander folgenden Ströme erregen in ihrem Felde elektromagnetische Kräfte, die mit den Strömen wachsen und verschwinden. Hertz hat mittelst eines secundären Leiters (des „elektrischen Resonators“) die Ausbreitung dieser Kräfte im Felde genau untersucht und ist zu einem sehr interessanten, hochwichtigen Resultate gelangt. Der secundäre Leiter besteht aus einem Drahtkreise, der an einer Stelle durch eine kleine Funkenstrecke unterbrochen ist. Wird die Ebene desselben normal zur Fortpflanzungsrichtung der elektromagnetischen Erregung im Felde gehalten, so machen sich elektrische Verschiebungen längs des Leiters geltend, es entstehen elektrische Strömungen und bei hinreichender Potentialdifferenz an den Drahtenden auch kleine Funken. Verschiebt man den secundären Leiter, so kann man das Vorhandensein von elektrischen Wellen nachweisen, nachweisen, dass diese Wellen denselben Gesetzen folgen wie andere Wellen (§§ 54, 55, 56). Bei stehenden Wellen treten an der Stelle der Schwingungsknoten keine Fünkchen auf, wohl aber in der Nähe der Bäuche.

Hertz hat aus der berechneten Schwingungsdauer und aus der gemessenen Wellenlänge die Fortpflanzungsgeschwindigkeit berechnet und gefunden, dass dieselbe der Lichtgeschwindigkeit gleichkommt. Mit Hilfe von parabolisch gekrümmten Hohlspiegeln hat er auch

das Reflexionsgesetz, mit Hilfe solcher Spiegel und eines dazwischen gestellten Asphaltprismas die Brechung, und mittelst eines Gitters aus parallelen Metallstäben die Polarisation nachgewiesen. Sind die Drähte des Gitters parallel mit dem primären Leiter, so werden die elektrischen Schwingungen absorbiert, sie treten nicht durch das Gitter hindurch; wird das Gitter aber in seiner Ebene um 90⁰ gedreht, so geht die elektrische Welle hindurch. Die elektrischen Schwingungen erfolgen also parallel der Stromrichtung.

Aus den Versuchen folgt, dass die elektrische Kraft sich nach denselben Gesetzen ausbreitet, wie die strahlende Wärme und das Licht.

In der Elektricitätslehre werden die elektrischen Wellen zur Bestimmung der Dielektricitätsconstanten und zur Erklärung der Erscheinungen in den Geissler'schen Röhren (nach E. Wiedemann und Ebert) verwendet.

§ 138. **Maxwell-Hertz'sche Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes.** a) Wenn in einem Leiter ein elektrischer Strom fliesst, so erzeugt derselbe rings um sich ein elektromagnetisches Feld. Ist das Medium isotrop, so treten parallel zur Stromrichtung elektrische Kräfte, elektrische Verschiebungen, und normal dazu magnetische Kräfte auf. Die betreffenden Kräfte machen sich durch Inductionswirkungen geltend. Maxwell und Hertz haben die Beziehungsgleichungen zwischen den elektrischen und magnetischen Kräften aufgestellt und gezeigt, dass dieselben als Grundgleichungen für alle im elektromagnetischen Felde vorkommenden Erscheinungen zu betrachten seien.

Behufs Ableitung der Gleichungen unter einfachen Bedingungen betrachten wir ein Flächenelement $dx\,dy$ im Felde; auf demselben stehen $N\,dx\,dy$ magnetische Kraftlinien normal auf. Nun bestimmen wir die Kräfte eines Inductionsstromes, der längs des Umfanges erzeugt werden könnte[1]). Zu diesem Zwecke denken wir uns eine Elektricitätseinheit längs des Umfanges des Flächenelementes fortbewegt. Die Kraft längs einer Seite dx sei X, längs der gegenüberliegenden Seite $X + (dX/dy)dy$, ferner längs einer Seite dy gleich Y und auf der gegenüberliegenden Seite $Y + (dY/dx)dx$. Die Arbeitsleistung ist alsdann für eine Bewegung im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers

$$dW = -X dx + Y dy + \left(X + \frac{dX}{dy} dy\right) dx - \left(Y + \frac{dY}{dx} dx\right) dy$$

oder

$$dW = \left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) dx \cdot dy\,.$$

1) Siehe meine Schrift über den Ätherdruck S. 42; 1892.

Diese Arbeit ist gleich der auf die Zeiteinheit entfallenden Änderung der durch die Fläche $dx \cdot dy$ hindurchgehenden magnetischen Kraftlinien, also im magnetischen Masse

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}.$$

Analog gelten nach den Achsenrichtungen X und Y des gedachten Coordinatensystemes für die magnetischen Kräfte L und M

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}$$

und

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}.$$

Ist die magnetische Inductionsconstante nicht gleich Eins, so sind die magnetischen Kräfte noch mit dieser Constanten μ zu multiplicieren.

Für die elektrischen Kräfte gewinnen wir die Werte, wenn wir um eine elektrische Kraftströmung, zunächst etwa um die Richtung der X-Achse einen Einheitspol bewegt denken. Derselbe werde längs des Umfanges des Rechteckes $dy\,dz$ geführt. Ist die Kraft längs einer Seite dy gleich M, so ist sie längs der gegenüberliegenden Seite $M + (dM/dz)\,dz$; die Kraft längs dz sei N und längs der gegenüberliegenden Seite $N + (dN/dy)\,dy$. Die Arbeit bei der Bewegung des Einheitspoles im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers, von der positiven X-Seite betrachtet, ist

$$dW = -Mdy + Ndz + \left(M + \frac{dM}{dz}dz\right)dy - \left(N + \frac{dN}{dy}dy\right)dz$$

oder

$$dW = \left(\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}\right)dy \cdot dz.$$

Diese Arbeit ist im elektromagnetischen Masse (§ 126) gleich $4\pi i$, oder wenn wir i durch die Elektricitätsmenge $q \cdot dy \cdot dz$, nämlich durch $(dq/dt)dy \cdot dz$ ausdrücken und die elektrische Verschiebung der elektrischen Kraft X proportional setzen, $= k(dX/dt)\,dy\,dz$; und damit erhält man für die elektrische Kraft

$$k\frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}$$

und analog

$$k\frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}$$

und

$$k\frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}.$$

Beide Gleichungsgruppen für die elektrischen und magnetischen Kräfte können nun z. B. dazu verwendet werden, die Gleichungen für die

elektrischen Wellen zu ermitteln. Man hat zu diesem Zwecke nur die magnetischen Kräfte zu eliminieren und erhält die Gleichungen für transversale elektrische Wellen in völliger Übereinstimmung mit den Versuchen von Hertz. Auch Biot-Savarts Gesetz lässt sich daraus gewinnen.

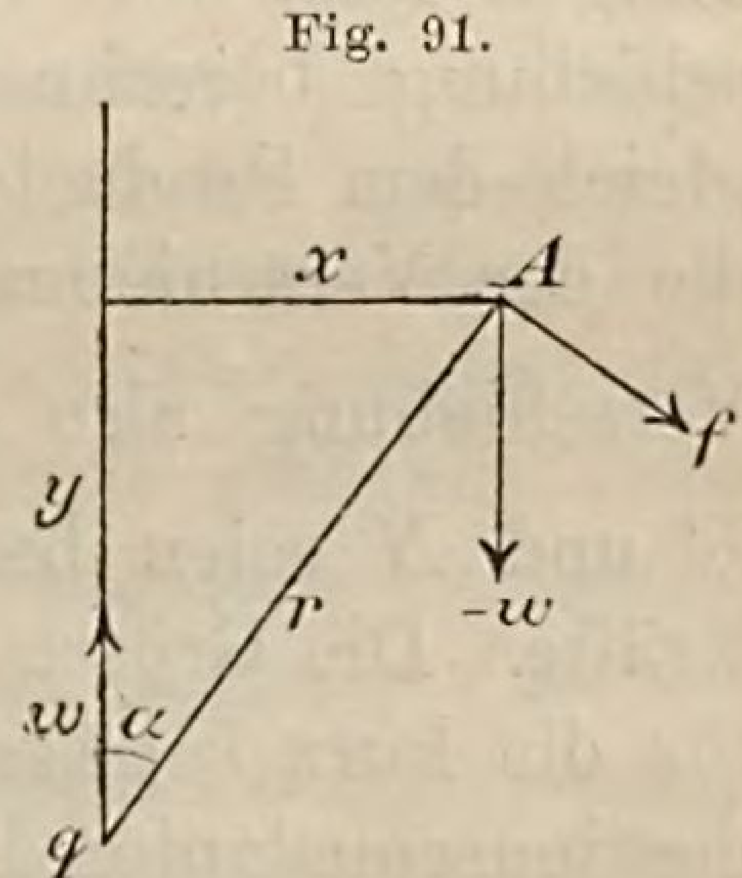
b) Eine mechanische Deutung der gewonnenen Grundgleichungen ergibt sich aus den §§ 52b und 125. In § 52b wurde nachgewiesen, dass das Gleichungssystem für die Kräfte im elastischen Felde in die Maxwell-Hertz'schen Gleichungen übergeht, wenn man die elastischen Kräfte nicht der relativen Verschiebung $d\xi$, sondern der absoluten Verschiebung ξ der Raumelemente proportional setzt. Diese Verschiebung kann man auf eine Polarisation der Molecüle beziehen, die durch eine Oberflächenverschiebung erreicht gedacht werden kann; demnach dürfen die eigenen elastischen Kräfte der Raumelemente, die Kräfte des Selbstpotentials der Molecüle als elektrische Kräfte betrachtet werden. (Vgl. §§ 53 und 100e.)

Im Sinne der mechanischen Deutung der elektromagnetischen Kräfte nach § 125 kann man die Beziehung zwischen den elektrischen und magnetischen Kräften in folgender einfachen Weise gewinnen.

Bewegt sich eine Elektricitätsmenge q (Fig. 91) in der Richtung y mit der Geschwindigkeit ω, so ist die drehende Kraft f in einem Elemente A des Feldes

$$f = \frac{q \cdot d\alpha}{r^2} = \frac{q}{r^3}\,\omega\, dt \cdot \sin\alpha$$

Fig. 91.



und das Drehungsmoment, beziehungsweise die demselben proportionale magnetische Kraft,

$$N = k\,\frac{q\omega dt}{r^2}\sin\alpha = k \cdot \frac{q\omega dt}{r^2} \cdot \frac{dr}{dx}.$$

Hierin ist q/r^2 die elektrische Kraft auf die Elektricitätseinheit in A; setzt man $\omega q dt/r^2$ der zu y parallelen elektrischen Verschiebung in A proportional, so entspricht $\omega q dt \sin\alpha/r^2$ der Verschiebung längs f. Bezeichnet F die Kraft dieser Verschiebung, so kann man setzen

$$N = k'F.$$

Daraus folgt

$$\frac{dN}{dt} = k'\,\frac{dF}{dr} \cdot \left(\frac{dr}{dt}\right) = k'v\,\frac{dF}{dr}$$

und

$$\frac{dN}{dr} = k'\,\frac{dF}{dt} \cdot \left(\frac{dt}{dr}\right) = \frac{k'}{v} \cdot \frac{dF}{dt}.$$

Zu dem Werte für F gelangt man auch, wenn man für die durch das Biot-Savart'sche Gesetz gegebene magnetische Kraft N die Änderungen nach der Zeit und der Entfernung direct berechnet und daraus

die gemeinschaftliche Function F erschliesst. Die physikalische Bedeutung lässt sich ausser der angegebenen Weise noch wie folgt angeben: $q\omega dt \sin\alpha$ ist das zu r normale Verschiebungsmoment von q; nur dieses wirkt elektromagnetisch. Es wird relativ ersetzt durch das Verschiebungsmoment $q\omega dt \sin\alpha/r^2$ in A, und diesem proportional ist F.

Die beiden letzten Werte stimmen der Form nach mit den obigen allgemeinen Gleichungen überein, wenn man diese entsprechend specialisiert. v ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen und magnetischen Erregungen. Seine Bedeutung geht auch aus der Gleichung für die elektrischen Schwingungen hervor, welche durch Elimination der magnetischen Kraft gewonnen wird; man erhält dafür

$$\frac{d^2F}{dr^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{d^2F}{dt^2}.$$

Die Gleichung entspricht transversalen Schwingungen, beziehungsweise transversalen Wellen. In der Form von solchen Wellen pflanzen sich die elektrischen Kräfte im Felde fort. Für die magnetischen Kräfte erhält man eine Gleichung von derselben Form, und daher pflanzen sich auch diese durch transversale Wellen mit gleicher Geschwindigkeit fort.

c) Die Energie der elektrischen und magnetischen Verschiebungen lässt sich in ähnlicher Weise wie die einer elastischen Verschiebung berechnen (§ 53). Wir setzen die Verschiebungsarbeit gleich dem Producte der Verschiebung in die wirkende mittlere Kraft, die der Verschiebung selbst proportional ist, für die elektrische Verschiebung also $\frac{1}{2}k_1F^2$ und für die magnetische $\frac{1}{2}\mu_1N^2$. — F und N seien beziehungsweise die elektrischen und magnetischen Kräfte. Die Grösse $4\pi k_1$ bedeutet die Dielektricitätsconstante (§ 100), für die kurz k gesetzt werden soll; und $4\pi\mu_1$ ist die magnetische Inductionsconstante, die kurz μ heissen mag. Damit werden die beiden Arbeitswerte $kF^2/8\pi$ und $\mu N^2/8\pi$.

Mit Benützung der Componenten X, Y, Z der elektrischen Kraft und der Componenten L, M, N der magnetischen Kraft ist die Energie für eine Raumeinheit

$$W = \frac{k}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{\mu}{8\pi}(L^2 + M^2 + N^2).$$

Das Theorem von der Fortpflanzung der Energie und den Beziehungen der Fortpflanzungsrichtung zur Richtung der elektrischen und magnetischen Kräfte wurde von Poynting behandelt[1]). (Vgl. hierzu das Capitel über Doppelbrechung des Lichtes.)

1) J. G. Wallentin, Festschrift zur Philologenversammlung in Wien 1893.

XI. Licht.

§ 139. **Elasticitätstheorie.** Mit Ausnahme von Aristoteles und vielleicht noch Leonardo da Vinci und Galilei hielten die Gelehrten bis zum 17. Jahrhunderte das Licht für einen unwägbaren Stoff[1]). — Erst nachdem Hooke (1635—1703) und die Jesuiten Paradies (1636—73) und Ango (1682) das Licht verglichen hatten mit einer Bewegung des Pendels und mit den Wellen, welche durch einen ins Wasser geworfenen Stein entstehen, legte Huygens durch seine Feststellungen (1683 und 1690), dass das Licht eine moleculare Vibrationsbewegung und der Äther der Träger der Lichtschwingungen sei, und ferner durch das nach ihm benannte Princip der einhüllenden Wellen den Grund zu der heute allgemein anerkannten Wellentheorie oder Undulationstheorie.

Gegenüber der von Newton (1642—1727) vertretenen Emissionshypothese arbeiteten Euler, Young und Fresnel an der Vollendung einer sicheren Basis für die Wellentheorie. Euler lehrte den Vergleich zwischen Licht und Schall; er erkannte die Periodicität der betreffenden Schwingungsbewegungen und die Analogie zwischen Tonhöhe und Farbe; er zeigte durch sinnreiche Vergleiche zwischen Farben dünner Blättchen und Tönen von offenen Röhren, dass die Farben gleichwie die Töne in der Wellenlänge beziehungsweise in der Schwingungszahl begründet seien, dass dem rothen Lichte die tiefsten Töne (die längsten Wellen), den blauen und violetten Farben die höchsten Töne (die kürzesten Wellen) entsprechen. Young war der Erfinder des Interferenzprincipes und Fresnell vollendete den Ausbau des Fundamentes durch eine glückliche Verbindung des Principes der einhüllenden Flächen mit dem Interferenzprincipe sowie durch die Annahme transversaler Lichtschwingungen; er zerstörte zugleich endgiltig das durch zahlreiche Nebenannahmen gross gewordene Gebäude der Emissionstheorie. — Nachdem nämlich durch Spiegelversuche und durch Experimente mit dem Interferenzprisma erwiesen war, dass zwei Lichtstrahlen mit entsprechenden Phasenunter-

1) Verdet, Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes. Deutsche Bearbeitung von Prof. Dr. Karl Exner. I. Bd. S. 9—25.

schieden sich gegenseitig vernichten können, dass also Licht zu Licht hinzugefügt Dunkelheit zu erzeugen imstande ist, konnte nicht weiter geglaubt werden, dass das Licht ein Stoff sei; es musste fortan als Thatsache angenommen werden, dass das Licht in einem Bewegungszustande begründet sei. Die Undulationstheorie ist seither mit grossem Aufwande von Genialität ausgebaut und zur Erklärung der Fortpflanzung, der Beugung, der Reflexion, der Polarisation, der einfachen und doppelten Brechung verwertet worden.

Da diese Theorie das Licht als einen Bewegungszustand der Theilchen eines im Raume überall ausgebreiteten Mediums erklärt, so stützt sie sich selbst auf die Principien der Mechanik. Von ganz besonderer Bedeutung unter diesen ist auch für die Optik das Princip der Erhaltung der Energie. Dasselbe lehrt die Leistungsfähigkeit der bewegten Massentheilchen und stellt das Licht als eine lebendige Kraft oder kinetische Energie dar; es zeigt die Ursache respective die Äquivalenz dieser Bewegungsenergie in der Arbeitsleistung einer potentiellen Energie, welche durch den Beleuchtungsprocess der Lichtquelle zur Auslösung gelangt. In mathematischer Form gibt das Energieprincip meist sehr einfach die genauen Gesetze der Ausbreitung und der Intensität des Lichtes.

§ 140. **Elektromagnetische Lichttheorie.** (Maxwell 1861.) a) Erscheinungen. In den letzten Jahrzehnten sind eine Reihe von Erscheinungen bekannt geworden, welche auf eine innige Beziehung zwischen Licht und Elektricität hinweisen. Faraday entdeckte (1845), dass jede durchsichtige Substanz in einem magnetischen Felde die Polarisationsebene eines Lichtstrahles zu drehen, nämlich die Lichtschwingungen aus ihrer Richtung abzulenken vermag. Die Ablenkung erfolgt bei den meisten magnetischen Körpern im entgegengesetzten Sinne desjenigen Stromes, der das magnetische Feld zu erzeugen imstande wäre. Zu den Versuchen benützt man einen starken Elektromagnet von Ruhmkorff, in welchem der Eisenkern hohl ist, und dessen Höhlung von polarisierten Lichtstrahlen durchsetzt wird. Eine besonders starke Drehung erhält man mittelst eines aus Bleiborsilicat bestehenden schweren Glases und auch mit Schwefelkohlenstoffflüssigkeit. Kundt führte (1884) den Nachweis, dass eine dünne durchscheinende Eisenscheibe, normal zu den Kraftlinien eines magnetischen Feldes gehalten, die Polarisationsebene eines Lichtstrahles nach der Seite dreht, nach welcher der magnetisierende Strom fliesst. Kerr beobachtete (1876), dass die Polarisationsebene eines polarisierten Lichtstrahles, der von einem Magnete reflectiert wird, ebenfalls gedreht wird.

Becquerel construierte (um die Mitte dieses Jahrhunderts) photoelektrische Elemente, indem er zwei mit frischem Niederschlag von Silberchlorür überzogene Silberplatten in einem mit Wasser gefüllten

Gefässe aufstellte und die eine Platte belichtete. Die Zusammenstellung wurde von Börnstein, Kalischer, Hallwachs u. a. verbessert.

Willoughby Smith machte (1875) die Entdeckung, dass Selen unter dem Einflusse des Lichtes den elektrischen Leitungswiderstand bedeutend vermindert. Darauf gestützt haben Graham Bell und Summer Selenzellen construiert, die zur Construction des Photophons benützt wurden.

Im Jahre 1875 machte Kerr die Entdeckung, dass Glas eine wirkliche Spannung erleidet, wenn es einer elektrostatischen Spannung unterworfen wird, und dass das Glas in diesem Zustande Doppelbrechung hervorruft. Bei den betreffenden Versuchen wurde in je einer Vertiefung zu beiden Seiten der Glasplatte ein Leitungsdraht von einer elektrisch geladenen Verstärkungsflasche befestigt. Das Glas verhielt sich so, als wenn es sich in der Richtung der elektrischen Kraftlinien ausgedehnt hätte. Andere Isolatoren zeigen ein ähnliches Verhalten.

Hertz beobachtete (1887), dass die Funken eines Inductionsapparates eine bedeutende Schlagweite erlangen und einen regelmässigeren Verlauf nehmen, wenn sie belichtet werden. E. Wiedemann und Ebert fanden (1888), dass zwischen den Elektroden einer in Bewegung befindlichen Influenzmaschine ein Funkenstrom veranlasst werden kann, wenn die negative Elektrode belichtet wird. Elster und Geitel zeigten, dass negativ elektrische Conductoren durch Belichtung entladen werden können; sie fanden, dass die Amalgame des Kaliums und Natriums in verdünnten Gasen zu den Versuchen besonders geeignet seien. Aber auch viele Mineralien lassen sich durch Belichtung elektrisch entladen.

b) Gestützt auf die im Gebiete der Elektricitätslehre ausgeführten Untersuchungen und dargelegten Anschauungen Faradays stellte Maxwell seine berühmte Theorie der Elektricität auf und zeigte, dass die Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes (§ 138) auch die Gesetze der Lichterscheinungen enthalten; die damit begründete Theorie heisst die elektromagnetische Lichttheorie[1]). Dieselbe hat gegenüber der bisher gebräuchlichen Elasticitätstheorie Vorzüge, die ihr bald die allgemeine Anerkennung verschaffen werden; sie entscheidet den nach der elastischen Theorie bestehenden Zweifel, ob die Schwingungsrichtung eines durch Reflexion polarisierten Lichtstrahles nach F. Neumann in der Einfallsebene liegt oder nach Fresnel normal dazu steht, durch die Feststellung, dass beide Schwingungsrichtungen vorhanden sind, nämlich die zu einander senkrechten Richtungen der

1) Maxwell, Lehrbuch der Elektricität. Deutsch von Weinstein. A. Hertz, Über d. Grundgl. d. Elektrodynamik. Wied. A. 40. P. Volkmann, Vorlesungen über die Theorie des Lichtes. 1891. H. Poincaré, Elektricität u. Optik. Deutsch von Jäger u. Gumlich. O. Tumlirz, Elektromagn. Lichttheorie. 1883.

elektrischen und magnetischen Schwingungen. Die Grundgleichungen geben ferner die Grenzbedingungen für die Reflexion und Brechung, welche nach Helmholtz mit der Elasticitätstheorie nicht im Einklange stehen. Endlich wird durch Entstehung der Leitungsströme und Entwickelung Joule'scher Wärme die Absorption und auch die Erscheinung der Farbenzerstreuung erklärt[1]), für deren Entstehung die reine Elasticitätstheorie keinen Grund anzuführen hat.

Von besonderer Wichtigkeit ist, dass dieselben Gleichungen die Erscheinungen der Elektricität, des Magnetismus, des Lichtes und der strahlenden Wärme erklären, und dass die bei den verschiedenen physikalischen Phänomenen auftretenden constanten Grössen (Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, Brechungsexponenten, Wurzeln aus der Dielektricitätsconstanten) ziffermässig gleich sind.

Die Maxwell'schen Gleichungen (§ 138) enthalten ausser den elektrischen Kräften X, Y, Z auch die magnetischen Kräfte L, M, N. In der Berücksichtigung dieser liegt ein hauptsächlicher Unterschied der elektromagnetischen gegenüber der elastischen Lichttheorie. Die Gleichungen ergeben leicht, dass periodisch veränderliche elektrische oder magnetische Zustände der Körper sich im Kraftfelde fortpflanzen und daselbst elektrische und magnetische Wellen erzeugen. Die Existenz solcher durch rasche Stromunterbrechungen hervorzurufenden Wellen und deren Fortpflanzung, Reflexion, Brechung und Polarisation hat Hertz durch seine berühmten Versuche (Wied. A. 1889) nachgewiesen. Die elektrischen Wellen verhalten sich demnach ebenso wie die Wellen des Lichtes und der strahlenden Wärme; der Unterschied kann nur in den Schwingungszahlen der betreffenden Wellen zu suchen sein. Die Schwingungszahlen des Lichtes liegen innerhalb der Grenzen 1 Bill. und 1000 Bill. Hertz verwendete bis 100 Mill. Schwingungen, die durch rasch aufeinanderfolgende Inductionsströme eines Ruhmkorff erzeugt wurden.

Auf Grund der Versuche über schnelle elektrische Schwingungen wurde von einigen Physikern die Elektricität überhaupt als ein Schwingungszustand des Äthers mit bestimmten Schwingungszahlen betrachtet. Die Fernewirkung müsste danach durch fortschreitende Wellen erklärt werden. Nach der Theorie der Verschiebung ist eine solche Annahme nicht nöthig; es genügt bei statischen Zuständen im Kraftfelde die behandelte einfachere Annahme, dass die Kräfte durch eine Verschiebung des Äthers, die als eine Viertelschwingung zur Erreichung einer dauernden Amplitude aufgefasst werden kann, entwickelt werden. Die Kraft selbst mag allerdings durch Wirbel

1) Koláček, Dispersionstheorie. Wied. A. 34 u. 37. Helmholtz, Wied. A. Bd. 48. S. 389. Goldhammer Bd. 37. S. 93. Drude Bd. 48, S. 536 und Drude, Physik des Äthers. H. Ebert, Magn. und elektr. Erscheinungen. Wied. A. 1894.

geäussert werden, deren Projectionen nach gewisser Richtung hin Schwingungen darstellen.

§ 141. **Fortpflanzung des Lichtes.** Wir setzen voraus, dass im Ursprunge eines Coordinatensystems periodisch veränderliche Ätherverschiebungen, also Schwingungen der Äthertheilchen stattfinden; wir nehmen die Verschiebungen η parallel der Y-Achse an und betrachten deren Fortpflanzung längs der X-Achse. In diesem Falle sind in den Maxwell'schen Grundgleichungen die elektrischen Verschiebungen, also auch die elektrischen Kraftcomponenten $X = Z = 0$, ferner die magnetischen Kräfte $L = M = 0$; es bleiben nur die elektrische Kraft Y und die zur Z-Achse parallele, also zu Y normale magnetische Kraft N. Die Gleichungen reducieren sich auf folgende Formen

$$\frac{dY}{dx} = \mu \cdot \frac{dN}{dt}$$

und

$$k\frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx}.$$

Durch Elimination folgen leicht die Gleichungen für die Schwingungen der elektrischen und magnetischen Kraft

$$\mu \cdot k \cdot \frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{d^2 Y}{dx^2}$$

und

$$\mu \cdot k \cdot \frac{d^2 N}{dt^2} = \frac{d^2 N}{dx^2}.$$

Es kann für Y auch die elektrische Verschiebung η gesetzt werden und die erste Gleichung nimmt die gewöhnliche Form an, welche die Elasticitätstheorie für Transversalwellen liefert; es ergeben sich demnach auch die für diese Wellen geltenden Folgerungen. Der Gleichung genügt der für transversale Wellen giltige Wert

$$Y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Durch Einführung desselben wird ersichtlich, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Schwingungen (λ/T) durch den Wert $\sqrt{1/k\mu}$ bestimmt ist. Die magnetische Kraft N, welche zur Z-Achse parallel ist, folgt denselben Gesetzen; sie ist zur elektrischen Kraft Y normal und pflanzt sich mit derselben Geschwindigkeit $\sqrt{1/k\mu}$ fort. Jeder polarisierte Lichtstrahl besteht demnach aus den zu einander senkrechten elektrischen und magnetischen Schwingungen.

Bezüglich der Constanten ist zu bemerken, dass k mit der Dielektricitätsconstanten übereinstimmt, μ ist die Magnetisierungsconstante. Da in den verschiedenen Körpern k verschieden ist, während μ bei den meisten Körpern fast gleich, und zwar gleich Eins ist, so sind

hauptsächlich die elektrischen Eigenschaften der Körper für ihr optisches Verhalten bestimmend.

Das gewonnene Gesetz der Lichtwellen gestattet, die Erscheinungen der geradlinigen Fortpflanzung, der Beugung und der verschiedenen Interferenzen abzuleiten.

§ 142. **Grenzbedingungen. Reflexion und Brechung.** a) Die Grenzbedingungen, welche in der Berührungschichte zweier verschiedener Medien *I* und *II* beim Durchgange des Lichtes in Betracht kommen, lassen sich aus den elektromagnetischen Grundgleichungen entwickeln, indem man dieselben auf ein Raumelement der Grenzschichte bezieht. Die Grenzfläche selbst sei die xy-Ebene. Findet in der Richtung der Grenzebene keine plötzliche Änderung der Kraft statt, so müssen an jeder Stelle dieser Ebene die elektrischen Kräfte beider Medien gleich und die magnetischen Kräfte beider Medien ebenfalls gleich sein; also muss

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad L_1 = L_2, \quad M_1 = M_2$$

sein.

Daraus folgen auch die Bedingungen für die Verschiebungen und die Kräfte normal zur Grenzfläche. Zur Bestimmung derselben benützen wir die Grundgleichungen (§ 138) in den allgemeinen Formen

$$k\frac{dZ}{dt} = \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}$$

und

$$\mu\frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}.$$

Wenden wir jede Gleichung auf beide Mittel an und beachten die Gleichheit der bezüglichen Differentialquotienten in beiden Medien, so folgt

$$k_1 \cdot Z_1 = k_2 Z_2 \quad \text{und} \quad \mu_1 N_1 = \mu_2 N_2,$$

d. h. in der normalen Richtung zur Trennungsebene sind nicht die Kräfte, sondern die elektrischen Polarisationen untereinander und die magnetischen Polarisationen untereinander gleich.

Für die Reflexion und Brechung lässt sich unmittelbar das in § 57 abgeleitete Gesetz geltend machen.

Dieselben Gesetze ergeben sich auch aus der vorstehenden Grenzbedingung. Erfolgen die Schwingungen normal zur Einfallsebene, also parallel zur Trennungsfläche, und setzt man für die elektrischen Kräfte Y die Verschiebungen η, die von jenen durch einen constanten Factor $1/k$ verschieden sind, so hat man die Bedingung

$$\frac{1}{k_1}(\eta_1 + \eta_1') = \frac{1}{k_2}\eta_2.$$

Dieselbe gilt nicht nur für Elongationen in der Trennungsfläche, sondern auch für Elongationen, die in gleich langer Zeit τ entstanden

sind. Mit Berücksichtigung dessen lässt sich nach Einführung der Werte für η_1, η_1' und η_2 in § 57 die dort angegebene Schlussweise auch hierher übertragen, und es ergeben sich so wieder die Gesetze der Reflexion und Brechung.

Die Annahme, dass die Schwingungen eines polarisierten Lichtstrahles normal zur Einfallsebene erfolgen, entspricht der Fresnelschen Anschauungsweise. F. Neumann nahm die Schwingungen in der Einfallsebene an; auch diese Annahme führt zu denselben Reflexions- und Brechungsgesetzen. Die betreffenden Schwingungen eines polarisierten Lichtstrahles entsprechen nach der elektromagnetischen Lichttheorie den magnetischen Schwingungen.

b) Aus den Grenzbedingungen erhält man auch die Grösse der elektrischen Kräfte für die reflectierte und gebrochene Welle.

Wir betrachten zur Einfallsebene normale elektrische Schwingungen und benützen die Grenzbedingungen

$$Y_1 + Y_1' = Y_2 \quad \text{und} \quad L_1 + L_1' = L_2 .$$

Aus der letzten Bedingung folgt (nach § 138), da $X = Z = 0$ ist,

$$\frac{dY_1}{dz} + \frac{dY_1'}{dz} = \frac{dY_2}{dz} .$$

Für die elektrischen Kräfte dreier entsprechenden Punkte in den drei Strahlen gilt wegen des gleichzeitigen Schwingungsbeginnes

$$Y_1 = \mathfrak{Y}_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin\alpha + z \cos\alpha}{\lambda_1}\right),$$

$$Y_1' = \mathfrak{Y}_1' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin\alpha + z \cos\alpha}{\lambda_1}\right),$$

$$Y_2 = \mathfrak{Y}_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin\beta + z \cos\beta}{\lambda_2}\right).$$

Darnach ist

$$\frac{dY_1}{dz} = \mathfrak{Y}_1 \frac{2\pi \cos\alpha}{\lambda_1} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin\alpha + z \cos\alpha}{\lambda_1}\right) = \frac{2\pi \cos\alpha}{\lambda_1} \cdot \overline{Y}_1 .$$

Hierin ist $\overline{Y}_1$ ebenfalls eine elektrische Kraft von beliebiger Allgemeinheit, die von Y_1 um ein Vielfaches einer Viertelwellenlänge entfernt ist; es darf demnach auch $\overline{Y}_1$ und die zugehörigen Kräfte $\overline{Y}_1'$ und $\overline{Y}_2$ in die Grenzbedingung eingeführt werden. Die oberen Unterscheidungsstriche dürfen dann wieder fortgelassen werden. Durch Substitution der Werte (dY_1/dz) etc. und Beachtung, dass dz für den einfallenden und gebrochenen Strahl gleiche Vorzeichen und für den reflectierten entgegengesetztes Vorzeichen haben muss, erhält man

$$(Y_1 - Y_1')\frac{2\pi}{\lambda_1} \cos\alpha = Y_2 \frac{2\pi}{\lambda_2} \cos\beta$$

oder, weil

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

$$(Y_1 - Y_1') \cos\alpha \sin\beta = Y_2 \cos\beta \sin\alpha .$$

Durch Verbindung dieser Gleichung mit $Y_1 + Y_1' = Y_2$ folgen leicht die Kräfte

$$Y_1' = Y_1 \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} \quad \text{und} \quad Y_2 = Y_1 \frac{2\cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} .$$

In ähnlicher Weise lassen sich die elektrischen Kräfte der Reflexion und Brechung berechnen, wenn die elektrische Kraft F in der Einfallsebene normal zum Lichtstrahle wirkt. Es sind alsdann die elektrischen Kräfte

$$X = F\cos\alpha \quad \text{und} \quad Z = F\sin\alpha$$

und die magnetische Kraft

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} .$$

Ferner gelten für X und Z Gleichungen von der Form

$$X = \mathfrak{X} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\alpha + z\cos\alpha}{\lambda}\right) .$$

Durch Einführung dieser Werte in die Grenzbedingungen

$$X_1 + X_1' = X_2 \quad \text{und} \quad M_1 + M_1' = M_2$$

gewinnt man die Gleichungen

$$(F_1 + F_1') \cos\alpha = F_2 \cos\beta ,$$

$$\frac{dM_1}{dt} = \frac{F_1 \cdot 2\pi}{\lambda_1}, \quad \frac{dM_1'}{dt} = -\frac{F_1' \cdot 2\pi}{\lambda_1} \quad \text{und} \quad \frac{dM_2}{dt} = \frac{F_2 \cdot 2\pi}{\lambda_2} .$$

Nun erhält man

$$(F_1 - F_1') \sin\beta = F_2 \cdot \sin\alpha$$

und endlich wird

$$F_1' = F_1 \frac{\operatorname{tg}(\beta - \alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} \quad \text{und} \quad F_2 = F_1 \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)} .$$

Die elektrische Kraft der reflectierten Welle verschwindet, wenn $(\alpha + \beta) = 90^0$. Dieser Fall dient zur Erklärung der Polarisation des natürlichen Lichtes durch Reflexion. Wenn nämlich natürliches Licht, bei dem Schwingungen nach allen Richtungen normal zum Lichtstrahle vorkommen, unter der Bedingung $\alpha + \beta = 90^0$ auf einen Spiegel auffällt, so enthält der reflectierte Strahl keine elektrischen Schwingungen, welche in der Einfallsebene vor sich gehen, sondern nur Schwingungen normal zur Einfallsebene; der reflectierte Lichtstrahl ist alsdann linear polarisiert. Die Folgerung entspricht der Fresnel'schen Theorie, nach welcher die Lichtschwingungen zur Polarisationsebene normal gerichtet sind.

Es ist auch von Interesse, zu bemerken, dass Fresnel in seiner Elasticitätstheorie zu den eben gewonnenen Gleichungen für die Amplituden der reflectierten und gebrochenen Strahlen gelangte, indem er die vorstehenden Grenzbedingungen für die elektrischen Kräfte als Continuitätsprincip für die elastischen Verschiebungen und anstatt der Grenzbedingung für die magnetischen Kräfte das Princip der lebendigen Kräfte anwandte; er setzte die lebendige Kraft der schwingenden Äthertheilchen der einfallenden Strahlen, die sich in einem Raume zwischen einem bestimmten Stücke einer Wellenebene und der Grenzebene befinden, gleich der Summe der lebendigen Kräfte der reflectierten und gebrochenen Strahlen, die aus den betreffenden einfallenden Strahlen entstehen.

§ 143. **Brechungsexponent. Dielektricitätsconstante. Cohäsionsconstante.** a) Der Brechungsexponent für den Fall, dass ein Lichtstrahl aus der Luft oder aus dem leeren Raume in einen anderen Körper übergeht, ist nach dem vorhergehenden Paragraphen gegeben durch

$$n = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}.$$

Die magnetischen Inductionsconstanten μ für beide Medien sind als gleich angenommen und fortgelassen. Die Constanten k sind nach § 138 die Verwandlungsfactoren der elektrischen Kraft in die elektrische Verschiebung; sie sind die reciproken Werte der Constanten $2k$ und $k/4\pi$ in § 101b und c. Setzt man $k_1 = 1$, so bedeutet demnach k_2 die Dielektricitätsconstante des brechenden Mittels, und wir gewinnen den von Maxwell aufgestellten Satz, dass der Brechungsexponent der Quadratwurzel aus der Dielektricitätsconstanten gleich ist. Die Übereinstimmung dieser Constanten ist ein wichtiger Grund für die Ansicht, dass dasselbe Mittel Träger der Elektricität und des Lichtes sei, also ein wichtiger Grund für die elektromagnetische Lichttheorie.

Einige Werte für den Brechungsexponenten n und die Quadratwurzel aus der Dielektricitätsconstanten nach Tscheglājew sind

	n_∞	$\sqrt{k}$
Glas	1·538	1·503
Benzol	1·476	1·473
Wasser	1·323	1·320
Äthylalkohol	1·353	1·273
Amylalkohol	1·397	1·487.

b) Die elektrische und die Cohäsionsenergie geben, als Volumsenergien eines Feldes betrachtet, Werte von ganz übereinstimmenden Formen. Die Ladungsenergie eines elektrischen Condensators, dessen äussere Belegung zur Erde abgeleitet ist, ist nach

§ 101b oder c gegeben durch das Product aus dem elektrostatischen Druck auf die Flächeneinheit in das Volumen des Dielektricums; man hat dafür den Wert

$$W = k \cdot p \cdot v = 4\pi k \cdot \delta^2 \cdot v.$$

Hierin bedeuten $1/2k$ die Dielektricitätsconstante und δ die elektrische Dichte der Ladung.

Die Cohäsionsarbeit des Körpers ist (nach §§ 48 und 59)

$$W = p \cdot v = a \cdot \delta^2 \cdot v,$$

wenn a die Cohäsionsconstante, δ die Dichte und v das Körpervolumen angeben.

Die beiden Energiewerte besitzen ersichtlich ähnliche Formen. Nimmt man an, dass dasselbe Mittel Träger der Elektricität und der Cohäsion ist, dann sind die Constanten k und a den Elasticitätscoefficienten dieses Mediums proportional, und beide Grössen müssen selbst einander proportional sein[1]).

Der Umstand, dass die Cohäsion bei den Schallwellen in Wirksamkeit tritt und eine bedeutend kleinere Fortpflanzungsgeschwindigkeit hervorruft als die des Lichtes, spricht nicht dagegen, dass dasselbe Mittel Träger der Cohäsion und des Lichtes sei. Denn bei jeder Wellenbewegung pflanzen sich Potentialänderungen von einem Erregungscentrum aus fort; es ist nun sicher, dass bei den Schallwellen sich die Wechselwirkungspotentiale der Molecüle ändern, und dass sich diese Anderungen fortpflanzen; und es ist höchst wahrscheinlich, dass bei den Licht- und elektrischen Schwingungen die Selbstpotentiale der Körpertheilchen Anderungen unterworfen werden und die Anderungen sich in Wellenform fortpflanzen. Die Anschauung steht im Einklange damit, dass der elektrische Spannungszustand von einer elektrischen Polarisation der Molecüle begleitet oder sogar durch diese bedingt ist. In dem Werte für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{P/\delta}$ bedeutet P bei den Schallwellen den Elasticitätsmodul oder ungefähr die Cohäsion $a\delta^2$ des Körpers; bei den Lichtwellen gibt $P = k$ den Elasticitätscoefficienten des Äthers an, der mit a zu vergleichen ist.

Eine rechnungsmässige Prüfung der ausgesprochenen Hypothese ist unter den gegenwärtigen Umständen schwer vollständig durchführbar. Es ist ohneweiters klar, wenn die Cohäsionsconstante a und der reciproke Wert der Dielektricitätsconstanten k proportional sein sollen, und wenn die Dielektricitätsconstante mit dem Quadrate

1) Siehe meine Abhdlg. in Exners Rep. 1891 und meine Schrift über den Ätherdruck 1893. S. 62.

des optischen Brechungsexponenten n übereinstimmt, dass dann das Product an^2 eine constante Grösse sein müsse.

Um nun diese Bedingung zu prüfen, müssten sämmtliche Werte eines Körpers, die zur Berechnung von a und n in Anwendung gebracht werden, sich auf genau denselben Zustand beziehen; bei den von verschiedenen Forschern ermittelten diesbezüglichen Daten wurde diese Rücksicht selbstverständlich nicht geübt; ja es weichen die für dieselbe Cohäsion, beziehungsweise für den Elasticitätsmodul desselben Stoffes angegebenen Zahlen oft sehr bedeutend von einander ab. Eine Ursache dessen mag in den verschiedenen molecularen Veränderungen bei den verschiedenen Versuchen liegen. Unter solchen Umständen bleibt die Verwendbarkeit der verfügbaren Daten unsicher; diesbezüglich angestellte Rechnungen können nur den Wert von näherungsweisen Schätzungen beanspruchen.

Einige Werte sind folgende[1]):

Luft	$a = 1690$,	$n = 1{\cdot}000294$,	$an^2 = 1690$
Wasser bei 15° C	$\alpha_{15} = 0{\cdot}000151$,	$P = 950$ Atm.,	$an^2 = 1640$
	$\beta = 0{\cdot}0000455$,	$a = 950$	
	$1/\Delta = 1{\cdot}00085$,	$n = 1{\cdot}312$	
Quarz bei 17° C	$\alpha = 0{\cdot}0000362$,	$P = 4510$ Atm.,	$an^2 = 1650$
	$\beta = 0{\cdot}00000233$,	$a = 670$	
	$\Delta = 2{\cdot}6$,	$n = 1{\cdot}56$	
Glas (bleihaltig)	$\alpha = 0{\cdot}000024$,	$P = 2620$ Atm.,	$an^2 = 1660$
	$\beta = 0{\cdot}0000025$,	$a = 575$	
	$\Delta = 2{\cdot}135$,	$n = 1{\cdot}701$.	

Diese Zahlen für an^2, welche sich auf Körper aller drei Aggregatzustände beziehen, stimmen gut miteinander überein und sprechen jedenfalls zu Gunsten der Hypothese eines einheitlichen Ätherdruckes.

Dagegen lassen sich allerdings für andere Körper auch abweichende Werte berechnen; jedoch ist dadurch die Unhaltbarkeit unserer Hypothese noch nicht erwiesen, da die meisten der bezüglichen Grössen von molecularen Veränderungen der Körper nicht unabhängig sein dürften. — (Näheres in der Schrift über den Ätherdruck.)

§ 144. **Ähnliche Erscheinungen in verschiedenen Gebieten der Physik.** Im Anschluss an den vorhergehenden Paragraphen, der auf einen einheitlichen Träger der verschiedenen physikalischen Energien hinweisen soll, mögen zu demselben Zwecke einige ähnliche Erscheinungen des Lichtes, der Elektricität, der Wärme, der Cohäsion und des Magnetismus zusammengestellt werden.

1) Die benützten Daten sind Winkelmanns Handbuch d. Ph., ferner Wüllners Lehrb. d. Ph. entnommen. (Vgl. auch S. 269; dort ist $\varkappa = 1/\beta$.)

a) Ahnliche Erscheinungen

der Wärme	des Lichtes	des Schalles	der Elektricität
Fortpflanzung der Wärmestrahlen	der Lichtstrahlen	der Schallstrahlen	der Hertz'schen und Röntgenstrahlen
Diathermane	durchsichtige	durchdringliche	dielektrische Stoffe
Athermane	undurchsichtige	undurchdringliche	leitende Stoffe
Wärmefarbe (im Spectrum)	Farbe	Tonhöhe	Schwingungszahl
Absorption	Phosphorescenz u. Fluorescenz	Mittönen und Resonanz	Induction
Reflexion der Wärmestrahlen	Reflexion (Tageshelle, Spiegelbilder)	Reflexion (Echo, Nachhall)	(Influenz)
Brechung „ „	Strahlenbrechung, Linsenbilder	Brechung	Brechung
Interferenz	Interferenz (Farben dünner Blättchen)	stehende Schwingungen der Instrumente	Hertz'sche Schwingungen, Geisslers Röhren
Chemische Wirkungen	Photographie etc.	Krystallisation und Explosion	Elektrolyse, Explosion, Röntgen-Photographie

Erscheinungen, die dem Doppler'schen Principe entsprechen, sind in der Akustik und Astrooptik nachgewiesen.

b) Erscheinungen

der Wärme und Cohäsion	der Elektricität
Kraftfeld im Inneren flüssiger Körper	Kraftfeld im Leiter
Kraftfeld im Inneren fester Körper	„ „ Nichtleiter
Ausdehnung	Abstossung
Zusammenziehung	Anziehung
Verdunstung	elektrische Zerstreuung
Verdampfung	„ Entladung
Wärmeleitung	„ Leitung
Wärmegrad	Elektricitätsgrad (Potential)
Spec. Wärme $\times$ Gewicht	Elektricitätsmenge
Wärmeerregung durch mech. Arbeit	Elektricitätserregung durch mechanische Arbeit

c) Erscheinungen

der Elektricität	des Magnetismus
Anziehung und Abstossung	Anziehung und Abstossung
$\pm$ Elektricität	Nord- und Südmagnetismus
Inductionswirkung	Inductionswirkung
Wirkung auf Magnete	Wirkung auf elektr. Ströme
Erregung von Magnetismus	Erregung von elektr. Strömen

Anm. Eingehendes über die Dualität zwischen Elektricität und Magnetismus siehe in Föppl, Maxwells Theorie S. 121.

§ 145. **Theorie der Doppelbrechung.** a) Niveaufläche oder Fläche gleicher Arbeit. Doppelbrechung findet in anisotropen Medien statt; so z. B. im Doppelspate, der von der Erscheinung der Doppelbrechung seinen Namen hat, und in den meisten anderen Krystallen. (Bartholin 1669, Huygens 1691.) In diesen Medien sind die optischen Kräfte nicht mehr nach allen Richtungen hin dieselben, wie es bisher bei den isotropen Mitteln angenommen wurde, sondern sind nach verschiedenen Richtungen verschieden; daher vermag ein solches Medium kein natürliches Licht fortzuleiten, sondern es treten mancherlei Modificationen ein. Um die Gesetze der Kraftvertheilung und darnach die Polarisation und Fortpflanzung des Lichtes zu erklären, verwenden wir nach J. Stefan die Niveaufläche oder die Fläche gleicher Arbeit rings um einen Punkt im doppeltbrechenden Medium [1]).

Wir erhalten Aufschluss über die Form der Fläche durch folgende Betrachtung. Sei die potentielle Energie des Feldes, das Potential aller Massen des Systems auf ein bestimmtes Äthertheilchen μ, dessen Coordinaten (x, y, z) sind, gegeben durch

$$W = f(x, y, z).$$

Eine Verschiebung des Punktes μ um die äusserst kleine Strecke σ, deren Projectionen auf die drei Coordinatenachsen ξ, η, ζ seien, führt die Energie über in

$$W' = f(x + \xi, y + \eta, z + \zeta).$$

Der Taylor'sche Lehrsatz gestattet nun leicht eine Entwickelung der Function nach den Verschiebungscomponenten (ξ, η, ζ) und die physikalische Interpretation. Wir gelangen jedoch auch ohne besondere Umständlichkeit in elementarer Form zum Resultate, wenn wir W' als eine Function nach steigenden Potenzen der sehr kleinen Grössen ξ, η, ζ ausdrücken, hierbei mit den Gliedern der zweiten Potenz abbrechen und dann die physikalische Bedeutung der angenommenen Coefficienten untersuchen. Wir gelangen auf solche Weise ohneweiters zu der Form

$$W' = a_0 + a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + \frac{1}{2} a_2 \cdot \xi^2 + \frac{1}{2} b_2 \cdot \eta^2 + \frac{1}{2} c_2 \cdot \zeta^2 + \\ + a_3 \cdot \eta \cdot \zeta + b_3 \cdot \xi \cdot \zeta + c_3 \cdot \xi \cdot \eta.$$

Setzen wir zunächst die Verschiebung und ihre Componenten ξ_1, η_1, ζ gleich Null, dann geht W' in den ursprünglichen Wert W der Energie über und es ist

$$W = a_0.$$

1) J. Stefan, Theorie d. Doppelbr. Wiener Sitzb. Bd. 50. Abth. 2. Heft 1—5 S. 550 etc.

Substituiert man diesen Wert und bildet

$$\frac{W' - W}{\xi} = \frac{\varDelta W}{\xi}$$

und setzt nachher wieder alle Verschiebungen gleich Null, so erhält man

$$\frac{dW}{dx} = a_1,$$

d. h. der Coefficient a_1 bedeutet die längs der x-Achse gerichtete Kraftwirkung des Mediums auf das Theilchen μ in der Anfangslage. Soll die ursprüngliche Lage eine Gleichgewichtslage sein, so muss diese Kraft und somit auch $a_1 = 0$ sein. Aus denselben Gründen folgt

$$b_1 = c_1 = a_1 = 0.$$

Für die Energieänderung des Mediums erhalten wir nun

$$\varDelta W = \frac{1}{2} a_2 \cdot \xi^2 + \frac{1}{2} b_2 \cdot \eta^2 + \frac{1}{2} c_2 \cdot \zeta^2 + a_3 \cdot \eta \cdot \zeta + b_3 \cdot \xi \cdot \zeta + c_3 \cdot \xi \cdot \eta.$$

Die Energieänderung gibt den Arbeitswertswert für die Verschiebung σ; sie ist stets gleich derselben Grösse $\varDelta W$, so oft die Componenten ξ, η, ζ der gewonnenen Gleichung genügen. Der geometrische Ort dieser Gleichung ist eine Fläche, welche somit alle Punkte angibt, in die das Äthertheilchen μ durch Anwendung einer bestimmten Arbeit $\varDelta W$ verschoben werden kann. Auf welchem Wege das Theilchen in die Fläche gelangt, ist dabei gleichgiltig. — Eine Verschiebung des Theilchens in der Fläche selbst ändert an dem Werte $\varDelta W$ und somit auch an der Energie nichts; daraus folgt, dass eine solche Verschiebung in der Fläche ohne Aufwand von Arbeit geschehen kann. Eine Fläche von dieser Eigenschaft ist eine Niveaufläche oder Fläche gleicher Arbeit.

Die Gleichung für $\varDelta W$ ist die Mittelpunktsgleichung einer Fläche zweiter Ordnung. Der Mittelpunkt der Fläche liegt in der Gleichgewichtslage des verschobenen Punktes. Die Fläche ist nothwendig geschlossen, weil es keine Richtung geben kann, nach der eine Verschiebung bis ins Unendliche ohne Arbeitsaufwand bewerkstelligt werden könnte; sie ist daher ein Ellipsoid, und wir haben den Stefanschen Satz:

Um jeden Punkt eines optischen Mediums lässt sich ein Ellipsoid construieren von der Beschaffenheit, dass eine Verschiebung dieses Punktes bis zu einer Stelle der Oberfläche des Ellipsoides immer mit demselben Aufwande von Arbeit gemacht werden kann. Dieses Ellipsoid heisst das Ellipsoid der gleichen Arbeit.

Da bei einer Verschiebung des Punktes in der Fläche gleicher Arbeit kein Arbeitsaufwand erforderlich ist, so folgt, dass auf den

Punkt keine tangentiale Kraft wirken kann, und wir haben zwei weitere Sätze:

Durch eine Verschiebung in der Richtung des Radiusvectors des Ellipsoides wird eine Kraft geweckt, die mit der Normalen des Ellipsoides gleiche Richtung hat.

Es gibt drei auf einander senkrechte Richtungen, nämlich die der Achsen des Ellipsoides, für welche die Richtungen der Verschiebung und der durch diese geweckten Kraft zusammenfallen.

Beziehen wir nun die Coordinaten des Ellipsoides auf seine Achsen als Coordinatenachsen, so werden in der vorhergehenden Gleichung die ξ, η, ζ in Producten zu je zweien enthaltenden Glieder wegfallen, also die von der Lage der Coordinatenachsen abhängigen Grössen a_3, b_3, c_3 Null werden. Ersetzen wir weiter die für das neue Achsensystem geltenden Grössen a_2, b_2, c_2 durch a^2, b^2, c^2, so geht die Gleichung über in die Form

$$W = \frac{1}{2}\, a^2 \cdot \xi^2 + \frac{1}{2} b^2 \cdot \eta^2 + \frac{1}{2} c^2 \cdot \zeta^2 .$$

Auch die hierin benützten Coefficienten haben physikalische Bedeutung. Setzen wir nämlich $\eta = \zeta = 0$, so erhält man als die Arbeit der Verschiebung ξ_0

$$W = \left(\frac{1}{2}\, a^2 \xi_0\right) \cdot \xi_0 .$$

Da ξ_0 als eine Halbachse des Ellipsoides den Weg des Punktes angibt, so ist $\left(\frac{1}{2}\, a^2 \xi_0\right)$ die längs des Weges wirkende, mittlere Kraft und somit a^2 der Elasticitätscoefficient oder im Sinne der elektromagnetischen Lichttheorie ist $4\pi/a^2$ die Dielektricitätsconstante in der Richtung der X-Achse.

Durch ähnliche Schlüsse folgt, dass b^2 und c^2 die betreffenden Constanten des Mediums in den Richtungen der Y- und Z-Achse angeben.

Aus den Gleichungen

$$\frac{2W}{\xi_0{}^2} = a^2, \quad \frac{2W}{\eta_0{}^2} = b^2, \quad \frac{2W}{\zeta_0{}^2} = c^2$$

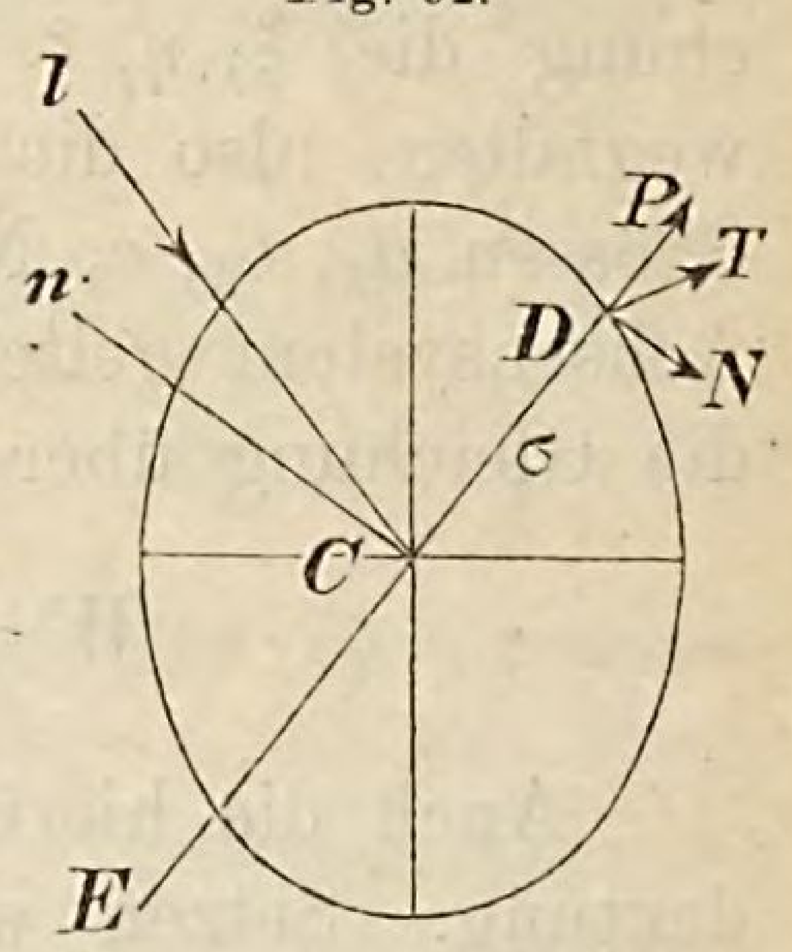
folgt der Satz: Jede der drei Hauptconstanten ist gleich der doppelten Arbeit, für welche das Ellipsoid construiert ist, dividiert durch das Quadrat der zugehörigen Halbachse des Ellipsoides.

Sind die drei Hauptconstanten einander gleich, dann nimmt das Ellipsoid die Kugelgestalt an; das Medium ist in diesem Falle isotrop. Wie aus dem Folgenden noch hervorgehen wird, kann in diesem Falle keine Doppelbrechung eintreten.

b) Polarisation und Fortpflanzung des Lichtes. Die Erscheinungen der Lichtfortpflanzung in anisotropen Medien ergeben sich am einfachsten aus der Betrachtung einer ebenen Wellenfläche, die sich längs ihrer Normalen, Wellennormale genannt, fortpflanzt. — Da alle Punkte der Wellenfläche gleiche Verschiebungen zeigen, so genügt es zunächst, einen einzigen Punkt ins Auge zu fassen. Die Bewegungsgesetze für diesen gelten auch für alle anderen Punkte der Wellenebene[1]).

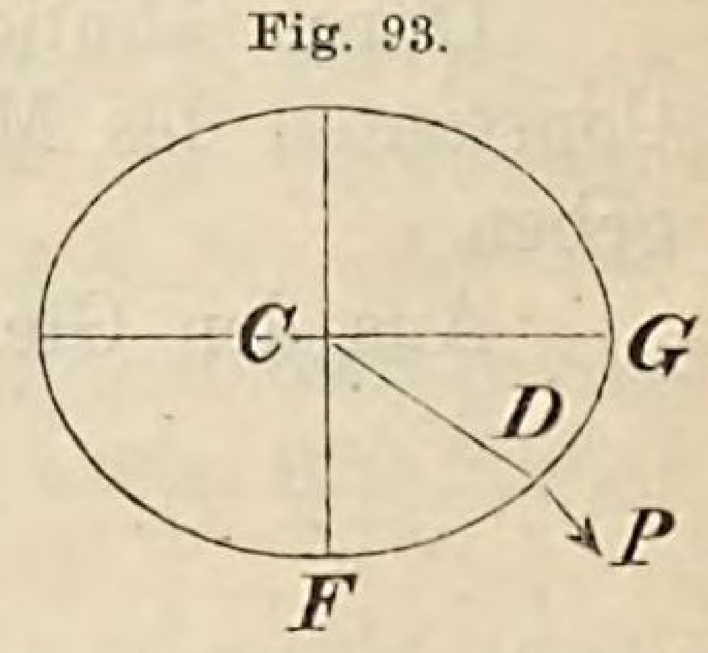
Ein Theilchen im Punkte C (Fig. 92) sei durch einen einfallenden Lichtstrahl l aus seiner Gleichgewichtslage um die Strecke σ verschoben worden. Wir denken uns um C das Ellipsoid gleicher Arbeit construiert und beachten den Durchstosspunkt D der Verschiebungsrichtung, d. i. den Endpunkt von σ. Zu dem betreffenden Flächenelemente steht die geweckte Totalelasticität T normal; dass T mit der Richtung der Verschiebung σ nicht zusammenfällt, ist sofort ersichtlich. Diese Verschiebungsrichtung kann daher durch die Kraft T nicht erhalten werden; nur solche Verschiebungen werden bestehen und solche Schwingungen unterhalten werden, welche mit der Kraft gleiche Richtung haben.

Fig. 92.



Um die Wirkungen der Kraft T ersichtlich zu machen, beachten wir die Wellenebene E und zerlegen die Kraft in eine zu E normale Componente N und in eine in die Ebene fallende Kraft P. Die erstere hätte nur die Anregung zu longitudinalen Verschiebungen zur Folge; sie darf in der Optik ausser Betracht bleiben. Die Wirkung von P ergibt sich aus dem Schnitte der Wellenebene E mit dem Ellipsoide. Derselbe ist eine Ellipse (Fig. 93), in welcher im allgemeinen die Verschiebung CD nicht in die Richtung von P fällt. Der Punkt D muss daher eine Ablenkung erfahren, bis Weg und Kraft miteinander übereinstimmen. Die Übereinstimmung tritt ein, wenn der Punkt sich längs der Achsen CG und CF der Schnittellipse bewegt. Hat die Verschiebung eine dieser beiden Richtungen, so wird auch bei ihrer Fortpflanzung eine Änderung der Richtung nicht eintreten, da dann keine Kraft vorhanden ist, welche eine solche Änderung veranlasst. Schwingungsrichtungen längs der Achsen der Schnittellipse sind deshalb stabil.

Fig. 93.



Bei einer andauernden Lichterscheinung können ausschliesslich nur stabile Schwingungsrichtungen vorkommen. Dieselben stehen

1) Siehe meine Schrift über den Ätherdruck. S. 49.

zu einander normal und entsprechen zwei zu einander senkrecht polarisierten Lichtstrahlen. Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei einer Planwelle mit Schwingungen von stabiler Richtung der Quadratwurzel aus der zu den Schwingungen parallelen Elasticitäts- oder Dielektricitätsconstanten proportional ist, so pflanzen sich die beiden Schwingungen selbständig, jede mit ihrer eigenen Geschwindigkeit fort.

Jede Planwelle, welche Schwingungen von nicht stabiler Richtung enthält, theilt sich in zwei, von denen eine die zur ersten, die andere die zur zweiten stabilen Richtung parallelen Componenten aufnimmt. Beide Wellen pflanzen sich fort mit Geschwindigkeiten, die zu den betreffenden Schwingungsrichtungen gehören.

Die Betrachtung lässt sich auf die Brechung des Lichtes in Krystallen unmittelbar übertragen; es ist also damit auch die Doppelbrechung und die bei derselben auftretende Polarisation erklärt.

Weitere optische Gesetze folgen aus den geometrischen Gesetzen des Arbeitsellipsoides. Von Wichtigkeit sind die Wellenebenen, welche das Ellipsoid in Kreisen schneiden.

Im Kreise ist der Radius stets auch die Normale zu dem entsprechenden Bogenelemente, daher ist in einer solchen Wellenebene keine andere Kraftcomponente vorhanden, als die zur Verschiebung parallele, und diese hat für alle Richtungen in der Ebene einen und denselben Wert. Solche Schwingung ist der Erhaltung fähig und pflanzt sich im Medium ohne Theilung fort. Die Richtungen dieser einfachen Lichtfortpflanzung heissen optische Achsen.

Es gibt zwei Ebenen, welche das Ellipsoid in Kreisen schneiden; dieselben sind leicht zu bestimmen. Sie gehen durch die mittlere Achse des Ellipsoides, stehen demnach normal zur Ebene der kleinsten und grössten Achse. Verzeichnet man in der Schnittellipse dieser Ebene, d. i. in der Ellipse mit der grössten und kleinsten Achse jene zwei Durchmesser, welche der mittleren Achse des Ellipsoides gleich sind, so erhält man die Spuren der beiden Kreisschnitte. — Die Normalen zu den bezeichneten Durchmessern geben die Richtungen der optischen Achsen. — Der eine Winkel zwischen diesen wird von der Achse der kleinsten, der andere Winkel von der Achse der grössten Ellipse halbiert. — Man hat demnach den Satz:

Es gibt zwei Lagen für eine Planwelle, in welchen jede in ihr enthaltene Schwingungsrichtung eine stabile ist. Es sind dies jene Lagen, in welchen die Wellenebene das Ellipsoid gleicher Arbeit in Kreisen schneidet. Es gibt also zwei Richtungen, nach denen eine Planwelle mit beliebigen Schwingungen sich ohne Theilung fortpflanzt. Sie heissen optische Achsen und liegen in der Ebene der grössten und kleinsten Achse des Ellipsoides, ihre Winkel werden von diesen zwei Achsen halbiert.

An diesen allgemeinen Fall, dass die drei Achsen des Ellipsoides gleicher Arbeit sämmtlich verschieden sind, lässt sich noch die Behandlung der zwei speciellen Fälle knüpfen, in welchen entweder zwei oder alle drei Achsen gleich werden. Sind zwei der Achsen gleich, was durch einen symmetrischen Bau des Mediums um die dritte Achse bedingt wird, so schneidet nur mehr eine zu dieser Achse normale Ebene das Ellipsoid in einem Kreise; diese dritte Achse ist daher auch nur die einzige optische Achse des Mediums, das Medium ist optisch einachsig.

Beim Rotationsellipsoid ist in der Schnittellipse jeder Wellenebene eine Achse dem Kreisradius gleich; jeder solchen Schwingung entspricht die gleiche Elasticitäts- oder Dielektricitätsconstante und deshalb auch die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Bei der Doppelbrechung in einachsigen Krystallen wird daher immer eine von den beiden entstandenen Wellen Schwingungen parallel mit einem Kreishalbmesser enthalten. Eine solche Welle pflanzt sich nach jeder Richtung mit derselben Geschwindigkeit fort; sie genügt dem Gesetze der einfachen Brechung und wird deshalb auch ordentliche Welle genannt. In optisch zweiachsigen Krystallen gibt es nur zwei ausserordentliche Wellen.

Ist das Medium nach allen Richtungen gleichartig, so geht das Ellipsoid in eine Kugelfläche über. Jede beliebige Richtung ist eine optische Achse; das Medium ist ein einfach brechendes.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Schwingungen ist gegeben durch die Form

$$v = \sqrt{\frac{\varkappa}{\delta}} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2W}{\delta}}.$$

Dieselbe ist der Verschiebung σ umgekehrt proportional.

Nach den in einem Kraftfelde herrschenden Verhältnissen, welche bei der Ableitung der Maxwell'schen Gleichungen dargestellt wurden, wird durch jede elektrische Schwingung eine senkrechte magnetische Schwingung erzeugt, und durch die betreffenden Verschiebungen werden beziehungsweise elektrische und magnetische Kräfte geweckt. Daraus folgt leicht, dass jede Welle aus zu einander senkrechten elektrischen und magnetischen Polarisationsschwingungen besteht, die in der Wellenebene liegen, dass auf der elektrischen Polarisation die magnetische Kraft und auf der magnetischen Polarisation die elektrische Kraft senkrecht steht; die Richtung beider Kräfte tritt im allgemeinen aus der Wellenebene heraus. Die Richtung, welche auf den beiden Polarisationen senkrecht steht, ist die Wellennormale n. Die Richtung, welche auf beiden Kräften senkrecht steht, ist die Richtung des Lichtstrahles l (Fig. 92).

Die Maxwell'schen Gleichungen selbst nehmen für die Krystalle

unter der Voraussetzung, dass die Symmetrieachsen mit den Coordinaten parallel sind, folgende Form an:

$$\mu_1 \frac{dL}{dt} = \frac{dZ'}{dy} - \frac{dY'}{dz}, \qquad \frac{c}{\varkappa_1} \cdot \frac{dX'}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy},$$

$$\mu_2 \frac{dM}{dt} = \frac{dX'}{dz} - \frac{dZ'}{dx}, \qquad \frac{c}{\varkappa_2} \cdot \frac{dY'}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz},$$

$$\mu_3 \frac{dN}{dt} = \frac{dY'}{dx} - \frac{dX'}{dy}, \qquad \frac{c}{\varkappa_3} \cdot \frac{dZ'}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}.$$

Die Constanten sind nach den Achsenrichtungen verschieden; bei den meisten Krystallen sind jedoch $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$. Das magnetische Verhalten der Krystalle kommt daher dem der isotropen Körper gleich; magnetische Polarisation und magnetische Kraft fallen in eine Richtung. Die Gleichungen ergeben auch die mittelst des Arbeitsellipsoides gezogenen Folgerungen.

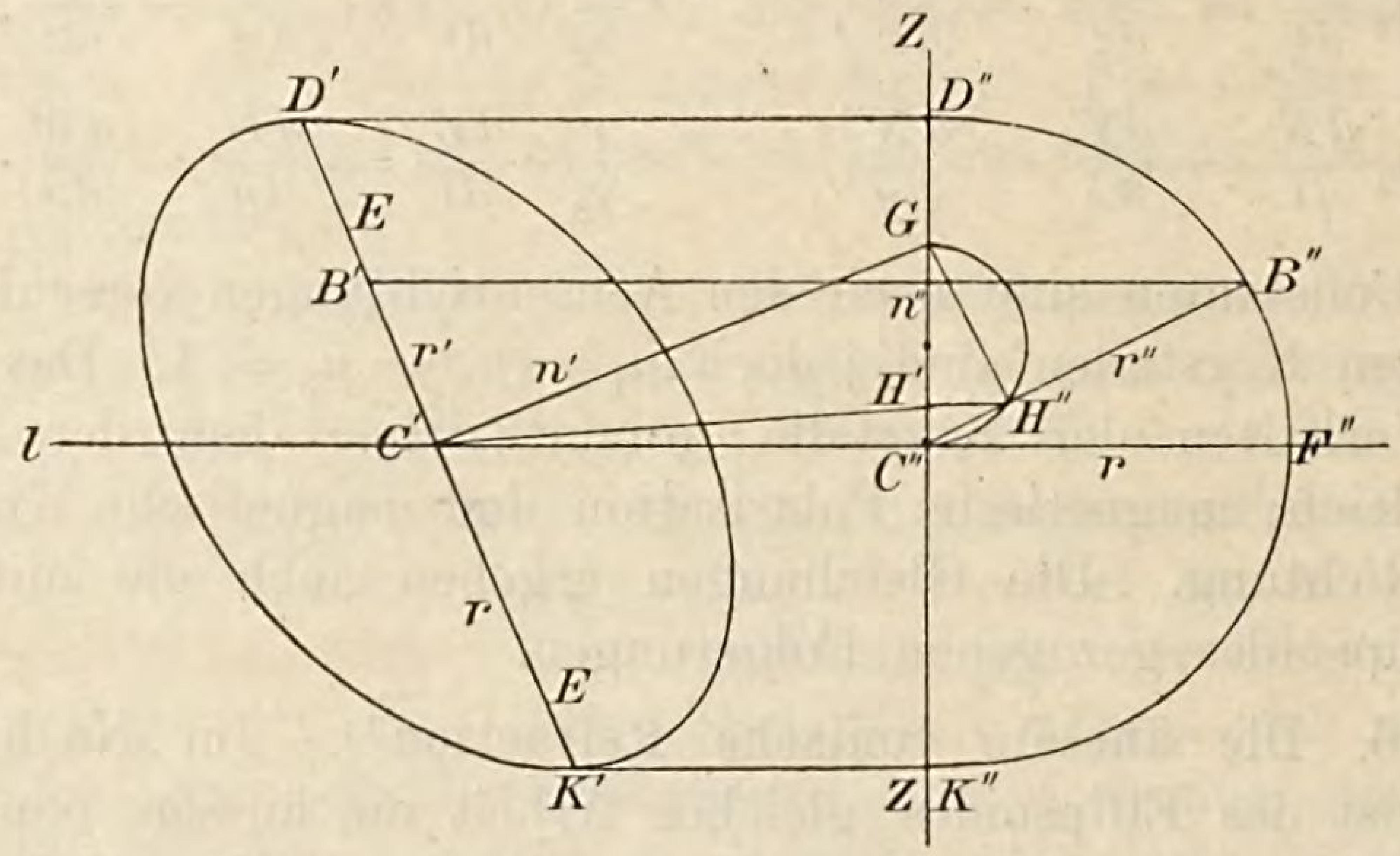
§ 146. **Die äussere conische Refraction**[1]). Im Nachfolgenden soll mittelst des Ellipsoides gleicher Arbeit die äussere conische Refraction durch eine elementare Constructionsmethode erklärt werden. Diese Erscheinung tritt bekanntlich bei optisch zweiachsigen Krystallen ein, wenn ein Lichtstrahl den Krystall in der Richtung einer secundären optischen Achse durchsetzt. Es besteht dann anstatt einer Wellennormalen eine Schar solcher Normalen, welche eine Kegelfläche bilden, in der auch die optischen Achsen liegen. Beim Übergang des Lichtstrahles aus dem Krystall in das umgebende Medium liefert nach dem Brechungsgesetze jede Wellennormale einen gebrochenen Strahl; daher entsteht beim Übertritt des Lichtstrahles in das umgebende Mittel ein Lichtkegel, die Erscheinung der äusseren conischen Refraction.

Um die Lichtbewegung bei dieser Erscheinung darzustellen, legen wir die Wellenebene EE durch die mittelgrosse Achse des Ellipsoides so, dass sie mit dem Ellipsoide einen Kreis als Schnitt liefert (Fig. 94). Der Lichtstrahl l ist in diesem Falle die sogenannte secundäre, die Wellennormale n die primäre optische Achse. Da bei jedem dreiachsigen Ellipsoide zwei zur kleinsten und grössten Achse symmetrisch gelegene Kreisschnitte bestehen, so gibt es auch zwei Paare solcher optischer Achsen. Wir beschränken die Betrachtung nur auf einen Kreisschnitt. Hier finden sich in der Wellenebene EE nicht bloss zwei zu einander normale Achsen als stabile Schwingungsrichtungen vor, sondern die unendlich vielen, gleichberechtigten Richtungen der Kreisradien r. In jeder Ebene, welche durch irgend einen Kreishalbmesser r und den Lichtstrahl l gelegt wird, besteht auch eine Schwingung und dazu normal in derselben Ebene eine Wellennormale n. Infolge

1) Siehe meine Abhdlg. über d. geometr. Erkl. d. conischen Refraction in d. Monatsheften f. Math. u. Phys. V. S. 129—135.

der unendlich vielen Schwingungsrichtungen gibt es auch unendlich viele Wellennormalen, welche eine Kegelfläche zusammensetzen. Es ist nun leicht zu zeigen, dass dieser Normalenkegel von einer zu l normalen Ebene in einem Kreise geschnitten wird.

Fig. 94.



Es ist schon bemerkt worden, dass zur Schwingungsrichtung CD die Normale n (in der 1. Projection der Figur bez. $C'D'$ und n') und zur Schwingungsrichtung CF, welche sich in C' projiciert, die Normale l gehört. Die zwischen der Horizontalen und Verticalen liegenden Schwingungsrichtungen liefern Normalen zwischen n und l. Behufs genauerer Bestimmung legen wir durch eine Gerade ZZ eine zur Lichtstrahlrichtung l normale Ebene, betrachten diese als zweite Projectionsebene und führen die Constructionen in derselben in der Umlegung aus. Es sei nun die in der Figur gezeichnete halbe Ellipse $D''B''F''K''$ die zweite Projection des Kreisschnittes in EE; die halbe grosse Achse der Ellipse ist $C''F'' = C'D' = r$.

Wir fassen irgend einen Halbmesser BC heraus und construieren in der Lichtebene (BC, l) die gesuchte Wellennormale. Dieselbe wird ermittelt als Schnitt der Lichtebene mit einer zu BC normalen Hilfsebene, welche durch den Mittelpunkt C geht.

Die Lichtebene ist normal, also projicierend zur zweiten Projectionsebene. Ihre Spuren sind l und $B''C''$. Zeichnet man die Spuren der Hilfsebene $C'G$ und GH'' beziehungsweise normal zur ersten und zweiten Projection des Halbmessers BC, so erhält man in H'' die zweite Projection und in H' die erste Projection eines Punktes der Wellennormale; die Projectionen der Wellennormale selbst sind alsdann $C'H'$ und $C''H''$.

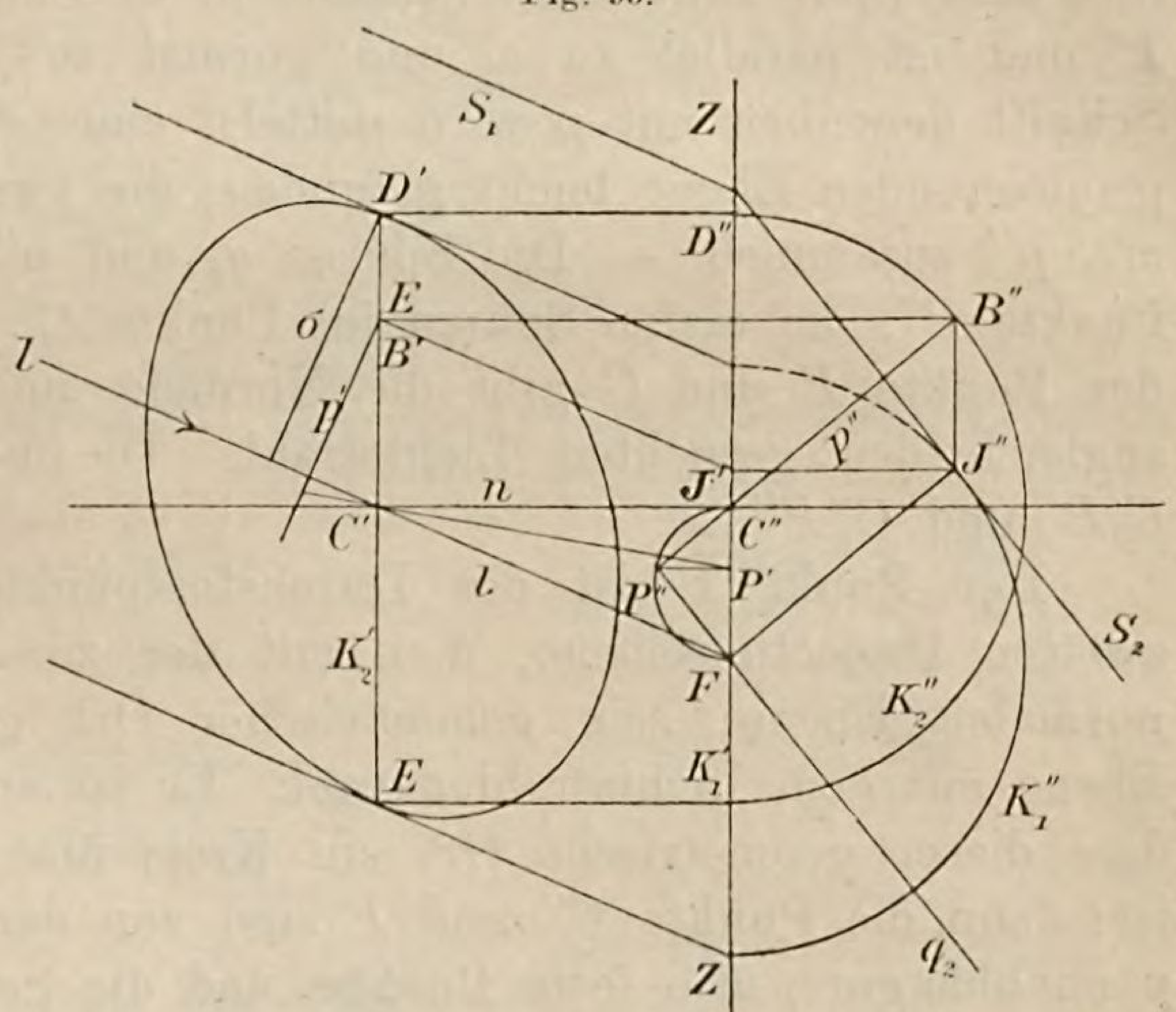
Um die Schnittcurve des ganzen Normalenkegels mit der zweiten Projectionsebene zu bestimmen, hat man nur zu bemerken, dass H bereits ein Punkt der Schnittcurve ist, und dass der geometrische Ort von H'' ein Kreis ist, welcher über den Durchmesser $C''G$ beschrieben

werden kann; denn die Punkte C'' und G sind von der Lage der Normalen unabhängige fixe Punkte, und Winkel $(GH''C'')$ ist ein rechter, also ein Winkel im Halbkreis. Damit ist bewiesen, dass die Wellennormalen wirklich eine Kegelfläche bilden, die mit einer zur secundären optischen Achse normalen Ebene einen Kreis als Schnitt liefert. Die optischen Achsen liegen selbst in der Kegelfläche.

§ 147. **Die innere conische Refraction.** Eine Lichtbewegung, welche einen optisch zweiachsigen Krystall in der Richtung einer optischen Achse durchsetzen soll, gibt innerhalb des Krystalles Anlass zur Bildung eines Lichtkegels, welcher mit einer zur primären optischen Achse normalen Ebene einen Kreis als Schnitt liefert. Die Erscheinung ist unter dem Namen der inneren conischen Refraction bekannt. Sie lässt sich in ähnlicher elementaren Weise, wie oben die äussere conische Refraction, erklären.

Wir betrachten abermals die Ebene EE des Kreisschnittes am Arbeitsellipsoide als Wellenebene. In dieser gibt jeder beliebige Radius eine Schwingungsrichtung an, und zu jeder Schwingungsrichtung gehört ein Lichtstrahl. Die Lichtstrahlrichtung ist stets normal zur wirkenden Totalkraft, also normal zu dem Perpendikel, welches im Endpunkte des betreffenden Kreishalbmessers auf das Ellipsoid gefällt wird. Zu der in der Zeichnungsfläche liegenden Schwingung $C'D'$ gehört der Strahl l, zu welchem das von D' aus gefällte Perpendikel σ normal ist. Zu der auf der Zeichnungsfläche normalen Schwingung, welche sich im Punkte C' projiciert, gehört die Strahlenrichtung n. Zu den zwischen der Verticalen und Horizontalen liegenden Schwingungen gehören Strahlen zwischen n und l. Um ihre Lage genauer zu ermitteln, fassen wir eine beliebige Schwingungsrichtung BC in dem Kreisschnitte ins Auge und suchen den dazu gehörigen Strahl. Derselbe wird gefunden, wenn man im Punkte B zu dem Flächenelemente des Ellipsoides ein Perpendikel zieht und auf dieses vom Mittelpunkte C aus eine Normale construiert. Behufs Ausführung dieses Planes legen wir an den Kreisschnitt des Ellipsoides

Fig. 95.



einen berührenden Cylinder, dessen Erzeugenden parallel zum Lichtstrahle l sind; in den Punkten des Schnittkreises sind die Perpendikel zum Ellipsoide zugleich Perpendikel zur Cylinderfläche. Ferner betrachten wir die bisherige Zeichnungsfläche als erste Projectionsebene und wählen eine durch ZZ zur Wellennormale n perpendiculär gelegte Ebene als zweite Projectionsebene; die Constructionen in dieser führen wir in der Umlegung aus.

In der zweiten Projection zeigen sich die beiden Basiskreise des Cylinders wieder als Kreise in K_1'' und K_2''. Um nun in irgend einem Punkte B des Kreisschnittes ein Perpendikel zur Cylinderfläche zu construieren, benützen wir die Berührungsebene, welche die durch B gehende Erzeugende BJ enthält. Die zweite Spur s_2 dieser Ebene ist die Kreistangente in J''; die erste Spur s_1 ist mit der Lichtstrahlrichtung l parallel. Zu den Spuren normal stehen die Projectionen p' und p'' des von B ausgehenden Perpendikels. Es ist ersichtlich, dass p'' mit $B''C''$ zusammenfällt. — Um nun vom Punkte C auf p die Normale zu ziehen, welche die gesuchte Lichtstrahlrichtung angibt, legen wir durch C zu p eine normale Ebene und bestimmen deren Schnitt mit p. Die Ebene ist parallel zur Berührungsebene $(s_1 s_2)$; ihre erste Spur fällt mit l zusammen; ihre zweite Spur q_2 geht durch F und ist parallel zu s_2 und normal zu FJ'' oder zu p''. Der Schnitt derselben mit p wird mittelst einer durch p gelegten zweiten projicierenden Ebene leicht gefunden; die zweite Spur derselben fällt mit p'' zusammen. — Die Spuren q_2 und p'' schneiden einander im Punkte P'', die ersten Spuren im Punkte C'. Die Verbindungsgerade der Punkte P und C gibt die Normale auf das Perpendikel p und zugleich den gesuchten Lichtstrahl. Die beiden Projectionen sind $C'P'$ und $C''P''$.

Der Punkt P ist der Durchstosspunkt des Strahles mit der zweiten Projectionsebene, d. i. mit der zur ersten optischen Achse normalen Ebene; sein geometrischer Ort gibt den Schnitt dieser Ebene mit dem Lichtstrahlenkegel. Es ist aus der Figur ersichtlich, dass dieser geometrische Ort ein Kreis über $C''F$ als Durchmesser ist; denn die Punkte C'' und F sind von der Lage des Perpendikels p unabhängige, also feste Punkte, und die Schenkel $P''C''$ und $P''F$ bilden bei P'' einen rechten Winkel; und der geometrische Ort der Spitze dieses Winkels ist ein Kreis. Mit demselben ist die Basis des zu ermittelnden Lichtstrahlenkegels gefunden.

Register.

Ablenkung der Winde 36
Absolutes Masssystem 20, 24
Absorption der Gase 231
Absorption des Lichtes 432
Acceleration 21, 99
Accumulator 366
Action und Reaction 119
Adhäsion 164
Adhäsionsplatten 223
Aëromechanik 144
Aggregatzustände 164
Ähnliche Erscheinungen 439
Allgemeine Eigenschaften 165
Ampères Theorie des Magnetismus 406
Anziehung und Abstossung durch Oberflächenspannung 221
Äquipotentialflächen 16, 49
Äquivalenz von Arbeit und Energie 25, 41, Arbeit und Wärme 16, 252, Arbeit und Elektricität 304, 305
Äquivalenz der Verwandlungen 263
Arbeit, Einheit derselben 25
— bei unfreier Bewegung 28
— der Schwerkraft der Erde 73
— der Gravitation der Sonne 73
— der Cohäsion 203
— bei Mischung und Lösung 225
— des menschlichen Herzens 255
— der elektr. Ladung 312, 317
— der Magnetisierung 354
— eines Stromes im Magnetfelde 399
Arbeitswert eines Flüssigkeitsgewichtes 129
Arbeitsgleichung als Spannungsgesetz 150
Arbeitsgleichung als Elasticitätsgesetz 166
Arbeitsmaximum einer elektr. Batterie 378
Archimedes' Gesetz 131
Äther 16
Atmosphäre, Gewicht 144, Höhe 149, 153, Elektricität 308, 378
Atome 166
Aufgabe der Naturlehre 7, 9
Ausdehnung 234, Coëfficient 236, 238, 265
Ausdehnungswärme 274
Ausfluss der Flüssigkeiten 134
Ausfluss der Gase 153
Avogadros Gesetz 271

Barlows Rad 400
Barometer 145, 146, -Reduction 238
Barometrische Höhenmessung 152
Beschleunigung 21, 99
Berührungselektricität 6, 356
Bewegung, gleichförmige 20
— natürliche 21
— gewaltsame 21
— beschleunigte 21
Biegungselasticität 177
Biot-Savarts Gesetz 388
Blattmagnet 345
Blitzschutz 7, 337
Bodendruck einer Flüssigkeit 128
Boyles Gesetz 146
Boyle-Charles' Gesetz 237
Brahmas Presse 126
Brechung der Wellen 199, der elektrischen 425, des Lichtes 434, 437
Bussolen 396
Buys-Ballots Winddrehungsgesetz 156

Calorie 239
Capacität, elektrische 312
Capillaritätsgesetze 207
Centralbewegung 55
Centralkraft 57
Centrifugalkraft 53
Centrifugalregulator 48
Charles-Boyles Gesetz 237
Chemie 2
Chemische Wirkungen des elektrischen Stromes 365
Coefficient, Reibungs- 112
— der Luftreibung 159
— ökonomischer 116, 261
— der Flüssigkeitsreibung 142
— Compressions- 125, 268
— der Elasticität 169
— Absorptions- 231
— Ausdehnungs- 236, 265
— der Magnetisierung 351
— der Induction 404, 411
Coërcitivkraft 341, 352
Cohäsion 164, 165
Cohäsion, specifische 219
Cohäsionsdruck 268, 284, 207.
Cohäsionsconstante 171, 269, 437
Communicierende Gefässe 129
Componentenkräfte 30, 32
Compensationspendel 238
Condensator, elektrischer 322, 329
Convection 371
Coulomb 301
Coulombs Gesetz der Elektricität 300
Coulombs Gesetz des Magnetismus 341

Daltons Gesetz 230
Dampfbildung siehe Verdampfung
Dampfmaschine 6, 258
Dampfspannung 281, 295
Dampfspannung und Oberflächenspannung 286
Dämpfe und Gase 292
Decimalwage 109
Deduction 5, 7
Diamagnetismus 353
Dichte, siehe specifisches Gewicht
Dielektricitätsconstante 326, 437
Differentialflaschenzug 118
Diffusion der Flüssigkeiten 224
Dimension der Geschwindigkeit 20
— der Beschleunigung und der Kraft 22
Dimension der Arbeit und Energie 26
— des Compressibilitätscoefficienten 125
Dimension des Reibungscoefficienten der Flüssigkeiten 142
Dimension des Reibungscoefficienten der Gase 159
Dimension der Spannung 150, 205
— des Elasticitätscoefficienten 167
Dimension der Elektricitätsmenge 301
— des elektrischen Potentials 307
— der elektr. Capacität 312
— der magnetischen Induction 354
Dimension der magnetomotorischen Kraft 354
Dimension des magnetischen Widerstandes 354
Dimension des magnet. Momentes 343
Dimension der magnet. Intensität 344
Dimension der elektrischen Stromstärke und des Widerstandes 370
Dimension der elektromagnetischen Einheiten 395
Döbereiners Feuerzeug 231
Doppelbrechung 441
Doppelschichte bei Flüssigkeiten 212
Doves Winddrehungsgesetz 155
Drehungsmoment 101

Ebbe und Flut 82
Ebene, schiefe 33, 42, 112
Effect 27
Ekliptik 56
Elasticität der Gase 146
Elasticität der Körper 166
Elasticitätsgesetz 166
Elasticitätsgrenze 167
Elasticitätsmodul 167, 169, 174
Elastische Drehung 174
Elastische Nachwirkung 167
Elektricitätsarten 297
Elektricitätsleiter 297
Elektricität, Sitz der 297, 308
— Hypothesen 299, 314, 381, 389
— einer Gewitterwolke 378
Elektricitätsmenge 300
Elektricitätsgrad, Potential 302, 305
Elektrischer Zustand 296, 318, 320
Elektrische Energie 303, 314, 357
Elektrisches Feld 314
Elektrische Vertheilung 298, 334
Elektrische Einheiten 301, 305, 328, 371, 395
Elektrische Dichte, Spannung 308, 321
— Condensatoren 322, 329
— Batterien 331, 357
— Elemente 357, 359
— Bilder, Schirm 336
Elektrischer Strom 356, Theorie 359, Stromstärke 362, 396, Verzweigung, 373, 376
Elektrische Leitungsfähigkeit und Widerstand 369
Elektrische Kraftübertragung 379
— Schwingungen 423
Elektromagnete 401
Elektromagnetismus 6, 385
Elektromagnetische Einheiten 394
Elektromagnetisches Stromfeld 385
Elektromagnetische Lichttheorie 430
Elektrodynamik 404
Elektrodynamometer 412
Elektrolyse 362
Elektrometer 302, 320
Elektromotorische Kraft 357
Elektrostatik 296
Energie der Bewegung 10, 25
— der Lage 10, 17, 38, 60, 75, weiter siehe Raumenergie
Energie eines rotierenden Körpers 94
— der Sonne und Planeten 65
— eines elektrischen Stromes 399
— zweier Ströme 407
Energieformen 17
Epicyklen 56
Erde, Rotation 55, 78, Revolution 64
— Potential 73
— Gestalt 77
— Abplattung 80
— Dichte und Masse 85
— lebendige Kraft 85, 121
Erdmagnetismus 340, Intensität 343
Erg 25
Erscheinung 2
Erstarrung 275
Erstarrungspunkt der Lösungen 284
Extensitätsfactor, siehe Helms Gesetz
Extrastrom 418

Fall der Körper 5, 20
Fallrinne 21, 44
Farad 328

Faradays Scheibe 400, 421
Faradays Würfel, Cylinder 337
Fernwirkung 15, 58, 187
Festigkeit, absolute 172
Festigkeit, relative 178
Fettfleck, Beseitigung 215
Flächengeschwindigkeit 59
Flaschenzug 117
Fliehkraft 53
Flüssigkeiten, Eigenschaften 124
Flüssigkeitshaut 202
Flüssigkeitsoberfläche, Gestalt 217
Flüssigkeitsreibung 140
Fluthöhe 84
Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallwellen 191, 195, 198, 272, der elektrischen Wellen 424
Fortpflanzung des Lichtes 433
Foucaults Pendel 103

Galileis Fallgesetze 20, 44
— Fallrinne 21
Gase, Eigenschaften 144
— Spannungsgesetz 146, 150, 237
Gasmaschine 258
Gastheorie, kinetische 151, 245
Gauss, Satz der Kraftströmung 69
— Wägungsmethode 115
Gefrierpunkt 275
— der Salzlösungen 284
Gegenstand der Naturlehre 1
Gewicht, specifisches 24, 134, 154
Geschwindigkeit 20, siehe auch Fortpflanzung
Geschwindigkeit des Windes 159
Gleichförmige Bewegung 20
Gleichgewicht der drei Phasen eines Körpers 281
Gleichgewichtsbedingungen, elektrische 302, 307
Gleichgewichtslagen 103
Gleichwertigkeit siehe Äquivalenz
Gradient 158
Grammmasse 24, -gewicht 23
Graphische Darstellung der Kraft 30, der Arbeit 116, 259, 290
Gravitation 5, 57

Haarröhrchen 201, 207, Flüssigkeitsstand 209, Flüssigkeitsbewegung 140
Hauptsatz, erster der Wärmetheorie 251
Hauptsatz, zweiter der Wärmetheorie 262
Hebel 107
Heber 150
Helms Intensitätsgesetz 13, 18, 54, 103, 108, 110, 112, 113, 120, 130, 151, 171, 208, 250, 256, 265, 303, 307, 325, 364, 406
Hertz-Maxwells Gleichungen 183, 425
Höhenmessung, barometrische 152

Hydrogenium 232
Hydromechanik 124
Hydrodynamischer Druck 137
Hydrostatischer Druck 126, 128
Hydrostatische Grundgleichung 130
Hygroskopische Stoffe 288
Hypothesen 5
— über die Wärme 242, 249, 277, 282
Hypothesen über die Elektricität 299, 314—322, 327
Hypothesen über Magnetismus 340, 406
— über die elektromagnetischen Kräfte 389

Imponderabilien 15
Induction, magnetische 348
— Volta- und Magneto- 414
Inductionscoefficient 404, 411
Inductionsgesetz 415
Influenzelektricität 298, 315, 334
Intensitätsgesetz siehe Helm
Interferenz der Wellen 192
Intervalle der Töne 196
Joule 27
Joules Gesetz 374
Isobaren 156
Isothermen 257, 290

Kältemaschinen 261
Kältemischung 227
Kegelpendel 44
Keil 113
Keplers Gesetze 5, 59
Kilogrammmeter 25
Kniepresse 36
Kometenbewegung 65
Kraft, constante und veränderliche 24
— graphische Darstellung 30
— -Mass 5, 22
Kraftfeld 16, 73, 183, 187
— der Cohäsion 203, 246
— elektrisches 314
Kraftfeld elektromagnetisches 385
— magnetisches 16, 349
Kraftlinien 16, 73, 183, elektrische 316, magnetische 349, elektromagn. 386
Kräftepaare 101
Kraftströmung 69, 76, 310, 316
Kreisbewegung 46
Kreisprocess, mechanischer 116
— calorischer 258
Kritischer Punkt 288

Lichttheorie 15, 17
— Elasticitätstheorie 429
— elektromagnetische 430
Lösungsarbeit 225
Lösung der Gase 229
— der Salze 284

Luftballon 150
Luftdruck 6
Luftpumpe 146, 152
Luftthermometer 235, 268
— nach Riess 304, 324

Magnetismus 338, para- und diamagnetische Körper 338, 353
Magnetisches Moment 342
Magnetisches Potential 344
— Blatt 345
Magnetische Induction 348
— Kraftlinien 348
Magnetischer Kreis 353
Magnetisierungsarbeit 354
Mariotte-Boyles Gesetz 146
Maschinen, einfache 107
— elektrische 421
Masssystem, absolutes 20, elektrisches siehe dieses
Masse, Masseneinheit 24
Massenmittelpunkt 65
Materie 2
Maxwell-Hertz'sche Gleichungen 183, 425
Meereswellen, Beruhigung 7, 215, 216
Meeresströmungen 162
Metacentrum 133
Methoden der Naturlehre 1
Metronom 100
Mischung der Flüssigkeiten 224, 225
— der Gase 229
Mittelpunkt des Stosses 90, 99
Molecularkräfte 164
— der Flüssigkeiten 201
Molecüle 165
Molecülvolumen 267
Mond, Anziehung 54
Mondflut 85

Naturlehre 2
Naturerklärungen 3, 14
Neptun 6, 57
F. Neumanns Gesetz 214
Newtons Gravitationsgesetz 5, 57, 187
— Kräftemass 5, 22
Niveauflächen 16
— der Schwere 49, 73
— der Flüssigkeiten 127
— der Luft 156
— elektromagnetische 386

Oberflächendruck 207, 216
Oberflächengestalt 217
Oberflächenschichte 204
Oberflächenspannung 206, 207, 211, 212, 214, 219, 220
Oberflächenspannung und Dampfspannung 286
Ölschichte auf Wasser 213, 215, 216
Ohms Gesetz 368
Osmotischer Druck 228
Ostwalds Gesetz der Energieverwandlung 12, 105; — Raumenergie siehe Raumenergie

Paradoxon, hydrostatisches 128
Parallelogramm, Bewegungs- 32
— Geschwindigkeits- 32
— Beschleunigungs- 32
— der Kräfte 32—36
Peltier'sches Phänomen 381, 383
Pendel, einfaches 33, 44
— conisches 44
— physisches 97
— Katers 99
— Foucaults 103
— Robinsons 121
— Flüssigkeits- 137
Photophon 421
Physik 2
Physiologie 2
Planeten, Bewegung der 55
— Massen der 64
— Bewegungsenergie 65
Poiseuilles Gesetz 143
Polarisation der Elektroden 366
— des Lichtes 436, 444
Polarisationsebene, Drehung 430
Porosität 166
Potential der Gravitation 60
— von Massensystemen 69, 183
— der Erdmasse 73
— der Sonnenmasse 73
— elektrisches 305, 314
— magnetisches 344
— des elektrischen Stromes 394
— zweier Ströme 404
— zweier Stromelemente 411
Potenzflaschenzug 117
Presse, hydraulische 126
— Reals 129
— Knie- 36
Princip aller Dinge 4
Princip der Energie 9, 39
— der virtuellen Bewegung 10, 41
— von d'Alembert 11, 42
— von Hamilton 42
— von Gauss 12
— von Hertz 12
Pumpen, Saug- und Druck- 149

Randwinkel 209, 214
Raoults Gesetz 285
Raumenergie 75, 130, 151, 171, 230, 250, 256, 266, 284, 314, 325, 327, 407
Reals Presse 129
Reflexion der Lichtstrahlen 5, 434
— der Wellen 199
Refraction, siehe Brechung
— äussere conische 447

Refraction, innere conische 449
Regel, Rechtehand- 385
— Linkehand- 391
Reibungscoefficient 112, 142
Resultierende Kraft 12
Reversionspendel 99
Rolle 110
Rotation eines Magnetes 400

Schallgeschwindigkeit siehe Fortpflanzungsgeschwindigkeit
Schiefe Ebene 33, 42
Schmelzen 275, Erklärung 277
Schraube 114
Schwerpunkt 88
Schwimmen der Körper 133
Schwimmerregel von Ampère 385
Schwingende Bewegung 46
Schwingungsdauer des Pendels 46, 98
Schwingungsmittelpunkt 98
Schwingungen von Stäben 189
— von Saiten 194
— elektrische 423
Schwingungsintensität 191
Secundärelemente 366
Secundenpendel 48
Segelstellung 36
Seifenblasen 201, 211
Seitenkräfte 30, 32
Sicherheitsventil 116
Sieden 280, Erklärung 282
Siedepunkt von Salzlösungen 284
— und Oberflächenform 288
Siedeverzug 283, 291, 293
Sinne des Menschen 1
Solenoid 401
Sonne, Bewegungsenergie 65
— Masse der 64
— Potential 73
Sonnenflut 85
Sonnenwärme, Erhaltung 254
Spannkraft 11
Spannkraft der Dämpfe 281, 295
Specifisches Gewicht 24, 25, 134, 154
Spectralanalyse 7
Standfestigkeit 105
Steighöhe der Flüssigkeiten 210
Stoff oder Substanz 2
Stoss unelastischer Körper 118
— elastischer Körper 121
Strom, elektrischer 356
— -verzweigung 373, 376
Sublimation 281

Temperatur 234
— absolute 250, 267
Theilbarkeit 166
Theorie 5
Thermoelektrischer Strom 379
Thermometer 6, 234
Thomsons Effect 383
— Gleichung 274
Tonhöhe 193
Tonleiter 196
Torricellis Theorem 134
— Versuch 145
Torsionselasticität 179
Trägheitsmoment 87, 95
Trägheitsradius 95
Transformator 421

Überwucht 25
Uhr 48, Wasseruhr 136
Undurchdringlichkeit 165
Ursache der Erscheinungen 2

Verdampfung 280
Voltas Fundamentalversuch 357
— elektrisches Element 359
Volumenergie siehe Raumenergie

Waals Zustandsgleichung 148, 255, 288
Wage 115
Wärmeäquivalent, mechanisches 13, 252
Wärmeerscheinungen 233
Wärmemessung 239
Wärmehypothesen 242, 249
Wärmetheorie, mechanische 251
Wärmewirkung des elektr. Stromes 374
Wasserluftpumpe 140
Wasseruhren 136
Wasserstoff flüssig und fest 232
Watt 27, 374
Wellenbewegung der Stäbe 189
— der Saiten 194
— in Raummitteln 197
Wellen, elektrische 424
Wellentheorie des Lichtes 15, 429
Wellrad 111
Wetterkarten 156
Winde 155, Ablenkung 36, 155
Windruck, -Stärke 159
Windgeschwindigkeit 158
Winkelbeschleunigung 94
Winkelgeschwindigkeit 45, 54, 81
Wirkungsgrad und Wirkungsraum 18, 54; weiter siehe Helms Gesetz
Wirkung und Gegenwirkung 119
Wurfbewegung 48

Zusammenhangsformen 164
Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen 5, 31, der Kräfte 11, 32, 33, 37, der Kräftepaare 102
Zustände, übereinstimmende 289, 294
Zustandsänderungen, isothermische und adiabatische 257, 290
Zustandsgleichung 147, 168, 170, 255, die Grössen derselben 265, Discussion 288.

Berichtigungen.

S. 20, Aufg. 6, Aufl. lies 4·01.

S. 48, Aufg. 8., Aufl. lies 0·007685 m statt 0·00766 m.

S. 53, Aufg. 7. Die Wurfzeit gehört in die Aufl. und beträgt 34·2 Sec., und die Schussweite ist 16070 m.

S. 55, Aufg. 5, Aufl. lies 73·4 mm statt 75 m.

S. 64, Aufg. 4, lies Erdbahnhalbmesser statt Erdhalbmesser.

S. 79, Z. 12 v. o. lies noch „6) die Präcession und Nutation".

S. 84, Z. 15 v. o. ist in dem Ausdrucke für die Fluthöhe σ der Unterschied zwischen r_0 und r nur bezüglich der Fliehkraft berücksichtigt; bei Unterscheidung von r und $r_0 = r + \sigma$ auch in dem Gliede für die Gravitationsarbeit kommt in Gleichung Z. 13 links noch das Glied $-2mr\sigma/E^3$ hinzu, und der Wert für die Fluthöhe wird $\sigma = m \cdot r^4/[2ME^3(1 - 2\sigma_1/r)]$. Die speciellen Werte sind beziehungsweise $2\sigma_1/r = 17 \cdot 10^{-8}$ und $8 \cdot 10^{-8}$.

S. 102, Z. 9 v. o. lies „in derselben Geraden einander".

S. 106, Z. 9 v. o. lies Standfestigkeit statt Standhaftigkeit.

S. 106, Z. 20 v. o. lies letzten statt zweiten.

S. 106, Z. 23 v. o. lies vorletzten statt letzten.

S. 133, Aufg. 5, lies § 28 anstatt § 26.

S. 137, Aufg. 2, in der Auflösung lies $2h$ statt $4h$ und $t = \pi\sqrt{l/2a}$.

S. 140, Z. 4 v. o. lies 10 m statt 11 m.

S. 143, Z. 20 v. o. lies vergleichen statt verglichen.

S. 151, Z. 16 v. o. lies „auf das Gas".

S. 152, Aufg. 4, Aufl. lies $2·15 + 0·96 = 3·11$ kg.

S. 176, Z. 9 v. u. lies D_x statt D.

S. 180, nach Z. 8 v. o. ergänze „für die an einer Seite eines Durchmessers wirkende Spannung"

S. 192, Z. 14 v. u. lies Stablänge $= l$ statt $2l$.

S. 207, Z. 6 v. o. lies ihr Volumen um dv.

S. 214, Z. 15 v. u. ist das Wort „verlängerten" fortzulassen.

S. 220, Z. 20 v. o. lies h statt H.

S. 289, Z. 1 v. u. lies 1888 statt 1881.

S. 291, Z. 11 v. u. lies geleistete statt geleitete.

S. 299, Z. 18 v. o. lies würde sich in einem Körper.

S. 302, Z. 9 v. u. lies Quotienten statt Product.

S. 302, Z. 11 v. u. lies r statt $1/r$.

S. 315, Z. 18 v. o. lies geaichten statt gerichteten.

S. 354, Z. 11 v. u. lies Polfläche σ die der Kraftlinienzahl pro Flächeneinheit $\mathfrak{B} = \mu \cdot \mathfrak{H}$ entsprechende Menge (S. 350).

S. 375, Z. 2 v. o. lies s statt q.

S. 383, nach Z. 10 ergänze: Das nach der Annahme von Avenarius gewonnene Resultat wird erhalten, wenn man die Potentiale in den Löthstellen den absoluten Temperaturen und die Potentialdifferenzen in den Leiterelementen den absoluten Temperaturen und den dort herrschenden Temperaturdifferenzen proportional setzt; dann wird

$$E = b(T - t) + c_1 \int_t^T T\,dT + c_2 \int_T^t T\,dT = (c_1 - c_2)(T - t)\left[\frac{-b}{c_2 - c_1} + \frac{T + t}{2}\right].$$

S. 412, nach Z. 16 v. o. kann der Zusatz folgen: Bei Berücksichtigung von elektrischen Verschiebungen in den Raumelementen des Kraftfeldes, und zwar wenn dieselben parallel zu den Stromrichtungen in den Leiterelementen angenommen werden, lässt sich die entsprechende Wechselwirkungsenergie ähnlich ermitteln wie die der magnetischen Verschiebungen; man erhält

$$\iint k' i_1 i_2 ds_1 ds_2 \cos\varepsilon \cdot 2 r_1{}^2 \pi \sin\eta_1 \, d\eta_1 \, dr_1 / r_1{}^2 r_2{}^2 = k i_1 i_2 ds_1 ds_2 \cos\varepsilon / R.$$

Der Wert ist dem Neumann'schen Potentiale proportional. Die Energien der elektrischen und magnetischen Verschiebungen summieren sich und geben nach Zusammenziehung ihrer constanten Factoren einen dem Neumann'schen Potentiale entsprechenden Wert.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Januschke, Hans

Das Princip der Erhaltung der Energie und seine Anwendung in der Naturlehre ein Hilfsbuch für den höheren Unterricht

Leipzig 1897

Phys.sp. 316 f
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11822290-5